Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков, Об алгебре фон Неймана, соответствующей одной фазе неоднородной модели Поттса на дереве Кэли, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 2, 206–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:57:42

© 2001 г.

Ф. М. Мухамедов*, У. А. Розиков*

ОБ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ОДНОЙ ФАЗЕ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Доказано, что алгебра фон Неймана, порожденная при ГНС-представлении, ассоциированном с экстремальной неупорядоченной фазой одного класса неоднородных моделей Поттса на дереве Кэли, является фактором типа III_1 .

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство проблем теории многих тел, представляющих физический интерес, довольно сложны и порой неразрешимы. Поэтому существенный интерес приобретают модельные системы, допускающие их математическое рассмотрение. Одной из таких моделей является неоднородная модель Поттса.

Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$ порядка $k \geq 1$ есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k + 1$ ребер, где V — множество вершин Γ^k и L — множество его ребер.

Рассмотрим неоднородную модель Поттса, гамильтониан которой имеет вид

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L} J_{xy} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J_{x,y} \in \mathbb{R}$, $\sigma(x) \in \Phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q\} \subset \mathbb{R}^{q-1}$,

$$\sigma_i \sigma_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ -\frac{1}{q-1}, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad (2)$$

и δ — символ Кронекера.

Одним из центральных вопросов является определение типа алгебры фон Неймана, порождаемой при ГНС-представлении, ассоциированном с гиббсовскими состояниями (см. [1], [2]). Например, Пауэрс в работе [3] рассматривал свободную решетчатую квантовую спиновую систему с двумя состояниями в каждой точке, причем первое состояние

*Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан

занято с вероятностью p , а второе — с вероятностью $q = 1 - p$, и тогда соответствующая алгебра фон Неймана является фактором типа III_λ , где $\lambda = p/q$.

В [4] рассматривалась модель Изинга на решетке Бете (дереве Кэли) порядка k ($k \geq 2$). Для экстремальных трансляционно-инвариантных гиббсовских состояний этой модели найдены связи между алгебрами фон Неймана, порожденными при ГНС-представлении этими состояниями, и показано, что эти алгебры могут иметь типы III_λ и III_1 .

Эта работа является продолжением работы [5], в которой было найдено достаточное условие экстремальности неупорядоченной фазы неоднородной модели Поттса. В настоящей работе определяется тип алгебры фон Неймана, соответствующей экстремальной неупорядоченной фазе одного класса неоднородных моделей Поттса.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для полноты изложения приведем некоторые определения и необходимые результаты.

Из (2) следует, что для любых $x, y \in V$

$$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)} = \frac{q-1}{q} \left(\sigma(x)\sigma(y) + \frac{1}{q-1} \right).$$

Следовательно, $H(\sigma)$ имеет вид

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L} J'_{xy} \sigma(x)\sigma(y), \quad (3)$$

где

$$J'_{xy} = \frac{q-1}{q} J_{xy}.$$

Введем обозначения:

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\},$$

где $x^0 \in V$ — фиксированная точка, а $d(x, y)$ — число ребер кратчайшего пути, соединяющего x и y ;

$$V_n = \bigcup_{m=1}^n W_m = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\};$$

$$L_n = \{l = \langle x, y \rangle \in L \mid x, y \in V_n\};$$

$$\theta_{xy} = \exp\left(\frac{J'_{xy}}{T}\right);$$

$$a(x) = \sum_{y \in S(x)} \left[(q-1) \frac{\theta_{xy} - 1}{\theta_{xy}} \right]^2, \quad x \in V;$$

$$b(x) = \sum_{y \in S(x)} |J'_{xy}|, \quad x \in V.$$

Пусть $a(x)$ удовлетворяет одному из следующих условий.

Условие 1: а) $a(x) \equiv 1$ для любого $x \in V$;

б) для любого $x \in V$ и любых бесконечных путей $\{x, x_1, x_2, \dots\}$ выполняется равенство

$$\prod_{i=1}^{\infty} a(x_i) = 0.$$

Пусть $b(x)$ удовлетворяет следующему условию.

Условие 2. Существует $M > 0$ такое, что $b(x) \leq M$ для любого $x \in V$.

Основным результатом работы [5] была следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполняются условия 1 и 2, то неупорядоченная фаза неоднородной модели Поттса на дереве Кэли является экстремальной.*

Напомним некоторые факты из теории алгебр фон Неймана. Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H (над полем комплексных чисел).

Слабо (операторная) замкнутая *-подалгебра $\mathcal{N}$ в $B(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если она содержит тождественный оператор $\mathbb{1}$. Алгебру фон Неймана называют *фактором*, если ее центр $Z(\mathcal{N}) (= \{x \in \mathcal{N} : xy = yx \ \forall y \in \mathcal{N}\})$ тривиален, т.е.

$$Z(\mathcal{N}) = \{\lambda \mathbb{1} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Элемент $x \in \mathcal{N}$ называется *положительным*, если существует элемент $y \in \mathcal{N}$ такой, что $x = y^*y$. Совокупность всех положительных элементов $\mathcal{N}$ обозначается $\mathcal{N}_+$. Линейный функционал ω на $\mathcal{N}$ называется *состоянием*, если $\omega(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{N}_+$ и $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Состояние ω называется *нормальным*, если для любой ограниченной возрастающей сети $\{x_\alpha\}$ положительных элементов из $\mathcal{N}$ выполнено

$$\omega(\sup_{\alpha} x_{\alpha}) = \sup_{\alpha} \omega(x_{\alpha}).$$

Состояние ω называется *точным*, если из $\omega(x^*x) = 0$ следует $x = 0$.

Пусть $\mathcal{N}$ – фактор, ω – точное нормальное состояние на $\mathcal{N}$ и σ_t^ω – модулярная группа, ассоциированная с ω на $\mathcal{N}$ (см. определение 2.5.15 в [6]). Через $\Gamma(\sigma^\omega)$ обозначим спектр Конна модулярной группы σ_t^ω (см. определение 2.2.1 в [7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [7]. Фактор $\mathcal{N}$ имеет тип:

III₁, если $\Gamma(\sigma^\omega) = \mathbb{R}$;

III _{λ} , если $\Gamma(\sigma^\omega) = \{n \ln \lambda, n \in \mathbb{Z}\}$, $\lambda \in (0, 1)$;

III₀, если $\Gamma(\sigma^\omega) = 0$.

Более подробные сведения об алгебрах фон Неймана и модулярной теории операторных алгебр можно найти, например, в [6], [8].

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы рассмотрим неоднородную модель Поттса на дереве Кэли Γ^k , т.е.

$$H(\sigma) = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L} J_{xy} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

где

$$J_{xy} = \begin{cases} J, & \text{если } x \in W_{2n}, \ y \in W_{2n+1}, \ n \geq 0, \\ -J, & \text{если } x \in W_{2n-1}, \ y \in W_{2n}, \ n \geq 1, \end{cases} \quad \langle x, y \rangle \in L, \quad J > 0. \quad (4)$$

Через μ_0 обозначим неупорядоченную фазу рассматриваемой модели. Непосредственно проверяя условия теоремы 1, находим, что при

$$\frac{(q-1)k^{\frac{1}{2}} - 1}{(q-1)k^{\frac{1}{2}}} < \theta < \frac{(q-1)k^{\frac{1}{2}}}{(q-1)k^{\frac{1}{2}} - 1}, \quad (5)$$

где

$$\theta = \exp \left\{ \frac{qJ}{(q-1)T} \right\},$$

неупорядоченная фаза μ_0 является экстремальной. Далее мы будем предполагать, что условие (5) выполняется.

Рассмотрим C^* -алгебру

$$A = \bigotimes_{\Gamma^k} M_2(\mathbb{C}),$$

где $M_2(\mathbb{C})$ – алгебра матриц 2×2 над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Через e_{ij} , $i, j = 1, 2$, обозначим матричные единицы алгебры $M_2(\mathbb{C})$. Коммутативную подалгебру алгебры $M_2(\mathbb{C})$, порождаемую элементами e_{11} и e_{22} , обозначим через $CM_2(\mathbb{C})$. Положим $CA = \bigotimes_{\Gamma^k} CM_2(\mathbb{C})$. Элементы коммутативной алгебры CA будем представлять как функции на пространстве $\Omega = \{e_{11}, e_{22}\}^{\Gamma^k}$. Пусть на измеримом пространстве (Ω, B) задана мера μ , где B является σ -алгеброй, порожденной конечными цилиндрическими подмножествами Ω . Построим состояние ω_μ на A следующим образом. Положим $\omega_\mu(x) = 0$, если тензорный одночлен x от матричных единиц e_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$, содержит по крайней мере одну частичную изометрию. Если же $x \in CA$, то положим $\omega_\mu(x) = \int_\Omega x d\mu$. Состояние, построенное таким образом, было введено в [9] и называлось *диагональным*.

Обозначим через ω_0 диагональное состояние, порожденное экстремальной мерой μ_0 . Ясно, что состояние ω_0 является экстремальным гиббсовским состоянием для квантованной модели Поттса, гамильтониан которой в силу (3) имеет следующий вид:

$$H = - \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \Phi_{x, y}, \quad \Phi_{x, y} = \begin{pmatrix} A_{x, y}^1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & A_{x, y}^2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{x, y}^q \end{pmatrix},$$

где

$$A_{x,y}^k = (\ln p_{ij,k}^{\langle x,y \rangle})_{i,j=1}^q$$

– матрица $q \times q$; $k = \overline{1, q}$; $(p_{ij,k}^{\langle x,y \rangle})$ – стохастическая матрица, которая определяется следующим образом:

если $x \in W_{2n}$, $y \in W_{2n+1}$, $\langle x, y \rangle \in L$, $n \geq 0$, то

$$\begin{aligned} p_{kk,k}^{\langle x,y \rangle} &= \frac{e^{\frac{J'}{T}}}{\Xi_1}, \quad k = \overline{1, q}, \\ p_{ii,l}^{\langle x,y \rangle} &= \frac{e^{-\frac{J'}{(q-1)T}}}{\Xi_1}, \quad i, l = \overline{1, q}, \quad l \neq i, \\ p_{ij,l}^{\langle x,y \rangle} &= 0, \quad i, j, l = \overline{1, q}, \quad i \neq j, \\ \Xi_1 &= e^{\frac{J'}{T}} + (q-1)e^{-\frac{J'}{(q-1)T}}; \end{aligned}$$

если $x \in W_{2n-1}$, $y \in W_{2n}$, $\langle x, y \rangle \in L$, $n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} p_{kk,k}^{\langle x,y \rangle} &= \frac{e^{-\frac{J'}{T}}}{\Xi_2}, \quad k = \overline{1, q}, \\ p_{ii,l}^{\langle x,y \rangle} &= \frac{e^{\frac{J'}{(q-1)T}}}{\Xi_2}, \quad i, l = \overline{1, q}, \quad l \neq i, \\ p_{ij,l}^{\langle x,y \rangle} &= 0, \quad i, j, l = \overline{1, q}, \quad i \neq j, \\ \Xi_2 &= e^{-\frac{J'}{T}} + (q-1)e^{\frac{J'}{(q-1)T}}. \end{aligned}$$

Обозначим $\mathcal{M} = \pi_{\omega_0}(A)$, где π_{ω_0} – ГНС-представление, ассоциированное с состоянием ω_0 (см. определение 2.3.18 в [6]). Из экстремальности ω_0 вытекает, что $\mathcal{M}$ является фактором. Модулярная группа на $\mathcal{M}$ определяется следующим образом:

$$\sigma_t^{\omega_0}(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \Gamma^k} \exp\{itH(\Lambda)\}x \exp\{-itH(\Lambda)\}, \quad x \in \mathcal{M},$$

где

$$H(\Lambda) = \sum_{\langle x,y \rangle \in \Lambda} \Phi_{x,y}.$$

Существование последнего предела доказано в [10] (теорема 6.2.4). Обозначим через $\mathcal{M}^\sigma$ централизатор σ^{ω_0} , определенный следующим образом:

$$\mathcal{M}^\sigma = \{x \in \mathcal{M}: \sigma_t^{\omega_0}(x) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Пользуясь экстремальностью состояния ω_0 , аналогично тому, как это делалось в [11], можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Централизатор $\mathcal{M}^\sigma$ является фактором типа II_1 .*

ТЕОРЕМА 2. *Если выполняется условие (5), то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$, соответствующая неупорядоченной фазе неоднородной модели Поттса (4) на дереве Кэли, является фактором типа III_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 имеем $Z(\mathcal{M}^\sigma) = \mathbb{C}\mathbb{1}$. Тогда из предложения 2.2.2 работы [7] вытекает $\Gamma(\sigma^{\omega_0}) = Sp(\sigma^{\omega_0})$, где $Sp(\sigma^{\omega_0})$ – спектр Арвесона.

Рассмотрим оператор

$$H(V_n) = \sum_{\langle x, y \rangle \in L_n} \Phi_{x, y}.$$

Через $Sp(H(V_n))$ обозначим спектр оператора $H(V_n)$. Если положить

$$\sigma_t^{\omega_0, n}(x) = \exp\{itH(V_n)\}x \exp\{-itH(V_n)\}, \quad x \in \mathcal{M},$$

то

$$Sp(\sigma^{\omega_0, n}) = Sp(H(V_n)) - Sp(H(V_n)) = \{\lambda - \mu : \lambda, \mu \in Sp(H(V_n))\}. \quad (6)$$

Ясно, что $\ln p_{ij, k}^{\langle x, y \rangle} \in Sp(H(V_n)) \quad \forall i, j, k \in \overline{1, q}, \quad x, y \in V_n$. Из (6) следует, что $Sp(\sigma^{\omega_0, n})$ порождается элементами вида

$$\ln \left\{ \frac{p_{ij, k}^{\langle x, y \rangle}}{p_{ml, k'}^{\langle x', y' \rangle}} \right\}, \quad i, j, k, l, m, k' \in \overline{1, q}, \quad \langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in L_n.$$

Очевидно, что имеет место равенство

$$\frac{p_{ii, k}^{\langle x, y \rangle}}{p_{jj, l}^{\langle x, y \rangle}} = \lambda^{\varepsilon_{jj, l}^{ii, k}}(x, y),$$

где $\varepsilon_{jj, l}^{ii, k} \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{J'q}{(q-1)T}}, & x \in W_{2n}, \quad y \in W_{2n+1}, \quad n \geq 0, \\ e^{-\frac{J'q}{(q-1)T}}, & x \in W_{2n-1}, \quad y \in W_{2n}, \quad n \geq 1, \end{cases} \quad \langle x, y \rangle \in L.$$

Обозначим $\lambda = e^{\frac{J'q}{(q-1)T}}$.

ЛЕММА 2. *Ни при каких значениях $m \in \mathbb{Z}$ и $T > 0$ равенство*

$$\left(\frac{e^{\frac{J'}{T}}}{\Xi_1} \right) / \left(\frac{e^{-\frac{J'}{T}}}{\Xi_2} \right) = \lambda^m \quad (7)$$

не выполняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7) получим

$$\frac{1 + (q-1)\lambda}{1 + (q-1)\lambda^{-1}} = \lambda^m.$$

Из неравенств $1 + (q-1)\lambda > 1 + (q-1)\lambda^{-1}$, $\lambda > 1$ вытекает, что $m \geq 1$. Тогда последнее равенство имеет следующий вид:

$$\frac{1 + (q-1)\lambda}{\lambda + (q-1)} = \lambda^{m-1}.$$

Отсюда получим следующее уравнение:

$$\lambda^m - 1 + (q-1)\lambda(\lambda^{m-2} - 1) = 0. \quad (8)$$

Предположим, что $m > 2$, тогда имеем

$$\lambda^{m-1} + q\lambda^{m-2} + q\lambda^{m-3} + \dots + q\lambda + 1 = 0.$$

Это равенство не выполняется ни при каких значениях $m > 2$ и $T > 0$, так как $\lambda > 1$.

Пусть теперь $m \in \{1, 2\}$. Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что равенство (8) также не выполняется. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что не существует целых чисел $m(i, j, k, l, q, k', x, y, x', y') \in \mathbb{Z}$ таких, что

$$\frac{p_{ij,k}^{\langle x,y \rangle}}{p_{ql,k'}^{\langle x',y' \rangle}} = \lambda^{m(i,j,k,l,q,k',x,y,x',y')}, \quad (9)$$

где $i, j, k, l, q, k' \in \overline{1, q}$, $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in L$. Так как $Sp(\sigma^{\omega_0})$ состоит из предельных точек множества $\bigcup_n Sp(\sigma^{\omega_0, n})$ (см. [12]), то из этого факта и соотношения (9) следует, что $\Gamma(\sigma^{\omega_0}) = \mathbb{R}$. Последнее означает, что фактор $\mathcal{M}$ имеет тип III₁. Теорема доказана.

Заметим, что задача определения типа алгебр фон Неймана, ассоциированных через ГНС-конструкцию с экстремальными фазами, может быть изучена также для моделей, рассмотренных в [13]–[15].

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность проф. Н.Н. Ганиходжаеву за внимание к работе.

Список литературы

- [1] *H. Araki, E. J. Woods.* Publ. R. I. M. S. (Kyoto Univ.). 1968. № 3. P. 51–130.
- [2] *I. F. Wilde.* J. Funct. Anal. 1974. V. 15. P. 12–21.
- [3] *R. Powers.* Ann. Math. 1967. № 81. P. 138–171.
- [4] *Ф. М. Мухамедов.* ТМФ. 2000. Т. 123. № 1. С. 83–88.
- [5] *Ф. М. Мухамедов, У. А. Розиков.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 3. С. 410–418.
- [6] *У. Браттели, Д. Робинсон.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. М.: Мир, 1982.
- [7] *A. Connes.* Ann. Ec. Norm. Sup. 1973. V. 6. P. 133–252.
- [8] *S. Stratila.* Modular theory in operator algebras. Bucuresti: Abacus Press, 1981.
- [9] *A. Г. Шухов.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 2. С. 95–96.
- [10] *O. Bratteli, D. Robinson.* Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics II. Berlin: Springer, 1981.
- [11] *N. N. Ganikhodjaev, F. M. Mukhamedov.* Methods of Funct. Anal. and Topol. 1998. V. 4. № 3. P. 33–38.
- [12] *M. Takesaki.* Reg. Conf. Ser. Math. 1983. V. 51. P. 1–107.
- [13] *Н. Н. Ганиходжаев.* ДАН РУз. 1992. № 6–7. С. 4–7.
- [14] *Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков.* ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
- [15] *Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков.* Матем. сб. 1999. Т. 190. № 2. С. 31–42.

Поступила в редакцию 21.VI.2000 г.,
после доработки 8.X.2000 г.