Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Баранецкий, В. П. Котляров, Асимптотическое поведение в области заднего фронта решения уравнения КдФ с начальным условием “типа ступеньки”, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 2, 214–227

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf426>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:59:31

© 2001 г. В. Б. Баранецкий*, В. П. Котляров*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В ОБЛАСТИ ЗАДНЕГО ФРОНТА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КдФ С НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ “ТИПА СТУПЕНЬКИ”

Получено новое интегральное уравнение, линеаризующее задачу Коши для уравнения Кортевега–де Фриза при начальном условии “типа ступеньки”, когда начальная функция исчезает при $x \rightarrow -\infty$ и стремится к некоторой периодической функции при $x \rightarrow +\infty$, и дано разложение решения задачи Коши на радиационную составляющую, определяемую коэффициентом отражения, и составляющую, обусловленную неубывающим характером начального условия. Для второй составляющей решения выведена приближенная детерминантная формула, справедливая при любом $t \geq 0$ и $x \in (-\infty, X_N)$, где $X_N \rightarrow \infty$ при неограниченном возрастании параметра N конечномерной аппроксимации интегрального уравнения. При $t \rightarrow \infty$ доказано, что решение задачи Коши в окрестности заднего фронта распадается на асимптотические солитоны, фазы которых вычислены явно в терминах коэффициента отражения и других параметров задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи об асимптотическом поведении решений нелинейных уравнений типа Кортевега–де Фриза (КдФ) при больших временах остаются актуальными на протяжении всей истории развития теории солитонов. После открытия метода обратной задачи теории рассеяния [1], [2] для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений обнаружилась важная роль простейших точных решений этих уравнений, называемых солитонными решениями. В терминах теории рассеяния эти решения характеризуются равенством нулю коэффициента отражения. Так, например, любое начальное возмущение, быстро исчезающее при $x \rightarrow \pm\infty$, под воздействием потока, задаваемого каким-либо уравнением типа КдФ, распадается при больших временах на солитоны, порожденные дискретным спектром соответствующей задачи рассеяния [3]–[5]. Вклад в асимптотику решения, обусловленный непрерывным спектром, т.е. ненулевым коэффициентом отражения, оказывается исчезающе малым при $t \rightarrow \infty$ [6]–[9].

В середине 70-х годов были обнаружены другие интересные объекты теории солитонов – асимптотические солитоны [10]–[12]. В отличие от обычных солитонов они удов-

* Институт низких температур им. Б. И. Веркина, Харьков, Украина.
E-mail: baranetsky@ilt.kharkov.ua, kotlyarov@ilt.kharkov.ua

летворяют нелинейному уравнению тем точнее, чем больше t . Существование таких солитонов было предсказано в работе [13] при изучении уравнения КдФ с начальными данными “типа ступеньки”, когда начальная функция исчезает при $x \rightarrow +\infty$ и стремится к некоторой постоянной величине при $x \rightarrow -\infty$. Строгое рассмотрение задачи Коши с начальными данными “типа ступеньки” было проведено в работе [14], где, в частности, было показано, что асимптотические солитоны связаны с однократным непрерывным спектром соответствующей задачи рассеяния. Для начальных данных “типа ступеньки”, когда начальная функция исчезает при $x \rightarrow +\infty$ и стремится к некоторой периодической или почти периодической функции при $x \rightarrow -\infty$ (см. обзор [12]) были найдены достаточные (близкие к необходимым) условия распада решений на асимптотические солитоны в окрестности переднего фронта, а вопрос о возможности распада решений на асимптотические солитоны в окрестности заднего фронта оставался открытым. После появления работы [15] стало ясно, что такое явление возможно. Описанию распада решений на асимптотические солитоны в окрестности заднего фронта посвящена эта работа.

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения КдФ:

$$u_t - 6u_x u + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = q(x), \quad (1.2)$$

где $q(x)$ — достаточно гладкая начальная функция “типа ступеньки”, быстро стремящаяся к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и к периодической функции $q_0(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Для простоты предположим, что функция $q_0(x)$ является однозонным потенциалом уравнения Шредингера, а оператор Шредингера

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

с потенциалом $q(x)$ не имеет дискретного спектра. При таких предположениях справедливо следующее представление для решения задачи Коши (1.1), (1.2):

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t), \quad (1.3)$$

где функция $K(x, y, t)$ является решением линейного интегрального уравнения Марченко

$$K(x, y, t) + \int_{-\infty}^x K(x, z, t) H(z + y, t) dz + H(x + y, t) = 0, \quad -\infty < z < x, \quad (1.4)$$

с ядром

$$H(x, t) = \int_{\gamma} p(k) e^{-ikx - 8ik^3 t} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{-ikx - 8ik^3 t} dk = P(x, t) + R(x, t), \quad (1.5)$$

где $\gamma = [ia, ib]$ – отрезок мнимой оси, $0 < a < b$. Здесь функция $r(k)$ является коэффициентом отражения, а функция $ip(ik)$ вещественна в интервале $[a, b]$ и имеет вид

$$ip(ik) = \sqrt{(k-a)(b-k)}p_0(k), \quad k \in [a, b],$$

где $p_0(k)$ – достаточно гладкая и положительная в замкнутом интервале $[a, b]$ ($0 < a < b$) функция.

Для исследования распада решения в окрестности заднего фронта уравнение (1.4) неприменимо. Более удобными оказываются другие интегральные уравнения. Будет показано, что решение исходной задачи представимо в виде

$$u(x, t) = u_r(x, t) + 2 \frac{d}{dx} \int_a^b \psi(x, t, k) \hat{h}(x, t, k) \rho(k) dk, \quad (1.6)$$

где $u_r(x, t) = -2dL(x, y, t)/dx$, а $L(x, y, t)$ есть решение уравнения Марченко

$$L(x, y, t) + R(x + y, t) + \int_{-\infty}^x L(x, z, t) R(y + z, t) dz = 0$$

с ядром $R(x, t)$, определяемым коэффициентом отражения $r(k)$. Вещественная функция $\psi(x, t, k)$ является решением следующего основного интегрального уравнения:

$$\psi(x, t, k) + \int_a^b A(k, \mu, x, t) \psi(x, t, \mu) \rho(\mu) d\mu = \hat{h}(x, t, k), \quad k \in [a, b], \quad (1.7)$$

$$A(k, \mu, x, t) = \int_{-\infty}^x \hat{h}(s, t, k) \hat{h}(s, t, \mu) ds. \quad (1.8)$$

Здесь функции $\rho(\mu)$ и $\hat{h}(x, t, k)$ являются вещественными и определяются формулами

$$\rho(\mu) = ip(i\mu) > 0, \quad \hat{h}(x, t, k) = e^{kx - 4k^3 t} + \int_{-\infty}^x L(x, y, t) e^{ky - 4k^3 t} dy. \quad (1.9)$$

Дальнейшие выкладки будут проводиться для любой достаточно гладкой функции $\rho(\mu)$ такой, что $\rho(\mu) = (\mu - a)^\alpha (b - \mu)^\beta \rho_0(\mu)$, где параметры $\alpha, \beta > -1$, а функция $\rho_0(\mu) > 0$, $\mu \in [a, b]$. В этом случае мы получим более широкий класс решений $u(x, t)$ уравнения КдФ, стремящихся к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и ограниченных при $x \rightarrow +\infty$.

Для формулировки основных результатов работы введем следующие обозначения. Определим область заднего фронта как множество тех $x \in \mathbb{R}$, для которых

$$\Omega_N(t) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < 4a^2 t + \frac{1}{2a} \ln t^{N+\alpha+1} \right\},$$

где N – произвольное натуральное число, $t > 1$. По известному из решения прямой задачи рассеяния коэффициенту отражения $r(k)$ введем функцию

$$\eta_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln[1 - |r(s)|^2]}{s^2 + k^2} ds \quad (1.10)$$

и определим функцию

$$D(k, \mu, x, t) = A(k, \mu, x, t) e^{-k[x-4k^2t+\eta_0(k)]} e^{-\mu[x-4\mu^2t+\eta_0(\mu)]}.$$

Обозначим через $D^{(N)}(x, t) = \{d_{lm}(x, t)\}_{l,m=0}^N$ матрицу первых $(N+1)^2$ коэффициентов Тейлора функции $D(k, \mu, x, t)$, взятых в точке $k = \mu = a$. Пусть матрица $I^{(N)}(x, t) = \{I_{l+m}(x, t)\}_{l,m=0}^N$ составлена из функций

$$I_m(x, t) = \int_a^b e^{2k[x-4k^2t+\eta_0(k)]} (k-a)^m \rho(k) dk, \quad (1.11)$$

а матрица $A^{(N)}(x, t)$ есть произведение матриц:

$$A^{(N)}(x, t) = D^{(N)}(x, t) I^{(N)}(x, t).$$

Предположим также, что $b < 2a$.

ТЕОРЕМА 1. *Решение задачи (1.1), (1.2) существует всюду в $\mathbb{R}^2$, в области $G_N = \bigcup_{t>1} \Omega_N(t) \subset \mathbb{R}^2$ оно представимо в виде*

$$u(x, t) = u_r(x, t) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial d_{00}} \{ \ln \det[E^{(N)} + A^{(N)}(x, t)] \} + \Delta^{(N)}(x, t), \quad (1.12)$$

где $E^{(N)}$ есть единичная матрица порядка $N+1$, функция $u_r(x, t)$ определена в (1.6), а функция $\Delta^{(N)}(x, t)$ удовлетворяет неравенствам

$$|\Delta^{(N)}(x, t)| \leq \begin{cases} \frac{K_N}{t}, & \frac{N+2+\alpha+\beta}{2b} \ln \sqrt{\frac{a}{b-a}} < x - 4a^2t < \frac{1}{2a} \ln t^{N+\alpha+1}, \\ \min \left\{ \frac{K_N}{t}, K \left(\frac{b-a}{a} \right)^{\frac{N+2+\alpha+\beta}{2}} N \right\}, & -\infty < x - 4a^2t < \frac{N+2+\alpha+\beta}{2b} \ln \sqrt{\frac{a}{b-a}}. \end{cases}$$

Постоянные K_N и K зависят от параметров задачи a, b, α, β и функций $r(k)$ и $\rho_0(k)$.

Следует отметить, что $\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta^{(N)}(x, t) = 0$ равномерно по $x \leq 4a^2t + ((N+2+\alpha+\beta)/2b) \ln \sqrt{a/(b-a)}$ ($b < 2a$), а $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta^{(N)}(x, t) = 0$ равномерно по $x \in \Omega_N(t)$ для любого фиксированного натурального N . Асимптотический анализ решения (1.12) позволяет доказать, что функция $u(x, t)$ распадается на $[(N+1)/2]$ солитонов, находящихся в области $\Omega_N(t)$, при $t \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. В области $\Omega_N(t)$ решение $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ представимо в виде

$$u(x, t) = - \sum_{n=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \frac{2a^2}{\operatorname{ch}^2\left\{a\left(x - 4a^2t + \frac{1}{2a} \ln t^{2n+\alpha-1} + x_n\right)\right\}} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}\right),$$

где фазы солитонов имеют вид $x_n = x_n^0 + \eta_0(a)$, $\eta_0(a)$ – значение функции $\eta_0(k)$, определенной в (1.10), взятое в точке $k = a$, а числа

$$x_n^0 = \frac{1}{2a} \ln \frac{[(n-1)!]^2 \Delta_1^{(n-1)} \Delta_2^{(n-1)} a^{6n-3+2\alpha} 2^{10n-5+4\alpha}}{\rho_0(a)(b-a)^\beta \Delta_1^{(n)} \Delta_2^{(n)}},$$

где $\Delta_1^{(n)}$ и $\Delta_2^{(n)}$ – детерминанты матриц, компонентами которых являются числа $(i+j)!$ и $\Gamma(i+j+1+\alpha)$ ($i, j = \overline{0, n-1}$), соответственно.

Теорема 2 справедлива и в случае, когда $b > 2a$. Для ее доказательства необходимо провести дополнительные оценки, которые получаются, как и в работе [16], для безотражательного случая.

2. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим уравнение Марченко (1.4) с ядром (1.5). Запишем его в операторной форме

$$(\mathbf{E} + \mathbf{R} + \mathbf{P})[K] = -R - P \quad (2.1)$$

и будем искать решение $K(x, y, t)$ в виде суммы двух функций:

$$K = L + (\mathbf{E} + \mathbf{R})^{-1}[M], \quad (2.2)$$

где первая $-L(x, y, t)$ – удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{E} + \mathbf{R})[L] = -R, \quad (2.3)$$

а вторая есть результат действия оператора $(\mathbf{E} + \mathbf{R})^{-1}$ на некоторую функцию $M(x, y, t)$.

Как известно [17],

$$(\mathbf{E} + \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{Q}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{Q}$ – интегральный оператор, действующий в пространстве $L^1(-\infty, x)$, и его ядро имеет вид

$$Q(y, z, t) = \begin{cases} L(y, z, t) + \int_y^x L(s, y, t) L(s, z, t) ds, & z < y, \\ L(z, y, t) + \int_z^x L(s, y, t) L(s, z, t) ds, & y < z. \end{cases} \quad (2.5)$$

Подстановка (2.2) в (2.1) дает

$$M + \mathbf{P}(\mathbf{E} + \mathbf{Q})[M] = -P - \mathbf{P}[L]. \quad (2.6)$$

Введем в рассмотрение решения Йоста

$$h(x, t, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x L(x, y, t) e^{-iky} dy \quad (2.7)$$

и

$$\varphi(x, t, k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x K(x, y, t) e^{-iky} dy \quad (2.8)$$

линейного уравнения Шредингера с потенциалами $u_r(x, t) = -2dL(x, x, t)/dx$ и $u(x, t) = -2dK(x, x, t)/dx$, соответственно. Эти функции являются аналитическими по переменной $k \in \mathbb{C}_+$. Пусть

$$g(x, z, t, k) = h(z, t, k) + \int_z^x L(s, z, t) h(s, t, k) ds, \quad k \in \mathbb{C}_+,$$

и

$$F(x, y, z, t) = \int_{\gamma} p(k) e^{-iky-8ik^3t} g(x, z, t, k) dk.$$

Тогда из (2.5) следует, что

$$\mathbf{P}[f] + \mathbf{PQ}[f] = \int_{-\infty}^x f(z) F(x, y, z, t) dz, \quad (2.9)$$

а правая часть уравнения (2.6) переписывается в виде

$$-P - \mathbf{P}[L] = - \int_{\gamma} p(k) e^{-iky-8ik^3t} h(x, t, k) dk = -F(x, y, x, t).$$

Исходя из последнего равенства и соотношения (2.9), получаем интегральное уравнение для функции $M(x, y, t)$:

$$M(x, y, t) + \int_{-\infty}^x F(x, y, z, t) M(x, z, t) dz = -F(x, y, x, t). \quad (2.10)$$

С другой стороны, равенство (2.6) дает соотношение

$$M = -P - \mathbf{P}[K],$$

которое вместе с (2.8) приводит к следующему представлению для функции $M(x, y, t)$:

$$M(x, y, t) = - \int_{\gamma} p(k) e^{-iky-8ik^3t} \varphi(x, t, k) dk. \quad (2.11)$$

Поэтому если функция $\varphi(x, t, k)$ есть решение интегрального уравнения

$$\varphi(x, t, k) - h(x, t, k) + \int_{\gamma} B(x, t, k, \mu) \varphi(x, t, \mu) d\mu = 0 \quad (2.12)$$

с ядром

$$B(x, t, k, \mu) = p(\mu, t) \int_{-\infty}^x h(s, t, k) h(s, t, \mu) ds,$$

то функция $M(x, y, t)$, определяемая формулой (2.11), будет решением интегрального уравнения (2.10). При этом согласно формулам (1.3), (2.2), (2.11) решение задачи (1.1), (1.2) принимает вид

$$u(x, t) = u_r(x, t) + \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\gamma} p(k, t) \varphi(x, t, k) h(x, t, k) dk. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) после замены $k \rightarrow ik$, $\mu \rightarrow i\mu$ (в результате которой $k, \mu \in [a, b]$) и

$$\psi(x, t, k) = \varphi(x, t, ik) e^{-4k^3 t}, \quad \hat{h}(x, t, k) = h(x, t, ik) e^{-4k^3 t}$$

совпадает с уравнением (1.7) с ядром, определяемым формулами (1.8), (1.9).

3. АНАЛИЗ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть $L_{\rho}^2(a, b)$ есть весовое (с весом $\rho(k)$) пространство вещественных функций $f(k)$, заданных на интервале (a, b) , со скалярным произведением

$$(f, g)_{\rho} = \int_a^b f(k) g(k) \rho(k) dk.$$

В этом пространстве рассмотрим оператор $\mathbf{A}$ вида

$$[\mathbf{A}f](k) = \int_a^b A(k, \mu, x, t) f(\mu) \rho(\mu) d\mu, \quad k \in (a, b), \quad (3.1)$$

зависящий от двух параметров $x, t \in \mathbb{R}$. Ядро этого оператора задано формулой (1.8).

ЛЕММА 1. Оператор $(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}$ существует в пространстве $L_{\rho}^2(a, b)$, его норма удовлетворяет оценке

$$\|(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}\| \leq 1$$

для всех $x, t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x, t \in \mathbb{R}$ оператор $\mathbf{A}$ определен на всем пространстве $L_{\rho}^2(a, b)$, он самосопряжен и вполне непрерывен. Квадратичная форма оператора $\mathbf{A}$ в пространстве $L_{\rho}^2(a, b)$ неотрицательна, поскольку в силу (1.8)

$$(\mathbf{A}f, f)_{\rho} = \int_{-\infty}^x ds \left(\int_a^b \hat{h}(s, t, k) f(k) \rho(k) dk \right)^2 \geq 0.$$

Поэтому однородное уравнение

$$f + \mathbf{A}f = 0$$

имеет только нулевое решение в пространстве $L^2_\rho(a, b)$. Тогда в силу второй альтернативы Фредгольма неоднородное уравнение

$$f + \mathbf{A}f = g$$

однозначно разрешимо в пространстве $L^2_\rho(a, b)$ при любом $g \in L^2_\rho(a, b)$. Тем самым оператор $(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}$ существует и определен на всем пространстве $L^2_\rho(a, b)$. Оценка для нормы резольвенты в пространстве $L^2_\rho(a, b)$ следует из неравенств

$$\|f\|_\rho^2 \leq (f, f)_\rho + (\mathbf{A}f, f)_\rho = (g, f)_\rho \leq \|g\|_\rho \|f\|_\rho.$$

Лемма доказана.

Анализ основного интегрального уравнения построен на аппроксимации этого уравнения интегральным уравнением с вырожденным ядром. Для этого запишем ядро $A(k, \mu, x, t)$ оператора $\mathbf{A}$ в виде

$$A(k, \mu, x, t) = e^{(k+\mu)x-4(k^3+\mu^3)t} D(k, \mu, x, t) e^{k\eta_0(k)+\mu\eta_0(\mu)}, \quad (3.2)$$

где функция $D(k, \mu, x, t)$ аналитична по k и μ в области $\{(k, \mu): \operatorname{Re} k > 0, \operatorname{Re} \mu > 0\}$, гладко зависит от переменных x и t и ограничена по совокупности переменных.

Разложим функцию $D(k, \mu, x, t)$ в окрестности точки (a, a) в ряд Тейлора:

$$D(k, \mu, x, t) = \sum_{l,m=0}^{\infty} d_{lm}(x, t) (k-a)^l (\mu-a)^m.$$

Из неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора

$$|d_{lm}(x, t)| \leq a^{-(l+m)} \max_{[a,b] \times [a,b]} |D(k, \mu, x, t)| \leq M a^{-(l+m)} \quad (3.3)$$

закключаем, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно по $(k, \mu) \in (a, b) \times (a, b)$, если $b < 2a$.

Для любого натурального числа N оператор $\mathbf{A}$ можно представить в виде суммы вырожденного оператора $\mathbf{A}_N$ и оператора $\mathbf{B}_N$, норма которого в пространстве $L^2_\rho(a, b)$ мала, если N велико. Действительно, положим

$$\mathbf{A}_N f = \sum_{l,m=0}^N d_{lm}(x, t) \int_a^b e^{(k+\mu)x-4(k^3+\mu^3)t} (k-a)^l (\mu-a)^m f(\mu) \rho(\mu) d\mu \quad (3.4)$$

и

$$\mathbf{B}_N f = \sum_{(l,m) \in R^{(N)}} d_{lm}(x, t) \int_a^b e^{(k+\mu)x-4(k^3+\mu^3)t} (k-a)^l (\mu-a)^m f(\mu) \rho(\mu) d\mu, \quad (3.5)$$

где в (3.5) суммирование ведется по множеству пар индексов (l, m)

$$R^{(N)} = \{(l, m): 0 \leq l, m < \infty\} \setminus \{(l, m): 0 \leq l \leq N, 0 \leq m \leq N\}.$$

ЛЕММА 2. Пусть

$$x < 4a^2t + \frac{N+2+\alpha+\beta}{2b} \ln \sqrt{\frac{a}{b-a}}, \quad b < 2a, \quad t \geq 0.$$

Тогда для нормы оператора $\mathbf{B}_N$ в пространстве $L_\rho^2(a, b)$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{B}_N\|_\rho \leq 2M\hat{\rho}_0 a^{1+\alpha+\beta} \left(\frac{a}{2a-b}\right)^2 \left(\frac{b-a}{a}\right)^{\frac{N+2+\alpha+\beta}{2}} B(\alpha+1, \beta+1), \quad (3.6)$$

где $\hat{\rho}_0 = \max_{[a, b]} \{\rho_0(k)\}$, $M = \max |D(k, \mu, x, t)|$, а $B(\alpha, \beta)$ — функция Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.3) легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(l, m) \in R^{(N)}} d_{lm}(x, t) (k-a)^l (\mu-a)^m \right| &\leq \\ &\leq M \frac{1}{1 - \frac{\mu-a}{a}} \frac{1}{1 - \frac{k-a}{a}} \left[\left(\frac{k-a}{a}\right)^{N+1} + \left(\frac{\mu-a}{a}\right)^{N+1} \right] \leq \\ &\leq 2M \left(\frac{a}{2a-b}\right)^2 \left(\frac{b-a}{a}\right)^{N+1}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где в силу предположения, что $b < 2a$, отношение $(b-a)/a$ строго меньше единицы. Тогда для нормы оператора $\mathbf{B}_N$ в пространстве $L_\rho^2(a, b)$ имеем

$$\|\mathbf{B}_N\|_\rho^2 \leq 4M^2 \hat{\rho}_0^2 \left(\int_a^b e^{2k\xi} e^{-8kt(k^2-a^2)} (b-k)^\beta (k-a)^\alpha dk \right)^2 \left(\frac{a}{2a-b}\right)^4 \left(\frac{b-a}{a}\right)^{2(N+1)},$$

где $\xi = x - 4a^2t$. Интеграл J , входящий в это выражение, легко оценить:

$$\begin{aligned} J &\leq \int_a^b e^{2k\xi} (b-k)^\beta (k-a)^\alpha dk \leq e^{p(\xi)} \int_a^b (b-k)^\beta (k-a)^\alpha dk = \\ &= e^{p(\xi)} (b-a)^{1+\alpha+\beta} \int_0^1 s^\beta (1-s)^\alpha ds = e^{p(\xi)} (b-a)^{1+\alpha+\beta} B(1+\alpha, 1+\beta), \end{aligned}$$

где $B(1+\alpha, 1+\beta)$ — функция Эйлера, а $p(\xi) = (b+a)\xi + (b-a)|\xi|$. Поэтому

$$\|\mathbf{B}_N\|_\rho \leq 2M\hat{\rho}_0^{1+\alpha+\beta} \left(\frac{a}{2a-b}\right)^2 B(1+\alpha, 1+\beta) \left(\frac{b-a}{a}\right)^{N+2+\alpha+\beta} e^{p(\xi)},$$

и так как для $\xi < ((N+2+\alpha+\beta)/2b) \ln \sqrt{a/(b-a)}$ выполняется

$$e^{p(\xi)} < e^{2b\xi} < \left(\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{N+2+\alpha+\beta}{2}},$$

то получим неравенство (3.6). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 2 показывает, что решение исходной задачи (1.1), (1.2) можно эффективно моделировать при любом $t > 0$ в интервале

$$\left(-\infty, 4a^2t + \frac{N+2+\alpha+\beta}{4b} \ln \sqrt{\frac{a}{b-a}}\right)$$

путем решения системы линейных алгебраических уравнений, если произвольно выбранное число N достаточно велико. В случае же, когда t неограниченно возрастает, возникают два дополнительных преимущества этого подхода. Удастся, во-первых, построить в замкнутом виде асимптотику решения задачи Коши при $t \rightarrow \infty$ и, во-вторых, расширить область применимости полученных асимптотических формул, так что

$$x \in \left(-\infty, 4a^2t + \frac{1}{2a} \ln t^{N+1+\alpha}\right).$$

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОСНОВНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для построения асимптотики ядра (1.8) при $t \rightarrow \infty$ необходимо напомнить асимптотику решения Йоста $h(x, t, ik)$ (2.7) при $k \in [a, b]$. Из равенства (2.3) после применения преобразования Фурье следует, что при $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $h(x, t, \lambda)$ удовлетворяет сингулярному интегральному уравнению

$$\overline{h(x, t, \lambda)} = e^{i\lambda x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\mu)}{\mu - \lambda + i0} e^{-i(\mu-\lambda)x - 8i\mu^3 t} h(x, t, \mu) d\mu,$$

а при $\lambda = ik$, $k \in [a, b]$, функция $h(x, t, \lambda)$ представима в виде

$$h(x, t, ik) = e^{kx} \left[1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\mu)}{\mu + ik} e^{-i\mu x - 8i\mu^3 t} h(x, t, \mu) d\mu \right]$$

в силу ее аналитичности при $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Асимптотика функции $h(x, t, \lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ и $t \rightarrow \infty$ хорошо известна [7], [8]. Следуя [7], найдем, что при $|\lambda - k_{st}^{\pm}| > t^{-1/4}$ ($k_{st}^{\pm} = \pm\sqrt{-X}$, $X = x/12t$) справедливо представление

$$h(x, t, \lambda) = A(\lambda, X) e^{-i\lambda x} + B(\lambda, X) e^{i\lambda x + 8i\lambda^3 t} + O(t^{-\frac{1}{4}}),$$

где

$$B(\lambda, X) = -\overline{r(\lambda)A(\lambda, X)}\theta(k^2 + X)$$

и

$$A(\lambda, X) = \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln[1 - |r(\mu)|^2 \theta(\mu^2 + X)]}{\mu - \lambda - i0} d\mu \right\}.$$

Здесь θ есть функция Хевисайда, т.е. $\theta(k) \equiv 1$ для $k > 0$ и $\theta(k) \equiv 0$ для $k < 0$. Из ограниченности функции $h(x, t, \lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ и последних формул легко получить, что

$$h(x, t, ik) = e^{kx} \left[1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|r(\mu)|^2 \overline{A(\mu, X)} \theta(\mu^2 + X)}{\mu + ik} d\mu + \delta(x, t, k) \right],$$

где функция $\delta(x, t, k)$ при $t \rightarrow \infty$ удовлетворяет оценке $|\delta(x, t, k)| \leq Ct^{-1/4}$ для $k \in [a, b]$ и $x \in \mathbb{R}$. Отсюда для функции $\hat{h}(x, t, k) = h(x, t, ik)e^{-4k^3t}$ получаем

$$\hat{h}(x, t, k) = e^{k[x-4k^2t+\eta(k, X)]}[1 + \delta(x, t, k)],$$

где

$$\eta(k, X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln[1 - |r(\mu)|^2 \theta(\mu^2 + X)]}{\mu^2 + k^2} d\mu, \quad (4.1)$$

а функция $r(k)$ — коэффициент отражения. Функция $\hat{\delta}(x, t, k)$ оценивается так же, как и функция $\delta(x, t, k)$: $|\hat{\delta}(x, t, k)| \leq Ct^{-1/4}$. Используя формулу (1.8), окончательно находим, что справедливо равенство

$$A(k, \mu, x, t) = e^{(k+\mu)x-4(k^3+\mu^3)t+k\eta(k, X)+\mu\eta(\mu, X)} \left[\frac{1}{k+\mu} + \Delta(k, \mu, x, t) \right] \quad (4.2)$$

с оценкой

$$|\Delta(k, \mu, x, t)| \leq Ct^{-\frac{1}{4}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Эта оценка равномерна по переменным $k, \mu \in [a, b]$ и $x \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 3. Пусть $x \in (-\infty, 4a^2t - \sqrt{t})$ и $t \rightarrow \infty$. Тогда решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$u(x, t) = u_r(x, t) + O(e^{-a\sqrt{t}}), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $u_r(x, t) = -2dL(x, t)/dx$ — радиационная составляющая решения, определяемая коэффициентом отражения $r(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Асимптотика функции $u_r(x, t)$ хорошо известна [6]–[9]. Ее наихудшее убывание по t имеет порядок $O(t^{-1/2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Поскольку $\eta(k, X) \leq 0$, а $\hat{\delta}(x, t, k) = O(t^{-1/4})$, то в рассматриваемой области выполняется $|\hat{h}(x, t, k)| \leq 2e^{-a\sqrt{t}}$, если t достаточно велико. Следовательно, справедливы оценки

$$\|\hat{h}\|_{\rho}^2 \leq 4(b-a)M_{\rho}e^{-2a\sqrt{t}}, \quad M_{\rho} = \max_{[a, b]} \rho(k),$$

и

$$|A(k, \mu, x, t)| \leq \frac{2}{a}e^{-2a\sqrt{t}}.$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\|\psi\|_{\rho} \leq \|\hat{h}\|_{\rho} \leq 2e^{-a\sqrt{t}}.$$

Чтобы воспользоваться формулой (1.6), нужно получить оценки для производных по x от функций $\hat{h}(x, t, k)$ и $\psi(x, t, k)$. Для оценки $\hat{h}'_x(x, t, k)$ воспользуемся уравнением Штурма–Лиувилля и запишем равенство

$$\hat{h}'_x(x, t, k) = \int_{-\infty}^x [k^2 + u_r(y, t)] \hat{h}(y, t, k) dy,$$

которое при $t \rightarrow \infty$ влечет неравенство

$$|\hat{h}'_x(x, t, k)| \leq 2 \left(k + \frac{1}{k} \right) e^{-a\sqrt{t}}.$$

В силу интегрального уравнения (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \psi'_x(x, t, k) &= \hat{h}'_x(x, t, k) - \int_a^b A(k, \mu, x, t) \psi'_x(x, t, \mu) \rho(\mu) d\mu - \\ &- \int_a^b \hat{h}(x, t, k) h(x, t, \mu) \psi(x, t, \mu) \rho(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Учитывая оценки для функций $\hat{h}(x, t, k)$, $\hat{h}'_x(x, t, k)$ и $A(k, \mu, x, t)$, полученные выше, из представления (1.6) найдем, что при $t \rightarrow \infty$

$$u(x, t) - u_r(x, t) = O(e^{-a\sqrt{t}})$$

равномерно по $x \in (-\infty, 4a^2t - \sqrt{t})$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению области тех x , для которых

$$4a^2t - 2\sqrt{t} < x < 4a^2t + \frac{1}{2a} \ln t^{N+1+\alpha}.$$

Здесь будет доказано, что интегральный оператор $\mathbf{A}$ (4.2) при $t \rightarrow \infty$ представляет собой сумму конечномерного (3.4) и малого (3.5) по норме пространства $L^2_\rho(a, b)$ операторов. Действительно, для функции $A(k, \mu, x, t)$ (3.2) было доказано, что она при $t \rightarrow \infty$ допускает представление (4.2) с оценкой (4.3). Поэтому коэффициенты $d_{lm}(x, t)$ операторов (3.4) и (3.5) имеют вид

$$d_{lm}(x, t) = C_{lm} + \Delta_{lm}(x, t),$$

где числа

$$C_{lm} = (-1)^{l+m} \frac{(l+m)!}{l!m!} \frac{1}{(2a)^{l+m+1}}$$

являются коэффициентами Тейлора функции $(k + \mu)^{-1}$, а

$$|\Delta_{lm}(x, t)| \leq \frac{M}{a^{l+m} t^{\frac{1}{4}}}. \quad (4.4)$$

Поскольку в рассматриваемой области $X > 0$, то функция $\eta(k, X)$ (4.1) не зависит от X ($\theta(k^2 + X) \equiv 1$). Тогда $\eta(k, X) \equiv \eta_0(k)$ для $X > 0$.

Вводя обозначение

$$E(k, x, t) = e^{k[x - 4k^2t + \eta_0(k)]}$$

и используя неравенство типа (3.7)

$$\left| \sum_{(l,m) \in R^{(N)}} d_{lm}(x,t) (k-a)^l (\mu-a)^m \right| \leq M(t) \left(\frac{a}{2a-b} \right)^2 \left[\left(\frac{k-a}{a} \right)^{N+1} + \left(\frac{\mu-a}{a} \right)^{N+1} \right],$$

где

$$M(t) = \frac{1}{2a} + O(t^{-\frac{1}{4}}),$$

можно записать, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}_N\|_\rho^2 &\leq \int_a^b \int_a^b E^2(k, x, t) E^2(\mu, x, t) 2M^2 \left(\frac{a}{2a-b} \right)^4 \times \\ &\times \left[\left(\frac{k-a}{a} \right)^{2(N+1)} + \left(\frac{\mu-a}{a} \right)^{2(N+1)} \right] \rho(k) \rho(\mu) dk d\mu, \end{aligned}$$

или иначе

$$\|\mathbf{B}_N\|_\rho^2 \leq 4 \left(1 + \frac{1}{2a} \right)^2 \left(\frac{a}{2a-b} \right)^4 \frac{1}{a^{2(N+1)}} I_0(x, t) I_{2N+2}(x, t), \quad (4.5)$$

где функции $I_m(x, t)$ определены в (1.11).

ЛЕММА 4. Интегралы $I_m(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и $\xi = x - 4a^2 t < \sqrt{t}$ имеют следующее представление:

$$I_m(x, t) = \frac{\rho_1}{(4a^2)^{2(m+\alpha+1)}} \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{t^{m+\alpha+1}} e^{2a\xi} + \delta_m(t, \xi),$$

где $\rho_1 = \rho_0(a)(b-a)^\beta e^{2a\eta_0(a)}$, а $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. Функции $\delta_m(t, \xi)$ допускают оценки

$$|\delta_m(t, \xi)| \leq \frac{\Gamma(m+\alpha+2) M_1^{m+\alpha+2}}{t^{m+\alpha+\frac{3}{2}}} e^{p(\xi)}$$

с постоянной M_1 , не зависящей от ξ , но зависящей от параметров исходной задачи.

Доказательство этой леммы можно найти в [15], [16].

Применяя эту лемму к оценке (4.5) для оператора $\mathbf{B}_N$, найдем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}_N\|_\rho &\leq 2 \left(1 + \frac{1}{2a} \right) \left(\frac{a}{2a-b} \right)^2 \frac{1}{a^{N+1}} \sqrt{I_0(x, t) I_{2N+2}(x, t)} \leq \\ &\leq 4 \left(1 + \frac{1}{2a} \right) \left(\frac{a}{2a-b} \right)^2 \frac{1}{a^{N+1}} \frac{\rho_1 e^{2a\xi}}{t^{N+\alpha+2}} \frac{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2N+\alpha+3)}}{(4a)^{2N+2\alpha+4}} \leq K_N, \end{aligned}$$

если $2a\xi < \ln t^{N+\alpha+1}$. Таким образом, норма оператора $\mathbf{B}_N$ в пространстве $L_\rho^2(a, b)$ мала при $t \rightarrow \infty$. Конечномерный оператор $\mathbf{A}_N$ (3.4) отличается от соответствующего вырожденного оператора $\mathbf{A}_N$ из работ [15], [16] тем, что коэффициенты C_{lm} следует заменить на $C_{lm} + \Delta_{lm}(x, t)$, где для функций $\Delta_{lm}(x, t)$ справедлива оценка (4.4), а весовая функция $\rho(k)$ приобретает дополнительный множитель $e^{2k\eta_0(k)}$, т.е. $\hat{\rho}(k) = \rho(k)e^{2k\eta_0(k)}$. Поэтому завершение доказательств теорем 1 и 2 почти не отличается от приведенного в работе [16].

Наличие экспоненциального множителя $e^{2k\eta_0(k)}$ у весовой функции $\hat{\rho}(k)$ приводит к дополнительному, в сравнении с безотражательным случаем, сдвигу фаз асимптотических солитонов, обусловленных ненулевым коэффициентом отражения.

Список литературы

- [1] *C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [2] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
- [3] *А. Б. Шабат.* ДАН СССР. 1973. Т. 211. С. 1310.
- [4] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [5] *M. Ablowitz, H. Segur.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
- [6] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков.* ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 203.
- [7] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [8] *В. С. Буслаев, В. В. Суханов.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1982. Т. 120. С. 31; 1982. Т. 138. С. 8; Пробл. мат. физ. 1982. Т. 10. С. 70; 1986. Т. 11. С. 78.
- [9] *P. Deift, X. Zhou.* Asymptotics for the Painlevé II equation: Announcement and results. In: Spectral Scattering Theory and Applications. Proc. of a Conference on Spectral and Scattering Theory Held at Tokyo Institute of Technology (June 30–July 3, 1992) Adv. Stud. Pure Math. V. 23. Ed. K. Yajima. Tokyo: Kinokuniya Company Ltd, 1994. P. 17.
- [10] *Е. Я. Хруслов.* Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. № 8. С. 469.
- [11] *В. П. Котляров, Е. Я. Хруслов.* ТМФ. 1986. Т. 68. № 2. С. 172.
- [12] *Е. Ya. Khruslov, V. P. Kotlyarov.* Soliton asymptotics of nondecreasing solutions of nonlinear completely integrable evolution equations. In: Spectral Operator Theory and Related Topics. Adv. Sov. Math. V. 19. Ed. V. A. Marchenko. Providence, RI: AMS, 1994. P. 129.
- [13] *А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский.* Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17. № 5. С. 268.
- [14] *Е. Я. Хруслов.* Матем. сб. 1976. Т. 99. № 2. С. 261.
- [15] *Е. Ya. Khruslov, S. Holger.* Мат. физика, анализ, геометрия. 1998. № 1/2. С. 49.
- [16] *В. Б. Баранецкий.* Мат. физика, анализ, геометрия. 1999. № 3/4. С. 199.
- [17] *В. А. Марченко.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

Поступила в редакцию 23.VI.2000 г.