Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. З. Даутов, М. Д. Миссаров, Симметрии и циклы ренормализационной группы в фермионной иерархической модели, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 2, 238–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf428>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 17:26:32

СИММЕТРИИ И ЦИКЛЫ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Исследуются особые точки и некоторые симметрии отображения ренормализационной группы в фермионной иерархической модели. Обнаружено, что из сингулярной точки ренормгруппы при значении параметра ренормгруппы $\alpha = 1$ рождаются циклы этого отображения различной длины.

Фермионный аналог иерархической модели Дайсона можно рассматривать как модель, точно решаемую методом ренормализационной группы (РГ). В работах [1]–[4] мы описали явно все неподвижные точки, глобальное поведение потока РГ и устойчивых РГ-инвариантных кривых, что позволило решить проблему термодинамического предела для ряда областей пространства констант связи и описать нетривиальную картину критических явлений в этой модели. В настоящей статье мы исследуем особые точки и некоторые симметрии РГ-преобразования и изучаем вопрос о существовании циклов.

Напомним основные определения. Иерархическая решетка задана как множество натуральных чисел N с иерархическим расстоянием $d(i, j)$, $i, j \in N$, где $d(i, j) = n^{s(i, j)}$, если $i \neq j$; $s(i, j) = \min\{s: \text{существует } k \text{ такое, что } i \in V_{k, s}, j \in V_{k, s}\}$; $V_{k, s} = \{j: j \in N, (k-1)n^s < j \leq kn^s\}$; n – некоторое фиксированное натуральное число. В узлах этой решетки находятся четырехкомпонентные спинны $\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i))$, компоненты которых являются образующими алгебры Грассмана. Пусть грассманово-значная “плотность” свободной меры задается выражением

$$f(\psi^*; c) = c_0 + c_1(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + c_2\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2,$$

$c = (c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$. Определим фермионное поле в объеме $\Lambda_N \equiv V_{1, N}$ как гиббсовское состояние $\rho_N(\alpha; c)$ (α – вещественный параметр) на грассмановой подалгебре A_N , порожденной $4 \cdot n^N$ образующими $(\psi_1(i), \bar{\psi}_1(i), \psi_2(i), \bar{\psi}_2(i))$, $i \in \Lambda_N$: если $F(\psi^*) \in A_N$,

*Казанский государственный университет, Казань, Россия. E-mail: rdautov@ksu.ru, Moukadas.Missarov@ksu.ru.

то

$$\rho_N(\alpha; c)(F(\psi^*)) = Z_N^{-1}(\alpha; c) \int F(\psi^*) \exp\{-H_{0,N}(\psi^*; \alpha)\} \prod_{i \in \Lambda_N} f(\psi^*(i); c) d\psi^*(i),$$

где

$$\begin{aligned} d\psi^*(i) &= d\psi_1(i) d\bar{\psi}_1(i) d\psi_2(i) d\bar{\psi}_2(i), \\ H_{0,N}(\psi^*; \alpha) &= \sum_{i,j \in \Lambda_N} d_{0,N}(i, j) (\bar{\psi}_1(i)\psi_1(j) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(j)), \\ d_{0,N}(i, j) &= b_1 d^{-\alpha}(i, j) - b_2, \end{aligned}$$

b_1, b_2 — некоторые нормировочные константы, зависящие от α, n, N (см. [4]),

$$Z_N(\alpha; c) = \int \exp\{-H_{0,N}(\psi^*; \alpha)\} \prod_{i \in \Lambda_N} f(\psi^*(i); c) d\psi^*(i).$$

Интегрирование ведется по обычным правилам суперанализа [5]. В работах [1]–[4] мы рассматривали плотности вида

$$\begin{aligned} f(\psi^*) &= \exp\{-L(\psi^*; r, g)\}, \\ L(\psi^*(i); r, g) &= r(\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)) + g\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i)\bar{\psi}_2(i)\psi_2(i), \end{aligned}$$

соответствующее гиббсовское состояние обозначалось $\rho_N(\alpha; r, g)$. Если $c_0 \neq 0$, то связь между координатами r, g и c задается формулами

$$r(c) = -\frac{c_1}{c_0}, \quad g(c) = \frac{c_1^2 - c_0 c_2}{c_0^2}.$$

Если $c_0 = 0$, как, например, в случае, когда плотность задается грассмановой δ -функцией $\delta(\psi^*) = \bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2$, экспоненциальное представление невозможно.

Естественно трактовать набор (c_0, c_1, c_2) как точку 2-мерного вещественного проективного пространства $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, поскольку два набора, отличающиеся друг от друга ненулевым множителем, задают одно и то же состояние.

РГ-преобразование Вильсона определяется по формуле

$$r(\alpha)\psi^*(i) = n^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi^*(j).$$

Если ρ — состояние на A_N , то ренормированное состояние ρ' определено на A_{N-1} формулой

$$\rho'(F(\psi^{*'})) = \rho(F(r(\alpha)\psi^*)).$$

В [1] было показано, что

$$\begin{aligned} \rho_N(\alpha; r, g)(F(r(\alpha)\psi^*)) &= \rho_{N-1}(r', g')(F(\psi^*)), \\ r' &= \lambda \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} (r+1) - 1 \right), \quad g' = \frac{\lambda^2}{n} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - g/n} \right)^2 g, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda = n^{\alpha-1}$. Рассуждая так же, как в [1], можно показать, что

$$\rho'_N(\alpha; c) = \rho_{N-1}(\alpha; R(\alpha)c), \quad (2)$$

где РГ-отображение $R(\alpha)$ задано формулами

$$\begin{aligned} R(\alpha)(c_0, c_1, c_2) &= (c'_0, c'_1, c'_2), \\ c'_0 &= n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2} \left((c_1 - c_0)^2 + \frac{1}{n}(c_0c_2 - c_1^2) \right), \\ c'_1 &= \lambda n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2} \left((c_1 - c_0)(c_2 - c_1) + \frac{1}{n}(c_0c_2 - c_1^2) \right), \\ c'_2 &= \lambda^2 n^2(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2} \left((c_2 - c_1)^2 + \frac{1}{n}(c_0c_2 - c_1^2) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Если $c_2 - 2c_1 + c_0 \neq 0$, то мы можем опустить этот множитель в формулах (3), поскольку речь идет о преобразовании в проективном пространстве.

Отметим, что хотя отображение (1) не определено в точках критической параболы $g = n(r+1)^2$, формулы РГ-преобразования в c -пространстве (3) позволяют доопределить его. Действительно, точка (r, g) этой параболы в c -координатах записывается как точка $(1, -r, r^2 - n(r+1)^2)$, которая при РГ-преобразовании переходит в точку $(0, 1, (n-1)(r+(n+1)(n-1)^{-1}))$ и, таким образом, выходит из плоскости (r, g) . При дальнейших итерациях РГ эта точка возвращается в плоскость (r, g) . Из соотношений (2), (3) следует, что статистические суммы $Z_N(\alpha; c)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$Z_N(\alpha; c) = (n^{2\alpha+2}(c_2 - 2c_1 + c_0)^{n-2})^{n^{N-1}} Z_{N-1}(\alpha; c').$$

Таким образом,

$$Z_N(\alpha; c) = \prod_{k=0}^{N-1} (n^{2\alpha+2}(c_2^{(k)} - 2c_1^{(k)} + c_0^{(k)})^{n-2})^{n^{N-1-k}} Z_0(\alpha; c^{(N)}),$$

где $c^{(k)} = R^k(\alpha)c$ — k -я РГ-итерация точки $c^{(0)} = c$, отображение $R(\alpha)$ задано формулами (3),

$$\begin{aligned} Z_0(\alpha; c^{(N)}) &= c_2^{(N)} - 2c_1^{(N)}a_0 + c_0^{(N)}a_0^2, \\ a_0 &= d_{0,0}(1, 1) = \frac{1 - n^{\alpha-2}}{1 - n^{-1}}. \end{aligned}$$

Множители вида $c_2^{(k)} - 2c_1^{(k)} + c_0^{(k)}$ могут обращаться в нуль, что при $n > 2$ приводит к некорректности определения состояния $\rho_N(\alpha; c)$. Поэтому мы будем исключать из проективной плоскости $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ множество

$$K = \bigcup_{l=0}^{\infty} K_l,$$

где

$$\begin{aligned} K_0 &= \{(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^2 : c_2 - 2c_1 + c_0 = 0\}, \\ K_l &= \{(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^2 : R(\alpha)(c_0, c_1, c_2) \in K_{l-1}\}, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Кроме того, когда речь идет о состоянии $\rho_N(\alpha; c)$, надо предполагать, что $Z_0(\alpha; c^{(N)}) \neq 0$.

Заметим, что в (r, g) -координатах множеству K_0 соответствует парабола $g = (r+1)^2$.

Само отображение $R(\alpha)$ как отображение из $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ корректно определено всюду, кроме точки $(1, 1, 1)$, поскольку $R(\alpha)(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. В (r, g) -плоскости она задается координатами $(-1, 0)$. Эту точку мы будем называть сингулярной точкой РГ-отображения.

Вычисления показывают, что отображение $R(\alpha)$ обратимо на множестве $\mathbb{P}\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{K}_0$, где

$$\tilde{K}_0 = \{(c'_0, c'_1, c'_2) \in \mathbb{P}\mathbb{R}^2 : c'_0 - 2\lambda^{-1}c'_1 + \lambda^{-2}c'_2 = 0\},$$

причем обратное отображение $(c_0, c_1, c_2) = R^{-1}(\alpha)(c'_0, c'_1, c'_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} c_0 &= (c'_0 - \lambda^{-1}c'_1)^2 + n\lambda^{-2}(c'_0c'_2 - (c'_1)^2), \\ c_1 &= \lambda^{-1}(c'_0 - \lambda^{-1}c'_1)(c'_1 - \lambda^{-1}c'_2) + n\lambda^{-2}(c'_0c'_2 - (c'_1)^2), \\ c_2 &= \lambda^{-2}(c'_1 - \lambda^{-1}c'_2)^2 + n\lambda^{-2}(c'_0c'_2 - (c'_1)^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Все точки из $\tilde{K}_0$, за исключением точки $(1, \lambda, \lambda^2)$, не имеют прообразов при отображении $R(\alpha)$. Прообразом точки $(1, \lambda, \lambda^2)$ является множество K_0 .

РГ-преобразование $R(\alpha)$, задаваемое формулами (3), имеет четыре неподвижные точки (НТ) $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, -r_+(\alpha), (r_+(\alpha))^2 - g_+(\alpha))$, $(1, -r_-(\alpha), (r_-(\alpha))^2 - g_-(\alpha))$, где

$$r_{\pm}(\alpha) = \frac{\pm n^{\frac{1}{2}} - n^{\alpha-1}}{1 \mp n^{\frac{1}{2}}}, \quad g_{\pm}(\alpha) = n \frac{1 \mp n^{\alpha-\frac{3}{2}}}{1 \mp n^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

Заметим, что при $\alpha = 3/2$ “плюсовая” НТ (НТ₊) бифуркирует от “гауссовой” НТ $(1, 0, 0)$. При $\alpha \rightarrow 1/2$

$$r_+(\alpha) \rightarrow -(1 + n^{-\frac{1}{2}}), \quad g_+(\alpha) \rightarrow \infty,$$

и, таким образом, из c -представления НТ₊ видно, что при $\alpha \rightarrow 1/2$ она стремится к “бесконечно удаленной” НТ (0,0,1). На самом деле при $\alpha = 1/2$ НТ₊ бифурцирует от бесконечно удаленной НТ. Легко видеть, что НТ₊ и НТ₋ (“минусовая” НТ) стремятся к сингулярной точке, когда $\alpha \rightarrow 1$.

При $\alpha = 1$ все точки кривой $c_0 c_2 - c_1^2 = 0$ ($g = 0$), кроме сингулярной точки, являются неподвижными.

Выделенная роль значения $\alpha = 1$ видна также из следующего коммутационного соотношения. Прямым вычислением можно проверить простую формулу для грассманова преобразования Фурье:

$$\int \exp\{-(\bar{\zeta}\eta + \zeta\bar{\eta})\} f(\eta^*; c_0, c_1, c_2) d\eta^* = f(\zeta^*; c_2, c_1, c_0).$$

Поскольку грассманово преобразование Фурье переставляет коэффициенты плотности в обратном порядке, обозначим через F преобразование $(c_0, c_1, c_2) \rightarrow (c_2, c_1, c_0)$ и будем называть его фурье-отображением в c -пространстве.

Прямая проверка показывает справедливость коммутационного соотношения

$$FR(\alpha) = R(2 - \alpha)F.$$

Отсюда следует, что изучение РГ-преобразования при $\alpha < 1$ сводится к изучению этого преобразования при $\alpha > 1$. Заметим, что гауссова НТ и бесконечно удаленная НТ также связаны между собой фурье-преобразованием.

Верхняя (нижняя) полуплоскость $\{(r, g) : g > 0\}$ ($\{(r, g) : g < 0\}$) инвариантна относительно действия РГ. В верхней полуплоскости удобно ввести следующую замену координат:

$$x = n^{\frac{1}{4}} \frac{c_0 - c_1}{\sqrt{c_1^2 - c_0 c_2}}, \quad y = n^{\frac{1}{4}} \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{c_1^2 - c_0 c_2}}.$$

При этом мы должны отождествлять точки (x, y) и $-(x, y)$. В этих координатах преобразование РГ приобретает наиболее удобный для дальнейших вычислений вид и обнаруживает необычную симметрию. Пусть

$$\varphi(x, y; \lambda, n) = \frac{\sqrt{n} \lambda^{-1} x^2 + xy - (\lambda^{-1} - 1)}{x + y}.$$

Тогда из соотношений (3) и (4) можно вывести, что преобразование РГ в координатах (x, y) имеет вид

$$R(\alpha)(x, y) = (\varphi(x, y; \lambda, n), \varphi(y, x; \lambda^{-1}, n)),$$

а обратное к нему —

$$R^{-1}(\alpha)(x, y) = (\varphi(x, y; \lambda^{-1}, n^{-1}), \varphi(y, x; \lambda, n^{-1})).$$

В нижней полуплоскости замена

$$x = n^{\frac{1}{4}} \frac{c_0 - c_1}{\sqrt{c_0 c_2 - c_1^2}}, \quad y = n^{\frac{1}{4}} \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{c_0 c_2 - c_1^2}}$$

приводит к аналогичным соотношениям, при этом функция $\varphi(x, y; \lambda, n)$ должна быть заменена на функцию

$$\varphi_1(x, y; \lambda, n) = \frac{\sqrt{n} \lambda^{-1} x^2 + xy + (\lambda^{-1} - 1)}{x + y}.$$

Как показывает анализ, HT_+ находится в нижней полуплоскости при $1/2 < \alpha < 3/2$, но циклов РГ-преобразования в ней нет. Обратимся к случаю верхней полуплоскости. Пусть $R^k(\alpha)(x, y) = (x^{(k)}, y^{(k)})$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Условия вида $x^{(k)} + y^{(k)} \neq 0$ эквивалентны условиям $c_0^{(k)} - 2c_1^{(k)} + c_2^{(k)} \neq 0$, которые мы считаем выполненными. Неподвижные точки ищутся из уравнений

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (x, y), \quad (x^{(1)}, y^{(1)}) = -(x, y).$$

Первое из них имеет решение при $\alpha > 3/2$ и $\alpha < 1/2$ и приводит к HT_+ . Второе имеет решение при всех α и приводит к HT_- . Условие на цикл длины 2 также сводится к двум уравнениям

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (x^{(-1)}, y^{(-1)}), \quad (x^{(1)}, y^{(1)}) = -(x^{(-1)}, y^{(-1)}).$$

Решение первого из них приводит к HT_+ и HT_- . Второе уравнение имеет 2 решения (a_+, b_+) и (a_-, b_-) , которые и задают точки цикла длины 2:

$$a_{\pm} = \frac{n^{-\frac{1}{4}}}{\lambda^{\frac{1}{2}} + \lambda^{-\frac{1}{2}}} \left(n\lambda + \lambda^{-1} \mp (n+1) \left(\frac{n\lambda + \lambda^{-1}}{n\lambda^{-1} + \lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$b_{\pm} = \pm \frac{n^{-\frac{1}{4}}}{\lambda^{\frac{1}{2}} + \lambda^{-\frac{1}{2}}} \left(n\lambda^{-1} + \lambda \mp (n+1) \left(\frac{n\lambda^{-1} + \lambda}{n\lambda + \lambda^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Несложно видеть, что в (r, g) -координатах точки цикла длины 2 стремятся к сингулярной точке $(-1, 0)$ при $\alpha \rightarrow 1$.

Точки циклов длины 3 и 4 находим из уравнений

$$(x^{(2)}, y^{(2)}) = (x^{(-1)}, y^{(-1)}), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = -(x^{(-1)}, y^{(-1)}), \quad (5)$$

$$(x^{(2)}, y^{(2)}) = (x^{(-2)}, y^{(-2)}), \quad (x^{(2)}, y^{(2)}) = -(x^{(-2)}, y^{(-2)}). \quad (6)$$

Эти уравнения уже не решаются явно, и для их анализа мы используем пакет “MatLab” версии 5.3. Обнаружено, что каждое из уравнений (5) дает по одному циклу длины 3. Приближенные решения первого из них в (r, g) -координатах для трех различных значений α при $n = 4$ указаны в табл. 1

Таблица 1

Цикл длины 3

$\alpha = 1.1$		$\alpha = 1.01$		$\alpha = 1.001$	
r	g	r	g	r	g
-1.2170	0.0609	-1.0178	$4.3524 \cdot 10^{-4}$	-1.0018	$4.2168 \cdot 10^{-4}$
-1.04085	0.0038	-1.0038	$0.3498 \cdot 10^{-4}$	-1.0004	$0.3474 \cdot 10^{-4}$
-1.0140	0.0102	-1.0009	$1.0037 \cdot 10^{-4}$	-1.0001	$1.0021 \cdot 10^{-6}$

Первое из уравнений (6) для циклов длины 4 дает один цикл, а второе – два цикла, один из которых приведен в табл. 2 для трех различных значений α при $n = 4$. Все циклы наблюдаются при различных значениях α и n , и их существование подтверждается также картинами линий уровня функций, задающих соответствующие уравнения. Эксперименты показывают также наличие нескольких циклов длины 5. Как видно из таблиц, точки циклов стремятся к сингулярной точке $(-1, 0)$, когда $\alpha \rightarrow 1$, и это наблюдение справедливо для всех найденных циклов. Можно высказать гипотезу о том, что для нашего отображения из сингулярной точки при $\alpha = 1$ рождаются точки циклов произвольной длины. Мы не употребляем здесь термина “бифуркация”, поскольку не видим объяснения этого явления в рамках элементарной теории бифуркаций.

Таблица 2

Цикл длины 4

$\alpha = 1.1$		$\alpha = 1.01$		$\alpha = 1.001$	
r	g	r	g	r	g
-0.5519	0.1481	-0.9333	$3.6123 \cdot 10^{-3}$	-0.9929	$4.0824 \cdot 10^{-5}$
-0.9829	0.0051	-0.9980	$0.0515 \cdot 10^{-3}$	-0.9998	$0.0517 \cdot 10^{-5}$
-1.0525	0.0401	-1.0034	$0.3722 \cdot 10^{-3}$	-1.0003	$0.3700 \cdot 10^{-5}$
-1.4581	0.3490	-1.0290	$1.8621 \cdot 10^{-3}$	-1.0028	$1.7698 \cdot 10^{-5}$

Термодинамический предел в фермионной иерархической модели существует, если все корреляционные функции имеют предел при $N \rightarrow \infty$. В иерархических моделях

произвольные корреляционные функции можно выразить через одночастичные корреляционные функции. В $(\bar{\psi}\psi)^2$ -модели таковыми являются следующие корреляционные функции:

$$u_N^1(r, g) = \rho_N(\alpha; r, g) (\psi_1(i) \bar{\psi}_1(i) + \psi_2(i) \bar{\psi}_2(i)) = \frac{1}{2} \rho_N(\psi_1(i) \bar{\psi}_1(i))$$

и

$$u_N^2(r, g) = \rho_N(\alpha; r, g) (-\psi_1(i) \bar{\psi}_1(i) \psi_2(i) \bar{\psi}_2(i)),$$

$i \in \Lambda_N$ (u^1 и u^2 не зависят от выбора i). Пусть

$$u_N(r, g) = \begin{pmatrix} u_N^1(r, g) \\ u_N^2(r, g) \end{pmatrix}.$$

Для вектора $u_N(r, g)$ справедливо представление (см. [4])

$$u_N(r, g) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i(r, g) + v_N(r, g), \quad (7)$$

здесь

$$\begin{aligned} h_i(r, g) &= A(r, g) \cdot \dots \cdot A(r^{(i-1)}, g^{(i-1)}) s(r^{(i)}, g^{(i)}), \\ v_N(r, g) &= A(r, g) \cdot \dots \cdot A(r^{(N-1)}, g^{(N-1)}) u_0(r^{(N)}, g^{(N)}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A(r, g) &= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial r} & \frac{\partial g'}{\partial r} \\ \frac{\partial r'}{\partial g} & \frac{\partial g'}{\partial g} \end{pmatrix}, \quad s(r, g) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln C(r, g)}{\partial r} \\ \frac{\partial \ln C(r, g)}{\partial g} \end{pmatrix}, \\ C(r, g) &= n^2 ((r+1)^2 - g)^{n-2} \left((r+1)^2 - \frac{g}{n} \right). \end{aligned}$$

Пусть точки $(r, g), (r^{(1)}, g^{(1)}), \dots, (r^{(k-1)}, g^{(k-1)})$ образуют цикл РГ-преобразования длины k . Из представления (7) видно, что термодинамический предел в модели, задаваемой набором констант связи (r, g) , существует тогда и только тогда, когда спектральный радиус матрицы

$$B(r, g) = A(r, g) A(r^{(1)}, g^{(1)}) \dots A(r^{(k-1)}, g^{(k-1)})$$

меньше 1. Эксперименты показывают, что для всех найденных циклов и $1 < \alpha < 2$ существуют значения n , начиная с которых спектральный радиус соответствующих матриц $B(r, g)$ меньше 1. В частности, на рисунке изображена область в пространстве параметров n и α , для которой существует термодинамический предел в модели, задаваемой

точкой цикла длины 2. В случае цикла длины 2 матрица $A(r, g)$ явно вычисляется, ряд для $u(r, g) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(r, g)$ суммируется и мероморфно зависит от α . В этом случае корреляционные функции $u(r, g)$ определены и для тех значений α , для которых спектральный радиус матрицы $B(r, g)$ больше 1.

В заключение заметим, что было бы интересно выяснить, какие из обнаруженных симметрий и динамических явлений сохраняются в случае бозонной иерархической модели.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00467).

Список литературы

- [1] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805–817.
- [2] *Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1996. Т. 107. № 2. С. 201–212.
- [3] *М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1998. Т. 114. № 3. С. 323–336.
- [4] *М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1998. Т. 117. № 3. С. 471–488.
- [5] *Ф. А. Березин.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 21.VII.2000 г.