Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Распределение типа Бозе–Эйнштейна применительно к фликкер-шумам и турбулентности, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 2, 318–319

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf4236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:33:16

© 2006 г.

В. П. Маслов*

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ФЛИККЕР-ШУМАМ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Фликкер-шумы в произвольных структурах и турбулентность рассматриваются как вихревой фликкер-шум.

Ключевые слова: фликкер-шум, турбулентность.

Рассмотрим шумы в среде, отвечающей некоторому гамильтониану $\hat{H}$. Независимо от того, дискретный ли у него спектр, всюду плотный точечный или непрерывный, можно говорить о его сгущении или разрежении, т.е. о его спектральной плотности. Мы отразим эту “плотность сгущения-разрежения”, выбрав некоторый масштаб h , а также дискретный набор “собственных” частот ω_i такой, чтобы при $h \rightarrow 0$ он давал плотность сгущения и разрежения исходного спектра.

Пусть $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \dots, M$, $M \gg 1$, – достаточно большой, но конечный набор частот. Рассмотрим функцию вида $f(t) = \sum_{n=1}^M a_n \sin \omega_n t$. Будем предполагать, что справедливы следующие условия:

- 1) $\sum_{n=1}^M a_n^2 \leq A_0$;
- 2) a_n – рациональные числа;
- 3) энергия ограничена, а именно $\int \left(\frac{df}{dt}\right)^2(t) dt \leq E$.

Отсюда следует $\sum_{n=1}^M \omega_n^2 a_n^2 \leq E$, причем предполагается, что справедливо условие¹⁾ $E \leq A_0 \sum_{n=1}^M \omega_n^2 / M$. Спектральной плотностью интервала s , как обычно [2], будем называть средний квадрат амплитуды вида $A_s = (M - s)^{-1} \sum_{n=s}^M a_n^2$.

В силу условия 2 числа a_n^2 можно привести к общему знаменателю N так, что $a_n^2 = N_n / N$, где N_n и N – целые числа. Тогда получим

$$\sum_{n=1}^M N_n \leq A_0 N. \quad (1)$$

¹⁾ Это условие несущественно для вывода окончательных формул (ср. [1]).

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Фиксированный общий знаменатель означает некоторую дискретность набора $\{a_i^2\}$, его “мерцательность” (flicker), фиксированность некоторого самого мелкого масштаба $1/N$. Далее обозначим $\lambda_n = \omega_n^2$, тогда условие 3 примет вид

$$\sum_{n=1}^M \lambda_n N_n \leq EN. \quad (2)$$

Теперь условия 1, 2, 3 принимают обычный вид для распределения Бозе–Эйнштейна [3]. Мы будем предполагать, что наборы $\{N_i\}_{i=1}^M$ равновероятны при ограничениях (1) и (2). Значит, в силу теоремы 1 из работы [3] (см. также [4])

$$\sum_{n=1}^s N_n \sim \sum_{n=1}^s \frac{c}{e^{\lambda_n \beta} - 1}. \quad (3)$$

Если $\beta \ll 1$, то

$$\sum_{n=s}^M N_n \sim \sum_{n=s}^M \frac{c}{\beta \lambda_n} = \sum_{n=s}^M \frac{c}{\beta \omega_n^2} \sim \frac{c}{\beta} \int_{\omega_s}^{\omega_M} \frac{dj}{\omega_j^2} \sim \frac{c}{\beta} \int_{\omega_s}^{\infty} \frac{dj}{\omega_j^2}. \quad (4)$$

Здесь мы перешли от суммы к интегралу. Отсюда получим

$$\frac{1}{M-s} \sum_{n=s}^M a_n^2 \sim \frac{c}{N\beta(M-s)} \int_{\omega_s}^{\infty} \frac{dj}{\omega_j^2}. \quad (5)$$

Здесь $M-s$ есть число точек ω_n от ω_M до ω_s , и, значит, оно зависит от спектральной плотности $\{\omega_n\}$ оператора $\hat{H}$. Такой “шум” является фликкер-шумом [5]. Экспериментатор находит зависимость A_s от s , а не от собственной частоты ω_s , которая ему неизвестна (ср. [1]).

В некотором смысле турбулентность является вихревым фликкер-шумом с собственными частотами, определяемыми начальной и краевой задачами. В простейшем случае [6] $\omega_s \sim s^{5/6}$, что дает закон Колмогорова–Обухова. Отфильтровать турбулентность как фликкер-шум от среднего течения и означает найти среднее движение турбулентной жидкости. Отметим, что при очень больших значениях ω_n в силу соотношения (3) спектральная плотность A_s будет убывать как $e^{-\beta \omega_s^2}$, и, значит, ее трудно будет экспериментально распознать.

Отметим в заключение, что фиксированность масштаба в теории турбулентности определяется самыми мелкими вихрями, возможными при данной вязкости, – тейлоровским спектром [6]. В выводе закона Колмогорова–Обухова этот масштаб играет существенную роль.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, Т. В. Маслова, *Матем. заметки*, **80**:5 (2006), 718–732.
- [2] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова*, Фазис, М., 1998.
- [3] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 220–230.
- [4] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **78**:6 (2005), 870–877.
- [5] М. Букингом, *Шумы в электронных приборах и системах*, Мир, М., 1986.
- [6] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **50**:3 (1991), 154–155.

Поступила в редакцию 21.09.2006