Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Павленко, Движение спина релятивистской частицы в поле бегущей волны тока, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 2, 271–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:43:40

ДВИЖЕНИЕ СПИНА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ТОКА

Уравнение Баргмана–Мишеля–Телегди представлено в гамильтоновой форме. Получено решение для заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле, возбуждаемом бегущей волной тока в аксиально-симметричной электродинамической системе.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследования поляризационных эффектов выделились в самостоятельный раздел физики ядра и элементарных частиц. Использование поляризованных частиц дает возможность определить комбинации спиральных амплитуд, необходимые для анализа различных теоретических моделей. Для проверки применимости квантовой электродинамики в области малых передаваемых импульсов принципиальное значение имеет точное измерение аномального магнитного момента электрона $\mu' = (g/2 - 1)\mu_0$, $\mu_0 = e\hbar/2mc$. Динамика поляризации влияет на формирование сфокусированного потока нейтрино, образующихся в распаде мюонов, поскольку направление вылета нейтрино определяется ориентацией спина мюона. Спиновые эффекты играют основную роль в задаче транспортировки и накопления нейтронов в магнитных ловушках.

В нерелятивистской квантовой теории анализ решений уравнения Паули приводит к наглядной физической интерпретации поляризационных явлений. Положение существенно меняется в релятивистской теории. Здесь для исследования спиновых эффектов во внешних полях необходимо вводить сохраняющиеся ковариантные операторы поляризации [1], [2]. Движение среднего значения 4-вектора спина заряженных релятивистских частиц может быть исследовано в результате решения уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) [3]. Этот подход, основанный на квазиклассическом приближении, имеет ограниченную область применимости: волновая функция частицы представляет собой локализованный пакет, движущийся по классической траектории; приращением 4-потенциала на длинах порядка размеров пакета можно пренебречь; напряженности полей малы по сравнению с напряженностью критического поля. Следует также отметить, что в уравнении БМТ не учтена эволюция вектора спина, обусловлен-

* Специализированный учебно-научный центр им. А. Н. Колмогорова, Москва, Россия

ная взаимодействием частицы с полем излучения. В частности, зависимость вероятности переходов от ориентации спина в начальном состоянии приводит к эффекту Соколова–Тернова – самополяризации при излучении релятивистских электронов, движущихся в магнитном поле [4]. В работах [5]–[7] развиты методы, позволяющие учесть реакцию излучения на движения частицы и спина. Для создания пучка поляризованных частиц необходимы анализ деполяризующих факторов, исследование динамики поляризации и решение проблемы управления поляризацией. В работах [8]–[10] предложен новый метод анализа орбитального и спинного движений при прохождении частиц пучка через различные элементы ускорителя. Основой этого метода, позволяющего существенно повысить точность численных расчетов, является операторное представление алгебры Ли.

Точные решения уравнения БМТ получены для частицы в однородном магнитном поле [11], в однородных электрическом и магнитном полях [12], [13], в поле линейно поляризованной волны [13], в суперпозиции скрещенного поля и эллиптически поляризованной волны [14], в поле циркулярно поляризованной волны, распространяющейся вдоль однородного постоянного магнитного поля [14]. В работе [15] получены точные решения уравнения БМТ в случае неоднородных полей в терминах оператора преобразования из системы покоя в лабораторную, зависящего от скорости частицы.

В настоящей работе рассмотрено движение спина заряженной релятивистской частицы в поле волны, возбуждаемой бегущей волной тока в аксиально-симметричной электродинамической системе. Показано, что решение уравнений движения частицы при произвольном способе возбуждения волны определяется решением уравнения осциллятора с переменной частотой. Получено точное решение для частицы в поле бегущей волны скачка плотности тока, представляющего собой скачок продольной компоненты магнитного поля и вихревых поперечных электрического и магнитного полей. Уравнение БМТ преобразовано в уравнение движения 3-вектора постоянной длины, которое в результате замены переменных может быть представлено в гамильтоновой форме. Для этой цели в работе использован подход Швингера [16], [17]. В рамках теории канонических преобразований найдено точное решение уравнения БМТ при движении частицы в рассматриваемом поле бегущей волны. Вектор поляризации частицы представлен в виде преобразования поворота вектора начального состояния.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

4-потенциал электромагнитного поля представим в виде [18]

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2}[(e_{(2)}x)e_{(1)}^\mu - (e_{(1)}x)e_{(2)}^\mu]B(kx), \quad (1)$$

где $x^\mu = (ct, x, y, z)$, $e_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0)$, $e_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0)$, $k^\mu = (\omega/c)n^\mu$, $n^\mu = (1, 0, 0, 1)$, $kx = \omega t - \omega z/c$. Здесь использована метрика $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; скалярное произведение 4-векторов $ab = a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{a}\mathbf{b}$, $a^2 \equiv a^\mu a_\mu$; $B(kx)$ – произвольная функция, удовлетворяющая естественным граничным условиям: $B(kx) \rightarrow B_1$ при $kx \rightarrow -\infty$,

$B(kx) \rightarrow B_2$ при $kx \rightarrow +\infty$, где $B_1, B_2 > B_1$ – постоянные величины. 4-потенциал (1) удовлетворяет волновому уравнению $\partial^\nu \partial_\nu A^\mu = 0$ и условию Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$. Тензор электромагнитного поля

$$F^{\mu\nu} = t^{\mu\nu} B(kx) + \frac{1}{2} [(e_{(1)} x) l^{\mu\nu} - (e_{(2)} x) f^{\mu\nu}] B', \quad (2)$$

где $t^{\mu\nu} = e_{(2)}^\mu e_{(1)}^\nu - e_{(1)}^\mu e_{(2)}^\nu$, $l^{\mu\nu} = e_{(2)}^\mu k^\nu - k^\mu e_{(2)}^\nu$, $f^{\mu\nu} = e_{(1)}^\mu k^\nu - k^\mu e_{(1)}^\nu$, $B' = dB/d(kx)$. Напряженности электрического и магнитного полей соответственно равны $\mathbf{E} = (yk_0 B'/2, -xk_0 B'/2, 0)$, $\mathbf{B} = (xk_0 B'/2, yk_0 B'/2, B)$, $k_0 = \omega/c$. Очевидно, $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$. Векторы напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ представляют собой решения уравнения Максвелла в свободном пространстве. Для получения рассматриваемой конфигурации полей внутри цилиндрической области радиусом ρ_0 необходимо возбудить на поверхности $\rho = \rho_0$ ток плотностью

$$\mathbf{j}(t, x) = \left(-\frac{y}{\rho}, \frac{x}{\rho}, 0\right) cB \left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{4\pi}, \quad \rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что в случае $B = \text{const}$ имеем однородное постоянное магнитное поле в области $\rho < \rho_0$. “Бегущий” аксиальный ток индуцирует вихревые тангенциальное электрическое и радиальное магнитное поля в плоскости, перпендикулярной оси симметрии системы.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Решение релятивистских уравнений движения

$$\ddot{x}^\mu = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu \quad (3)$$

будем искать в виде

$$\dot{x}^\mu = -(e_{(1)} \dot{x}) e_{(1)}^\mu - (e_{(2)} \dot{x}) e_{(2)}^\mu + q_3 n^\mu + q_4 \bar{n}^\mu, \quad (4)$$

где $\bar{n}^\mu = (1, 0, 0, -1)$, $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ – 4-скорость частицы, $\dot{x}^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$, $\gamma = [1 - v^2/c^2]^{-1/2}$. Начальные данные $x^\mu(0) = (0, x_0, y_0, 0)$, $\dot{x}^\mu(0) = u^\mu$, $u^\mu = \gamma_0(c, \mathbf{v}_0)$.

Образую свертку (4) с векторами n и $\bar{n}$, находим $q_3 = \bar{n}\dot{x}/2$, $q_4 = n\dot{x}/2$. Условие $F^{\mu\nu} n_\nu = 0$ приводит к первому интегралу $n\dot{x} = nu$ уравнения (3). Следовательно, $kx = \sigma(\tau)$, $\sigma = kut$, $q_4 = nu/2$. Поскольку $\dot{x}^2 = c^2$, то $q_3 = (c^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2nu$. Учитывая значения $q_3 = (c\dot{t} + \dot{z})/2$, $q_4 = (c\dot{t} - \dot{z})/2$, находим

$$\begin{aligned} c\dot{t} &= \frac{nu}{2} + \frac{1}{2nu} (c^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) = u_0 + \frac{1}{2nu} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - (u_1^2 + u_2^2)], \\ \dot{z} &= -\frac{nu}{2} + \frac{1}{2nu} (c^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2) = u_z + \frac{1}{2nu} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - (u_1^2 + u_2^2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя (4), (2) в (3), получим уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \frac{e}{mc} \left[\dot{y} B(\sigma) + \frac{y}{2} \dot{B}(\sigma) \right] &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{e}{mc} \left[\dot{x} B(\sigma) + \frac{x}{2} \dot{B}(\sigma) \right] &= 0.\end{aligned}\tag{6}$$

Подстановкой

$$x + iy = x_+(\tau), \quad x_+(\tau) = \chi \exp\left(-\frac{i\beta}{2}\right), \quad \beta(\tau) = \frac{e}{mc} \int_{-\infty}^{\tau} d\theta B[\sigma(\theta)],$$

приведем систему (6) к уравнению осциллятора с переменной частотой (или к уравнению типа Шредингера)

$$\ddot{\chi} + \left[\frac{eB(\sigma)}{2mc} \right]^2 \chi = 0\tag{7}$$

с начальным условием $\chi = \exp(-i\omega_1\tau/2)$, $\omega_1 = eB_1/mc$ при $\tau \rightarrow -\infty$.

Пусть $w_{(1)}(\tau)$, $w_{(2)}(\tau)$ — два линейно независимых решения уравнения (7). Тогда общее решение системы (6) имеет вид

$$\begin{aligned}x &= \operatorname{Re} x_+, \quad y = \operatorname{Im} x_+, \\ x_+ &= [Q_1 w_{(1)} + Q_2 w_{(2)}] \exp\left(-\frac{i\beta}{2}\right),\end{aligned}\tag{8}$$

где Q_1, Q_2 — две произвольные комплексные константы. В дальнейшем нас будет интересовать решение уравнения (7) при $\tau \rightarrow \infty$, когда функция $B(\sigma)$ достигает постоянного значения B_2 . В этом случае асимптотику решения можно записать в виде [19]

$$\chi = C_1 \exp\left(-\frac{i\omega_2\tau}{2}\right) + C_2 \exp\left(\frac{i\omega_2\tau}{2}\right), \quad \omega_2 = \frac{eB_2}{mc}.\tag{9}$$

Отметим, что для нахождения коэффициентов C_1 и C_2 можно использовать решения, известные в квантовой механике, поскольку асимптотики соответствуют задаче рассеяния на одномерном потенциале. Величины $1/C_1$ и C_2/C_1 играют роли амплитуд рассеяния вперед и назад для волны, падающей на потенциал справа. Поскольку определитель Вронского пары решений не зависит от τ , то из условия сохранения вронскиана $w_{(1)}\dot{w}_{(2)} - \dot{w}_{(1)}w_{(2)}$ следует соотношение $\omega_1/\omega_2 = |C_1|^2 - |C_2|^2$. Если $1/p$ — характерный масштаб изменения функции $B(\sigma)$, то в адиабатическом случае $|dB(\sigma)/d\tau| \ll pkuB(\sigma)$ отношение $C_2/C_1 \sim \exp(-\pi\omega_1/pku)$, т.е. имеет экспоненциальную малость [19].

4. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ БЕГУЩЕГО СКАЧКА ПЛОТНОСТИ ТОКА

Особый интерес представляет электромагнитное поле (1), для которого функция

$$B^2(\sigma) = \frac{1}{2}(B_1^2 + B_2^2) + \frac{1}{2}(B_2^2 - B_1^2) \operatorname{th}[p(\sigma - \sigma_0)] + \left[\frac{1}{2}B_0 \operatorname{ch}[p(\sigma - \sigma_0)] \right]^2$$

принимает предельные значения B_1^2, B_2^2 и имеет максимум при $B_0^2 > B_2^2 - B_1^2$. Эта функция известна в квантовой механике как потенциал Эккарта [19].

Наибольший интерес представляет случай $pku \gg \omega_1$, соответствующий резкому скачку $B(\sigma)$. Полагая $B_0 = 0$, получим функцию

$$B(\sigma) \approx \begin{cases} B_1, & \sigma < \sigma_0, \\ B_2, & \sigma > \sigma_0. \end{cases}$$

Поскольку на траекториях системы $\sigma - \sigma_0 = ku(\tau - \tau_c)$, $\tau_c = \sigma_0/ku > 0$, то, интегрируя уравнения (6) по малой окрестности точки $\tau = \tau_c$, получим граничные условия – приращения компонент скорости частицы $\Delta \dot{x} = (\omega_2 - \omega_1)y(\tau_c)/2$, $\Delta \dot{y} = -(\omega_2 - \omega_1)x(\tau_c)/2$. В соответствии с (9) два линейно независимых решения уравнения (7) имеют вид

$$w = \begin{cases} w_{(1)} = w, & w_{(2)} = w^*, \\ \left(\frac{2}{\omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{i\omega_1\tau}{2} \right), & \tau \leq \tau_c, \\ \left(\frac{2}{\omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[D \exp \left(-\frac{i\omega_2\tau}{2} \right) + S \exp \left(\frac{i\omega_2\tau}{2} \right) \right], & \tau \geq \tau_c, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$D = D_0 \exp \left(-\frac{i\omega_1\tau_c}{2} + \frac{i\omega_2\tau_c}{2} \right), \quad D_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right), \\ S = S_0 \exp \left(-\frac{i\omega_1\tau_c}{2} - \frac{i\omega_2\tau_c}{2} \right), \quad S_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right).$$

Пусть $x_0 = 0$, $y_0 > 0$, $\mathbf{v}_0 = (v_1, 0, 0)$. Тогда $\dot{x}^\mu(0) = (u_0, u_1, 0, 0)$, $u_1 = u_0 v_1$, $\beta = \omega_1\tau - \beta_0$. Подставляя (10) в (8) и полагая $\tau = 0$, находим

$$\left(\frac{2}{\omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} Q_1 \exp \left(\frac{\beta_0}{2} \right) = iR, \quad \left(\frac{2}{\omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} Q_2 \exp \left(\frac{\beta_0}{2} \right) = i(y_0 - R), \quad R = \frac{u_1}{\omega_1}.$$

В интервале $0 \leq \tau \leq \tau_c$ уравнения траектории имеют вид $x(\tau) = R \sin \omega_1\tau$, $y(\tau) = R \cos \omega_1\tau + (y_0 - R)$, $z(\tau) = 0$. Частица движется по окружности радиуса R , координаты центра $(0, y_0 - R, 0)$. После подстановки соотношения $\beta = \omega_2(\tau - \tau_c) + \omega_1\tau_c - \beta_0$ и (10) в (8) получим решение уравнений (6) в области $\tau \geq \tau_c$:

$$x(\tau) = \operatorname{Re} x_+, \quad y(\tau) = \operatorname{Im} x_+, \\ x_+(\tau) = i[D_0 R \exp(-i\omega_1\tau_c) + S_0(y_0 - R)] \exp[-i\omega_2(\tau - \tau_c)] + \\ + i[S_0 R \exp(-i\omega_1\tau_c) + D_0(y_0 - R)].$$

Полагая $[D_0 R \exp(-i\omega_1 \tau_c) + S_0(y_0 - R)] = R_2 \exp(-i\eta)$, получим компоненты 4-скорости

$$\dot{x}(\tau) = u_2 \cos[\omega_2(\tau - \tau_c) + \eta], \quad \dot{y}(\tau) = -u_2 \sin[\omega_2(\tau - \tau_c) + \eta], \quad (11)$$

где $u_2 = \omega_2 R_2$. Из формул (5) находим значения кинетической энергии $T = mc^2 \dot{t} - mc^2$ и продольного импульса $p_z = m\dot{z}$:

$$c\dot{t} = u_0 + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2u_0}, \quad \dot{z} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2u_0}, \quad (12)$$

z -компонента трехмерной скорости $v_z = (u_2^2 - u_1^2)/[2c + (u_2^2 + u_1^2)/c]$. Частица движется по винтовой линии радиуса R_2 , ось которой находится на расстоянии $r_2 = |S_0 R \exp(-i\omega_1 \tau_c) + D_0(y_0 - R)|$ от оси z . Отметим, что в случае $v_1 = 0$ имеем

$$\dot{x}(\tau) = u_2 \cos \omega_2(\tau - \tau_c), \quad \dot{y}(\tau) = -u_2 \sin \omega_2(\tau - \tau_c), \quad R_2 = S_0 y_0, \quad r_2 = D_0 y_0.$$

В другом частном случае $y_0 = R$ находим

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau) &= u_2 \cos[\omega_2(\tau - \tau_c) + \omega_1 \tau_c], \\ \dot{y}(\tau) &= -u_2 \sin[\omega_2(\tau - \tau_c) + \omega_1 \tau_c], \quad R_2 = D_0 R, \quad r_2 = S_0 R. \end{aligned}$$

Пусть $u_2 \gg u_1$, $u_1 \ll c$. Тогда $\dot{t} \approx 1 + (1/2)(u_2/c)^2$, $\dot{z} \approx u_2^2/2c$, кинетическая энергия частицы $T \approx mu_2^2/2$, продольная и поперечная компоненты трехмерной скорости частицы $v_z \approx (u_2^2/c)[2 + (u_2/c)^2]^{-1}$, $(v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \approx 2u_2[2 + (u_2/c)^2]^{-1}$. После прохождения скачка магнитного поля z -компонента скорости и энергия частицы возрастают.

Отметим, что при движении частицы в аксиально-симметричном неоднородном поле, задаваемом 4-потенциалом типа (1)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= [(e_{(2)}x)e_{(1)}^\mu - (e_{(1)}x)e_{(2)}^\mu]G, \\ G(\rho, kx) &= \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho d\rho' \rho' B(\rho', kx), \quad \rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

появляется возможность реализации “бетатронно-волнового” механизма ускорения. Действительно, в бетатроне $B(\rho, \omega t)$ — убывающая функция ρ , которая соответствует полю, обеспечивающему радиальную фокусировку частиц. Функция $G(R, \sigma)$ связана с полным потоком магнитной индукции через площадь, ограниченную окружностью радиуса R , соотношением $\Phi(\sigma) = 2\pi R^2 G(R, \sigma)$. Если выполняется аналог “бетатронного правила” $\Phi(\sigma_m) = 2\pi R^2 B(R, \sigma_m)$, $\sigma_m = \omega \tau_m$, то в цикле ускорения $(0, \tau_m)$ частица движется по цилиндрической поверхности постоянного радиуса. Кинетическая энергия в конце цикла ускорения $T_m = T(\tau_m)$, $T_m = (eRB_m)^2/2mc^2$, или $T_m(\text{ГэВ}) = 45[R(\text{м})B_m(\text{Тл})]^2/2mc^2(\text{МэВ})$. Отметим, что в случае обычного бетатронного ускорения кинетическая энергия $T_m = [(mc^2)^2 + (eB_m R)^2]^{1/2} - mc^2$, или $T_m(\text{МэВ}) \approx 300R(\text{м})B_m(\text{Тл})$.

В другом важном случае в 4-потенциале (1) функция $B(kx)$ имеет вид $B(kx) = B_0 + b \cos kx$. Тогда уравнение (7) представляет собой уравнение Хилла. Анализ областей устойчивости решений приводит к выводу о возможности реализации ускорения частиц в режиме параметрического резонанса и сепарации частиц по удельному заряду.

5. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПИНА

Решение уравнения БМТ [20]

$$\dot{a}^\mu = \left(\frac{ge}{2mc} \right) F^{\mu\nu} a_\nu + \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\dot{x}^\mu (a\ddot{x})}{c^2}, \quad (13)$$

удовлетворяющее условию $a\dot{x} = 0$, будем искать в виде

$$a^\mu = f_1 E_{(1)}^\mu + f_2 E_{(2)}^\mu + f_3 E_{(3)}^\mu, \quad (14)$$

где

$$E_{(1)}^\mu = e_{(1)}^\mu - \frac{(e_{(1)}\dot{x})n^\mu}{nu}, \quad E_{(2)}^\mu = e_{(2)}^\mu - \frac{(e_{(2)}\dot{x})n^\mu}{nu}, \quad E_{(3)}^\mu = \frac{cn^\mu}{nu} - \frac{\dot{x}^\mu}{c}.$$

Поскольку $E_{(i)}^\mu E_{(k)\mu} = -\delta_{ik}$, то из условия $a^2 = -1$ следует соотношение $\mathbf{f}^2 = 1$. Подставляя (14) в (13) и учитывая (4), получим систему уравнений

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\tau} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{f}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{\Omega} = \left[\left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\ddot{y}}{c}, - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\ddot{x}}{c}, - \frac{geB}{2mc} \right],$$

с начальными условиями $f_k(0) = -a(0)E_{(k)}(0)$. Следует отметить, что в случае движения частицы в поле, векторы напряженности которого удовлетворяют уравнениям Максвелла, всегда можно найти 4-векторы $E_{(k)}^\mu$, реализующие преобразование уравнения (13) в уравнение (15).

4-вектор $a^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} S_{\nu\alpha} \dot{x}_\beta / c$ представляет собой среднее значение вектора Широкова–Паули–Любанского. Компоненты среднего значения вектора спина $\mathbf{s}$ являются пространственными компонентами антисимметричного тензора $S^{\mu\nu} = -(1/2c)\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} a_\alpha \dot{x}_\beta$: $2\mathbf{s} = (\mathbf{a}\dot{t} - a_0\dot{\mathbf{x}}/c)$, $S^{0i} = -(1/2c)[\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{x}}]_i$ [20]. В системе покоя частицы компоненты 4-вектора $a^\mu = (0, \boldsymbol{\xi})$ определяются преобразованием Лоренца

$$0 = a_0 c \dot{t} - \mathbf{a} \dot{\mathbf{x}}, \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a} - \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \left[a_0 - \frac{\mathbf{a} \dot{\mathbf{x}}}{c(1 + \dot{t})} \right] = \mathbf{a} - \frac{\dot{\mathbf{x}}}{c^2} \frac{\mathbf{a} \dot{\mathbf{x}}}{\dot{t}(1 + \dot{t})}.$$

Скалярное произведение $2\mathbf{s} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a} \dot{\mathbf{x}} / \dot{t} = \dot{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}$, характеризующее движение вектора поляризации относительно скорости, можно представить в виде

$$\frac{\mathbf{a} \dot{\mathbf{x}}}{c} = \frac{\dot{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}}{c} = \frac{cJ}{nu} - \dot{t} f_3, \quad J = f_3 + \frac{f_1 \dot{x}}{c} + \frac{f_2 \dot{y}}{c}. \quad (17)$$

Отметим, что в случае $B'(\sigma) \rightarrow 0$ величина $J = 2s_3$ представляет собой первый интеграл уравнений (6), (15), или в форме $cJ = (e_{(1)}a)(e_{(1)}\dot{x}) + (e_{(2)}a)(e_{(2)}\dot{x}) - (na)(\bar{n}\dot{x})$ — первый интеграл уравнений (3), (13).

Уравнение БМТ – результат усреднения гейзенберговских уравнений движения ковариантного оператора поляризации по некогерентной смеси состояний квазиклассического волнового пакета. Поэтому оно не принадлежит к лагранжевым или гамильтоновым уравнениям и не следует из какого-либо вариационного принципа. Однако уравнение (15) можно представить в гамильтоновой форме, используя подход Швингера, установившего связь между оператором момента импульса и спаренными операторами рождения и уничтожения, которые можно ввести при рассмотрении двух гармонических осцилляторов [16], [17].

Пусть Ψ – двумерный спинор-столбец с компонентами q_1, q_2 , $\Psi^\dagger = (q_1^*, q_2^*)$, σ_k – матрицы Паули ($k = 1, 2, 3$). Определим компоненты вектора $\mathbf{f}$ соотношениями $f_k = (1/2)\Psi^\dagger \sigma_k \Psi$:

$$f_1 = \frac{1}{2}(q_1^* q_2 + q_2^* q_1), \quad f_2 = \frac{i}{2}(q_2^* q_1 - q_1^* q_2), \quad f_3 = \frac{1}{2}(q_1^* q_1 - q_2^* q_2). \quad (18)$$

Введем “координаты” $x_k = q_k$ и “импульсы” $p_k = i q_k^*$ ($k = 1, 2$) с фундаментальной скобкой Пуассона $[x_i, p_k] = \delta_{ik}$. Поскольку $[f_i, f_j] = \varepsilon_{ijk} f_k$, то уравнение (15) приобретает гамильтонову форму $d\mathbf{f}/d\tau = [\mathbf{f}, H]$ с гамильтонианом $H = \mathbf{f} \Omega$ [21]. В терминах новых переменных

$$H = \frac{1}{2}[q_1^* q_2 \Omega_- + q_2^* q_1 \Omega_+ + (q_1^* q_1 - q_2^* q_2) \Omega_3], \quad (19)$$

где $\Omega_\pm = \Omega_1 \pm i \Omega_2$, $\Omega_+ = -i(g/2 - 1)\ddot{x}_+/c$. Канонические переменные удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dq_k}{d\tau} = [q_k, H],$$

или

$$\frac{dq_1}{d\tau} = -\frac{i}{2}(\Omega_3 q_1 + \Omega_- q_2), \quad \frac{dq_2}{d\tau} = -\frac{i}{2}(\Omega_+ q_1 - \Omega_3 q_2).$$

Отметим, что уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала

$$I = \int d\tau L(q_k^*, q_k, \tau), \quad L(q_k^*, q_k, \tau) = \frac{i}{2} \left[q_n \frac{dq_n^*}{d\tau} - q_n^* \frac{dq_n}{d\tau} \right] + H(q_k^*, q_k, \tau),$$

принимают форму уравнений Гамильтона. Существенным достоинством гамильтонова формализма является возможность применения новых методов интегрирования канонических уравнений движения [21], [22]. Введение функционала позволяет использовать прямые вариационные методы Ритца и Бубнова–Галеркина для получения приближенных решений уравнения (15).

6. ДВИЖЕНИЕ СПИНА В ПОЛЕ БЕГУЩЕГО СКАЧКА ПЛОТНОСТИ ТОКА

Найдем решение уравнения БМТ (13), используя методы теории канонических преобразований (КП). Подставляя в (19) решения уравнений движения (8), (10) в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_c$, получим гамильтониан

$$H = -\frac{\Lambda}{2} [q_1^* q_2 \exp(i\omega_1 \tau) + q_2^* q_1 \exp(-i\omega_1 \tau)] - \frac{1}{2} (\Lambda_3 + \omega_1) (q_1^* q_1 - q_2^* q_2),$$

где $\Lambda = (g/2 - 1)\omega_1 u_1/c$, $\Lambda_3 = (g/2 - 1)\omega_1$. Произведем вначале КП $q_1 = b_1 \exp(i\omega_1 \tau/2)$, $q_2 = b_2 \exp(-i\omega_1 \tau/2)$, порождаемое производящей функцией, зависящей от старых координат $x_n = q_n$ и новых импульсов $p'_n = ib_n^*$:

$$F_2(x_n, p'_n, \tau) = x_1 p'_1 \exp\left(-\frac{i\omega_1 \tau}{2}\right) + x_2 p'_2 \exp\left(\frac{i\omega_1 \tau}{2}\right).$$

После замены переменных новый гамильтониан

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial \tau} = -\frac{\Lambda}{2} (b_1^* b_2 + b_2^* b_1) - \frac{\Lambda_3}{2} (b_1^* b_1 - b_2^* b_2) \quad (20)$$

не зависит явным образом от собственного времени. Последующее КП $b \rightarrow c$:

$$b_1 = c_1 \cos \frac{\theta}{2} - c_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad b_2 = c_1 \sin \frac{\theta}{2} + c_2 \cos \frac{\theta}{2},$$

$$\cos \theta = \frac{\Lambda_3}{\Omega}, \quad \sin \theta = \frac{\Lambda}{\Omega}, \quad \Omega = \left| \frac{g}{2} - 1 \right| \omega_1 u_0, \quad u_0 = \left[1 + \left(\frac{u_1}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

приводит гамильтониан H' к диагональной форме:

$$h = -\frac{\Omega}{2} (|c_1|^2 - |c_2|^2). \quad (21)$$

Решение канонических уравнений, порождаемых гамильтонианом (21), имеет вид

$$c_1 = A_1 \exp\left(\frac{i\Omega \tau}{2}\right), \quad c_2 = A_2 \exp\left(-\frac{i\Omega \tau}{2}\right), \quad (22)$$

где $A_1 = (1 + C)^{1/2} \exp(i\alpha/2)$, $A_2 = (1 - C)^{1/2} \exp(-i\alpha/2)$, C и α — постоянные интегрирования.

Переходя в (18) к новым переменным $q \rightarrow c$, получим в области $0 \leq \tau \leq \tau_c$ решение уравнения (15), которое запишем в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= (f'_1 \cos \theta + f'_3 \sin \theta) \cos \varphi - f'_2 \sin \varphi, \\ f_2 &= (f'_1 \cos \theta + f'_3 \sin \theta) \sin \varphi + f'_2 \cos \varphi, \\ f_3 &= -f'_1 \sin \theta + f'_3 \cos \theta, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\varphi = -\omega_1\tau$,

$$f'_1 = (1 - C^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\Omega\tau + \alpha), \quad f'_2 = -(1 - C^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\Omega\tau + \alpha), \quad f'_3 = C. \quad (24)$$

Отметим, что КП $q \rightarrow c$ реализует переход к новому базису $\mathbf{n}_k \rightarrow \mathbf{n}'_k$ ($k = 1, 2, 3$), в котором угловая скорость вращения вектора $\mathbf{f} = f'_i \mathbf{n}'_i$ направлена по орту $\mathbf{n}'_3$. Действительно, пусть $A_{ik}(\tau)$ – матрица поворота вокруг осей 323 на эйлеровы углы $\varphi, \theta, \psi = 0$, представляющие собой обычные сферические углы оси z' . Тогда компоненты угловой скорости в новом базисе имеют вид $\omega'_1 = -\dot{\varphi} \sin \theta$, $\omega'_2 = \dot{\theta}$, $\omega'_3 = \dot{\varphi} \cos \theta$, а компоненты вектора f суть $f'_i = A_{ik} f_k$. Подставляя $f_m = f'_n A_{nm}$ в (15) и учитывая соотношение $dA_{nm}/d\tau = \varepsilon_{nsk} A_{sm} \omega'_k$, получим уравнение [14]

$$\frac{df'_i}{d\tau} = \varepsilon_{ikn} \Omega'_k f'_n. \quad (25)$$

Компоненты $\Omega'_k = A_{ks} \Omega_s - \omega'_k$ равны

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= (\Omega_1 \cos \varphi + \Omega_2 \sin \varphi) \cos \theta - (\Omega_3 - \dot{\varphi}) \sin \theta, \\ \Omega'_2 &= -\Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi + \dot{\theta}, \\ \Omega'_3 &= (\Omega_1 \cos \varphi + \Omega_2 \sin \varphi) \sin \theta + (\Omega_3 - \dot{\varphi}) \cos \theta. \end{aligned}$$

Полагая $\Omega_1 = -\Lambda \cos \omega_1\tau$, $\Omega_2 = \Lambda \sin \omega_1\tau$, $\Omega_3 = -\Lambda_3$, $\varphi = -\omega_1\tau$, находим $\Omega'_1 = 0$, $\Omega'_2 = 0$, $\Omega'_3 = -\Omega$. Следовательно, компоненты вектора (24) представляют собой решение уравнений (25), компоненты вектора (23) определяются матрицей поворота $f_m = f'_n A_{nm}$ и удовлетворяют уравнению (15).

Предположим, что $g > 2$. Тогда $\sin \theta = u_1/u_0 = v_1/c$, $\cos \theta = 1/u_0 = [1 - (v_1/c)^2]^{1/2}$. Подставляя (23) в (14), получим компоненты вектора $\mathbf{a}$ в области $0 \leq \tau \leq \tau_c$:

$$a_1 = f'_1 u_0 \cos \omega_1\tau + f'_2 \sin \omega_1\tau, \quad a_2 = -f'_1 u_0 \sin \omega_1\tau + f'_2 \cos \omega_1\tau, \quad a_3 = f'_3. \quad (26)$$

Пусть в системе покоя $\boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0$. Из (16) найдем начальные значения компонент $a_n(0) = a_{0n}$: $a_{01} = u_0 \xi_{01}$, $a_{02} = \xi_{02}$, $a_{03} = \xi_{03}$. Учитывая (24), (26), находим $\xi_{0n} = f'_n(0)$ и значения постоянных C и α :

$$\xi_{01} = (1 - C^2)^{\frac{1}{2}} \cos \alpha, \quad \xi_{02} = -(1 - C^2)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha, \quad \xi_{03} = C. \quad (27)$$

Подставляя (24), (27) в (26), получим решение уравнения БМТ с заданными начальными условиями. Теперь после подстановки (26) в (16) имеем

$$\begin{aligned} \xi_1 &= f'_1 \cos \omega_1\tau + f'_2 \sin \omega_1\tau = \xi_{01} \cos \Omega_z\tau + \xi_{02} \sin \Omega_z\tau, \\ \xi_2 &= -f'_1 \sin \omega_1\tau + f'_2 \cos \omega_1\tau = -\xi_{01} \sin \Omega_z\tau + \xi_{02} \cos \Omega_z\tau, \quad \xi_3 = f'_3 = \xi_{03}, \end{aligned}$$

где $\Omega_z = \Omega + \omega_1$ — угловая скорость прецессии вектора ξ вокруг оси z . В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω_1 , проекции вектора ξ на направления скорости и ускорения равны соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi}}{u_1} &= f'_1 = \xi_{01} \cos \Omega \tau + \xi_{02} \sin \Omega \tau, \\ -(\xi_1 \sin \omega_1 \tau + \xi_2 \cos \omega_1 \tau) &= -f'_2 = \xi_{01} \sin \Omega \tau - \xi_{02} \cos \Omega \tau. \end{aligned}$$

Эти соотношения представляют собой известный результат: проекция вектора ξ на плоскость (x, y) вращается вокруг направления скорости [20].

Движение 4-вектора спина a^μ при $\tau \geq \tau_c$ определяется из уравнения (13) после подстановки компонент 4-скорости (11), (12). В этой области решение уравнения (25) имеет вид

$$\begin{aligned} f'_1 &= (1 - C^2)^{\frac{1}{2}} \cos[\Omega_2(\tau - \tau_c) + \Omega_1 \tau_c + \alpha], \\ f'_2 &= -(1 - C^2)^{\frac{1}{2}} \sin[\Omega_2(\tau - \tau_c) + \Omega_1 \tau_c + \alpha], \quad f'_3 = C, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Omega_2 = |g/2 - 1| \omega_2 \gamma_2$, $\gamma_2 = [1 + (u_2/c)^2]^{1/2}$. Решение уравнения (15) следует из (23) после подстановки (28) и замен $\sin \theta \rightarrow u_2/(c\gamma_2)$, $\cos \theta \rightarrow 1/\gamma_2$, $\varphi \rightarrow \phi = \omega_2(\tau - \tau_c) + \eta$. Подставляя f_k ($k = 1, 2, 3$) в (14), получим вектор $\mathbf{a}$ в области $\tau \geq \tau_c$:

$$\begin{aligned} a_1 &= f'_1 \gamma_2 \cos \phi + f'_2 \sin \phi, \quad a_2 = -f'_1 \gamma_2 \sin \phi + f'_2 \cos \phi, \\ a_3 &= f'_1 \left(\frac{u_2 \dot{z}}{c^2 \gamma_2} \right) + f'_3 \left(\frac{\dot{t}}{\gamma_2} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Компоненты вектора поляризации (16) можно представить как преобразование поворота:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (f'_1 \cos \delta - f'_3 \sin \delta) \cos \phi + f'_2 \sin \phi, \\ \xi_2 &= -(f'_1 \cos \delta - f'_3 \sin \delta) \sin \phi + f'_2 \cos \phi, \\ \xi_3 &= f'_1 \sin \delta + f'_3 \cos \delta, \end{aligned} \quad (30)$$

где угол δ определен соотношениями

$$\gamma_2 \cos \delta = 1 + \frac{u_2^2}{c^2(1 + \dot{t})}, \quad \gamma_2 \sin \delta = \frac{u_2 \dot{z}}{c^2(1 + \dot{t})}.$$

Среднее значение $\langle \xi \rangle = (0, 0, \xi_{03} \cos \delta)$. Из соотношений (30) следует, что в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\omega = (0, 0, -\omega_2)$, вектор ξ описывает круговой конус с радиусом основания $(1 - \xi_{03}^2)^{1/2}$ с частотой вращения Ω_2 вокруг прямой N , расположенной под углом δ к оси z в плоскости, касательной к цилиндрической поверхности, по которой движется частица. Пусть $u_1 \ll c$. В ультрарелятивистском случае $T \gg mc^2$ ($u_2 \gg c$, $\dot{z} \gg u_2$), $\cos \delta \approx 3c/u_2$, $\sin \delta \approx (1 - 9c^2/2u_2^2)$. Поскольку $\delta \approx \pi/2$, прямая N ориентирована в направлении, противоположном направлению поперечной скорости частицы.

Благодарности. Автор благодарит К. В. Степанянца за обсуждение. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 97-01-00957).

Список литературы

- [1] *И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов.* Квантовые процессы в сильном внешнем поле. М.: Изд-во МГУ, 1989.
- [2] *И. М. Тернов.* Введение в физику спина релятивистских частиц. М.: Изд-во МГУ, 1997.
- [3] *V. Bargman, L. Michel, V. L. Telegdi.* Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 435.
- [4] *А. А. Соколов, И. М. Тернов.* ДАН СССР. 1963. Т. 153. С. 1052.
- [5] *В. Н. Байер, В. М. Катков, В. С. Фадин.* Излучение релятивистских электронов. М.: Атомиздат, 1973.
- [6] *Ю. С. Дербенев, А. М. Кондратенко.* ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 1918.
- [7] *S. Mane.* Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 105.
- [8] *K. Yokoya.* Nucl. Instr. Methods. A. 1987. V. 258. P. 149.
- [9] *Yu. Eidelman, V. Yakimenko.* Part. Acc. 1994. V. 45. № 1. P. 17.
- [10] *Yu. Eidelman, V. Yakimenko.* Part. Acc. 1995. V. 50. № 4. P. 261.
- [11] *S. Chicariello.* Nuovo Cimento. 1965. V. 37. P. 161.
- [12] *D. Zwanziger.* Phys. Rev. B. 1965. V. 139. P. 1318.
- [13] *M. Kolsrud.* Phys. Norv. 1966. V. 2. P. 51.
- [14] *Ю. Г. Павленко.* ЯФ. 1978. Т. 28. С. 156.
- [15] *А. Е. Лобанов, О. С. Павлова.* ТМФ. 1999. Т. 121. № 3. С. 509.
- [16] *J. Schwinger.* On Angular Momentum. U.S. Atomic Energy Commission NYO-3071, 1952.
- [17] *Д. Маттис.* Теория магнетизма. М.: Мир, 1967.
- [18] *И. А. Малкин, В. И. Манько.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
- [19] *А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971.
- [20] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
- [21] *Ю. Г. Павленко.* Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [22] *А. М. Переломов.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 15.VII.2000 г.,
после доработки 6.IX.2000 г.