Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зобов, М. А. Попов, Изучение зависимости параметра роста деревьев от размерности решетки в модели Идена методом Монте-Карло, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 2, 325–336

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 16:46:57

ИЗУЧЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРА РОСТА ДЕРЕВЬЕВ ОТ РАЗМЕРНОСТИ РЕШЕТКИ В МОДЕЛИ ИДЕНА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Методом Монте-Карло рассчитаны числа деревьев, построенных из n связей в модели Идена на d -мерных простых кубических решетках при $d = 2, 3, 4, 6, 8, 10$. Выполнено сравнение этих чисел с точными данными, полученными нами методом перечисления до $n = 12$ на квадратной и до $n = 10$ на кубической решетках. Найдено, что при $d \geq 3$ рассчитанные значения параметра роста деревьев согласуются с значениями, полученными нами ранее методом разложения по обратным степеням $(2d - 1)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию статистических свойств деревьев, построенных на решетках различной размерности d при условии запрета пересечений ветвей, посвящено много работ. Интерес к таким объектам вызван, с одной стороны, их относительной простотой, с другой – тесной связью с реальными явлениями: ростом разветвленных молекул и их свойствами, перколяцией и т.п. При этом разным явлениям соответствуют разные модели, свойства деревьев в которых не совпадают. Так, при моделировании перколяционных кластеров или разветвленных молекул каждое дерево на решетке имеет единичный вес [1], [2], тогда как вес деревьев в модели роста Идена равен числу способов построения такого дерева [3], [4].

В работах [5]–[8] мы рассмотрели новую разновидность деревьев – деревья, построенные из двойных связей. С помощью таких деревьев была получена оценка спектральных моментов высокого порядка спиновых корреляционных функций при высоких температурах. В свою очередь, такие моменты позволяют определить положение особых точек этих функций на оси мнимого времени. Для координаты ближайшей особой точки (величины, обратной параметру роста деревьев) в работе [8] найдены первые члены разложения по обратной размерности пространства. Там же получено разложение и для деревьев в модели Идена, построенных из одинарных связей.

* Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Красноярск, Россия.
E-mail: rsa@iph.krasn.ru

† Красноярский государственный университет, Красноярск, Россия

Разложение по обратной размерности пространства для параметра роста кластеров хорошо известно для решеточных фигур (animals) [9], [10] и деревьев [2], тогда как для деревьев с весом в модели Идена такого разложения ранее не проводилось. В известных нам работах (см., например, [4]) $1/d$ -разложение получено для среднеквадратичного радиуса кластера. Численные расчеты кластеров в модели Идена (см., например, [11]–[13]) были направлены на изучение их формы (фрактальной размерности, радиуса и т.п.).

В настоящей работе методами компьютерного моделирования рассчитаны параметры роста деревьев в модели Идена для простых кубических решеток размерности от 2 до 10. Деревья строятся при условии запрета на пересечения ветвей. Как показано в [8], деревья, построенные из одинарных и двойных связей, имеют схожие качественные свойства. Для нас представляет большой интерес положение ближайшей особой точки производящей функции деревьев. Моделирование деревьев с одинарными связями проще, чем с двойными, и поэтому позволяет получить результат для деревьев большего размера. Мы определили положение особых точек при $d = 2$ и $d = 3$, а также для решеток большей размерности ($d = 4, 6, 8, 10$) с целью оценки применимости асимптотического разложения по $1/d$ и роли пересечений ветвей, образующих большие петли ($n \gg d$), анализ которой методом разложения по $1/d$ очень сложен [4].

2. ТЕОРИЯ

Итак, рассмотрим простую кубическую решетку размерности d с координационным числом $Z = 2d$ и найдем число N_n корневых деревьев, построенных из n одинарных связей. Возьмем некоторый узел решетки (корень дерева) и начнем строить дерево. Первую связь можно присоединить Z способами, т.е. $N_1 = Z$. Число N_2 уже зависит от условий, накладываемых при построении дерева. В простейшем случае без ограничений

$$N_2 = V_2 = 2Z^2,$$

поскольку вторая связь может быть присоединена к любому из двух концов первой связи в любом из Z направлений. Если же наложить условие, что вторая связь не должна совпадать с первой, то

$$N_2 = 2Z(Z - 1).$$

Последовательно присоединяя новые связи, легко получить, что число деревьев из n связей, построенных без ограничений, равно

$$V_n = n! Z^n. \quad (1)$$

Если же исключить из числа выходящих из узла доступных связей уже присоединенные к данному узлу связи, то

$$N_n = B_n = \prod_{m=1}^n [m(Z - 2) + 2] = \frac{(Z - 2)^n \Gamma(n + p + 1)}{\Gamma(p + 1)}, \quad (2)$$

где $p = p_b = 2/(Z - 2) = 1/(d - 1)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция. При таком построении на кубической решетке ветви дерева могут пересечься между собой. Результат (2) дает полное число деревьев без пересечений при их построении на решетке Бете (дерево Кэ-ли) [3].

Производящая функция деревьев на решетке Бете, число которых задано формулой (2), имеет простой вид

$$E_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \left(1 - \frac{x}{x_b}\right)^{-p-1}, \quad (3)$$

где $x_b = 1/(Z - 2)$.

В пределе $n \rightarrow \infty$ формула (2) переходит в простое асимптотическое выражение

$$B_n \sim A n! (Z_c)^n n^p, \quad (4)$$

где $p = p_b$, $A = A_b = 1/\Gamma(p_b + 1)$, $Z_c = Z_b = Z - 2$ – параметр роста деревьев.

Для сравнения приведем результаты [6]–[8] для деревьев, построенных из двойных связей на решетке Бете с координационным числом Z . Производящая функция

$$F_b(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_{2n} \tau^{2n}}{(2n)!}$$

(W_{2n} – число деревьев из n двойных связей) в окрестности ближайшей особой точки имеет вид

$$F_b(\tau) \approx C (\tau_b - \tau)^{-2m}, \quad (5)$$

где

$$m = \frac{Z}{Z - 2} = 1 + p_b, \quad C = \left(\frac{2Z}{(Z - 2)^2}\right)^m, \quad \tau_b = \sqrt{\frac{\pi}{2Z}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{Z})}{\Gamma(1 - \frac{1}{Z})}.$$

При $Z = 2$ для чисел деревьев без пересечений в двух случаях находим

$$B_n = 2^n, \quad W_{2n} = 2^{2n-1},$$

а для производящих функций

$$E_2(x) = \exp 2x, \quad F_2(\tau) = \operatorname{ch}^2 \tau.$$

Качественное отличие соответствующих этому значению Z одномерных систем от других систем с $Z > 2$ состоит в факториальном множителе в асимптотической формуле (4) для числа деревьев. Такой множитель означает, что число точек роста дерева одного порядка с полным числом связей n . Поскольку в модели Идена дерево расположено на поверхности, то результат (4) означает, что в приближении Бете при $Z > 2$ размер поверхности пропорционален n . Факториальный рост числа деревьев отражается на их производящих функциях (4) и (5) в положении особых точек на конечном расстоянии от

начала координат. При исчезновении факториального множителя, как это происходит в случае одномерных систем, особые точки уходят на бесконечное расстояние.

Для двух- и трехмерных систем и систем большей размерности задача о числе деревьев без пересечений не решена. В следующем разделе приведено ее решение методом компьютерного моделирования – основным методом решения подобных задач. Результаты, касающиеся скорости роста числа деревьев и аналитических свойств производящих функций, необходимы в моделях роста при установлении свойств растущих кластеров (см. выше), поскольку нет единого мнения о соотношении поверхности и массы, а также о наличии критической размерности пространства. Вместе с тем эти результаты необходимы для понимания динамики спиновых решеточных систем при высоких температурах [5]–[8]. Числа деревьев, построенных из двойных связей, мажорируют (с некоторыми оговорками) коэффициенты временных рядов для спиновых корреляционных функций. Ближайшие особые точки определяют высокочастотные асимптотики корреляционных функций, задающих скорости медленных релаксационных процессов. Интересующие нас результаты могут быть получены на деревьях как из одинарных связей, так и из двойных. Поскольку в первом случае более простой алгоритм позволяет построить деревья большего размера, для расчетов выбран этот случай.

3. РАСЧЕТ

При небольшом числе связей результат удастся получить методом перечисления всех деревьев, как это описано в работе [6] для деревьев, построенных из двойных связей. При переходе к деревьям, построенным из одинарных связей, в весовых множителях вершин не нужно удваивать число связей в ветках, выходящих из данного узла. Результаты расчета при $d = 2$ и $d = 3$ приведены во втором столбце табл. 1.

Для построения деревьев с большим числом связей и большей размерности воспользуемся методом Монте-Карло. Оценим долю деревьев без пересечения ветвей среди полного числа деревьев без ограничений (1). Выберем узел на решетке в качестве корня и будем последовательно строить дерево из n связей, каждый раз случайно выбирая узел уже построенной части дерева и направление пристраиваемой связи. Пристраивая очередную связь, проверяем, произошло ли пересечение: если произошло, то начинаем строить новое дерево с самого начала, если нет пересечений, то строим дальше. Искомая доля равна отношению построенных до конца деревьев к полному числу всех начатых. Результаты приведены в последнем столбце табл. 1, а также в табл. 2. Последние значения в столбцах для каждой размерности пространства (четыре значения для $d = 2, 10$, три для $d = 8$, два для $d = 3, 4, 6$) получены при полном числе начатых деревьев 10^9 , тогда как остальные – при 10^8 .

В третьем столбце табл. 1 приведены точные результаты для той же самой доли, полученные после деления чисел деревьев из второго столбца таблицы на полное число деревьев (1). Сравнение подтверждает корректность используемой реализации метода Монте-Карло.

Предположим, что число N_n деревьев без пересечений ветвей при больших n также описывается формулой (4), но, естественно, с другими значениями параметров. Тогда

Таблица 1

n	N_n	$N_n/(n! Z^n)$	Метод Монте-Карло
$d = 2$			
1	4	1	
2	24	0.75	0.75004
3	192	0.5	
4	1 856	0.30208	0.30214
5	20 864	0.16979	
6	265 216	$8.9931 \cdot 10^{-2}$	$8.9946 \cdot 10^{-2}$
7	3 745 280	$4.5356 \cdot 10^{-2}$	
8	57 964 160	$2.1936 \cdot 10^{-2}$	$2.1949 \cdot 10^{-2}$
9	973 346 816	$1.0232 \cdot 10^{-2}$	
10	17 592 905 728	$4.6235 \cdot 10^{-3}$	$4.6242 \cdot 10^{-3}$
11	340 070 369 152	$2.0312 \cdot 10^{-3}$	
12	6 992 657 744 128	$8.7013 \cdot 10^{-4}$	$8.6713 \cdot 10^{-4}$
14			$1.4930 \cdot 10^{-4}$
16			$2.361 \cdot 10^{-5}$
18			$3.549 \cdot 10^{-6}$
20			$4.83 \cdot 10^{-7}$
$d = 3$			
1	6	1	
2	60	0.83333	0.83335
3	840	0.648148	
4	14 928	0.47994	0.47994
5	319 968	0.34290	
6	7 998 912	0.23812	0.238146
7	227 852 928	0.16150	
8	7 269 892 224	0.10735	0.10734
9	256 417 608 960	$7.0117 \cdot 10^{-2}$	
10	9 894 827 665 152	$4.5095 \cdot 10^{-2}$	$4.5096 \cdot 10^{-2}$
12			$1.7919 \cdot 10^{-2}$
14			$6.8047 \cdot 10^{-3}$
16			$2.4847 \cdot 10^{-3}$
18			$8.7875 \cdot 10^{-4}$
20			$3.0026 \cdot 10^{-4}$
22			$1.0008 \cdot 10^{-4}$
24			$3.310 \cdot 10^{-5}$
26			$1.070 \cdot 10^{-5}$
28			$3.426 \cdot 10^{-6}$
30			$1.063 \cdot 10^{-6}$

для оцененной нами доли получаем

$$\frac{N_n}{V_n} \sim A \left(\frac{Z_c}{Z} \right)^n n^p. \quad (6)$$

Отсюда при каждом n получаем для интересующего нас параметра роста оценку

$$x_c(n) = \left(\frac{Z}{Z_c} \right)_n = \left[\frac{V_n A n^p}{N_n} \right]_n^{\frac{1}{n}}. \quad (7)$$

Последовательности значений $x_c(n)$, определенные по этой формуле для разных d при $p = p_b$ и $A = A_b$, показаны кружками на рис. 1 как функции от $1/n$. Там же штриховой линией показано поведение соответствующих последовательностей в приближении Бете, т.е. при $N_n = B_n$ (2). В последнем случае, как и должно быть, последовательности стремятся асимптотически к значениям $Z/(Z - 2)$.

Рис. 1. Оценки отношений координационного числа $Z = 2d$ к параметру роста деревьев для кубических решеток разной размерности (кружки) и для решеток Бете с тем же координационным числом (штриховая линия) по формуле (7).

Для значений N_n/V_n , взятых из табл. 1 и 2, начиная с $n = 4$ последовательности (7) отклоняются от значений в приближении Бете в сторону уменьшения параметра роста деревьев. Это происходит вследствие уменьшения числа построенных деревьев из-за отбрасывания деревьев с пересечением ветвей при переходе от решеток Бете к кубическим решеткам. При максимально достигнутом нами числе связей отношение числа деревьев в приближении Бете к числу деревьев без пересечений ветвей изменяется от 10 при $d = 10$ до 50 при $d = 2$. Следовательно, размер построенных деревьев позволяет изучать эффект исключенного объема, который приводит к изменению параметров формулы (6) по сравнению с их значениями в приближении Бете (4).

Таблица 2

n	$d = 4$	$d = 6$	$d = 8$	$d = 10$
10	$1.1518 \cdot 10^{-1}$	$2.6092 \cdot 10^{-1}$	$3.7754 \cdot 10^{-1}$	$4.6582 \cdot 10^{-1}$
20	$4.0930 \cdot 10^{-3}$	$3.6439 \cdot 10^{-2}$	$9.4052 \cdot 10^{-2}$	$1.5940 \cdot 10^{-1}$
30	$1.0023 \cdot 10^{-4}$	$4.3020 \cdot 10^{-3}$	$2.1254 \cdot 10^{-2}$	$5.1060 \cdot 10^{-2}$
40	$1.961 \cdot 10^{-6}$	$4.6073 \cdot 10^{-4}$	$4.5452 \cdot 10^{-3}$	$1.5799 \cdot 10^{-2}$
45	$2.76 \cdot 10^{-7}$			
50		$4.680 \cdot 10^{-5}$	$9.3576 \cdot 10^{-4}$	$4.7667 \cdot 10^{-3}$
60		$4.498 \cdot 10^{-6}$	$1.8911 \cdot 10^{-4}$	$1.4220 \cdot 10^{-3}$
70		$4.01 \cdot 10^{-7}$	$3.781 \cdot 10^{-5}$	$4.1819 \cdot 10^{-4}$
80			$7.463 \cdot 10^{-6}$	$1.2203 \cdot 10^{-4}$
90			$1.439 \cdot 10^{-6}$	$3.514 \cdot 10^{-5}$
100			$3.21 \cdot 10^{-7}$	$9.587 \cdot 10^{-6}$
110				$2.824 \cdot 10^{-6}$
120				$8.25 \cdot 10^{-7}$
130				$2.15 \cdot 10^{-7}$

Для определения этих параметров часто используется метод отношений [2], [14]. В нашем случае соответствующим отношением является величина

$$\mu_n = \frac{N_n V_{n-1}}{V_n N_{n-1}}. \quad (8)$$

Согласно (6) $\mu_n \rightarrow Z_c/Z$ при $n \rightarrow \infty$. Улучшению сходимости служит линейная экстраполяция

$$\mu'_n = n\mu_n - (n-1)\mu_{n-1}. \quad (9)$$

Последовательности $1/\mu'_n$ показаны на рис. 2 (нижние кривые) для взятых из третьего столбца табл. 1 значений N_n/V_n , определенных методом пересчета при $d = 2$ и $d = 3$.

Рис. 2. Оценки отношений координационного числа $Z = 2d$ к параметру роста деревьев при $d = 2$ и $d = 3$, полученные методом отношений (9) (нижние кривые), улучшенным методом отношений (11) (верхние кривые) и по формуле (14) (средние кривые).

Далее, можно оценить показатель p и амплитуду A как пределы последовательностей [2], [14]

$$p_n = n \left(\frac{\mu_n}{\mu'_n} - 1 \right), \quad A_n = n^{-p} \left(\frac{Z}{Z_c} \right)^n \frac{N_n}{V_n}. \quad (10)$$

При известном показателе p можно улучшить оценку x_c из более быстросходящейся последовательности

$$x_c(n) = \frac{n+p}{n\mu_n}. \quad (11)$$

Метод отношений не удастся использовать при обработке результатов, полученных методом Монте-Карло, из-за наличия случайной ошибки. Для оценки параметров по

Этим данным можно использовать формулу (7). К сожалению, как видно на рис. 1, эта простая формула приводит к недостаточно быстрому выходу на асимптотику даже в приближении Бете. С целью улучшения сходимости изменим формулу (7). Введем производящую функцию

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n}{V_n} x^n. \quad (12)$$

Если при больших n справедлива асимптотика (6), то главная часть производящей функции в окрестности ближайшей особой точки принимает вид

$$E(x) \approx a \left(1 - \frac{x}{x_c}\right)^{-p-1}, \quad (13)$$

где $x_c = Z/Z_c$, $a = A\Gamma(p+1)$. Нужную формулу получим, приравняв коэффициенты разложения (13) по степеням x и ряда (12):

$$x_c(n) = \left\{ \frac{a\Gamma(n+p+1)V_n}{\Gamma(p+1)n!N_n} \right\}^{\frac{1}{n}}. \quad (14)$$

Если подставить $N_n = B_n(2)$, $p = p_b$ и $a = 1$, то сразу получим независимые от n значения $d/(d-1)$. Как видно на рис. 1, для кубических решеток значения параметров другие. Эти новые значения оценим с помощью формулы (14), в которой коэффициенты a и p будем подбирать так, чтобы добиться независимости x_c от n при $n \geq 10$. Подобранные значения параметров приведены в табл. 3, а последовательности значений $x_c(n)$, получающиеся при этих параметрах, показаны на рис. 2 при $d = 2$ и $d = 3$ и на рис. 3 при d от 3 до 10. Величина ошибки Z/Z_c , приведенная в табл. 3, обуславливается не столько случайным разбросом значений, полученных методом Монте-Карло, сколько неопределенностью экстраполяции с использованием формулы (14). Неопределенность параметров p ($10 \div 20\%$) и a ($20 \div 30\%$) при подборе их по формуле (14) существенно больше. Мы ее не приводим в табл. 3, поскольку в данной работе не ставилась цель определения этих параметров, требующая дополнительных исследований.

Таблица 3

d	a	p	Z/Z_c	Z_c	Z_b/Z_c	Z_b/Z_{cT}
2	0.175	5.7	3.437 ± 0.05	1.16 ± 0.02	1.719 ± 0.03	1.889
3	0.182	2.7	1.945 ± 0.02	3.08 ± 0.03	1.297 ± 0.02	1.32
4	0.262	1.6	1.544 ± 0.01	5.18 ± 0.04	1.158 ± 0.01	1.163
6	0.425	0.8	1.280 ± 0.006	9.38 ± 0.05	1.067 ± 0.005	1.066
8	0.54	0.5	1.184 ± 0.004	13.51 ± 0.05	1.036 ± 0.004	1.036
10	0.6	0.4	1.138 ± 0.004	17.57 ± 0.06	1.024 ± 0.004	1.022

Рис. 3. Оценки отношений координационного числа $Z = 2d$ к параметру роста деревьев для кубических решеток разной размерности по формуле (14).

На рис. 2 для каждой размерности показано по три последовательности значений, рассчитанных по формулам (9), (11) и (14). Видно, что результаты различных методов находятся в хорошем согласии. Сопоставятся с приведенными в табл. 3 значениями и результаты для показателей и амплитуд, рассчитанных по формулам (10).

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В работе [8] для кубических решеток большой размерности была найдена главная поправка к производящей функции деревьев приближения Бете, исключаяющая деревья с пересечениями ветвей в виде квадрата, с учетом которой для координаты особой точки (величины, обратной параметру роста деревьев) найдено

$$\frac{x_{cT}}{ZX_b} = \frac{Z_b}{Z_{cT}} = 1 + \frac{8}{(2d-1)^2}. \quad (15)$$

Полученные по этой формуле значения приведены в последнем столбце табл. 3. Сравнение с результатами численного моделирования, приведенными в предпоследнем столбце,

показывает вполне хорошее согласие начиная с $d = 3$. Отсюда можно сделать вывод, что пересечения ветвей, образующие малые петли, определяют значения координаты особой точки и параметра роста деревьев, тогда как вклад больших петель незначителен.

Другой параметр формул (6) и (13) – показатель p – в $4 \div 5$ раз отличается от его значения $1/(d - 1)$ в приближении Бете. Это указывает на сильное влияние пересечения ветвей деревьев на этот параметр. Подобным свойством обладают и обычные решеточные деревья [2], и фигуры [15]. Отличительной особенностью нашего случая является то, что даже при $d = 8$ и $d = 10$ показатель p не совпал со значением в приближении Бете. Возможно, это свидетельствует в пользу предположений [16], [17] об отсутствии верхней критической размерности пространства в моделях роста. Однако не исключено, что нам оказались доступны недостаточно большие деревья, у которых еще сильно влияние плотного ядра [3], [12], [13] вокруг корня и слабо влияние дальних ветвей, приближающихся по свойствам к ветвям обычных деревьев [12].

Из полученных выше результатов для числа деревьев следует, что при $d > 1$ в асимптотической формуле (4) факториальный множитель сохраняется. Следовательно, размер поверхности растущих деревьев пропорционален числу связей n . На первый взгляд, этот вывод противоречит результатам численных расчетов других авторов (см., например, [13]), из которых следует, что кластер в модели Идена имеет меньшую поверхность. На самом деле противоречия нет, поскольку кластеры строятся по разным правилам. В работе [13] выполняется рост одного кластера от начала до выбранного размера, затем другого и т.д., с последующим усреднением результата по нескольким построенным кластерам. Тогда как мы делаем попытку анализа полного ансамбля всевозможных кластеров (деревьев), число которых экспоненциально растет (4) при увеличении n . В нашем случае кластер с большей поверхностью имеет больше потомков и, следовательно, большую вероятность быть обнаруженным в полном ансамбле. В другом варианте [13] число построенных кластеров предопределено, каждый из них будет обязательно построен независимо от его поверхности.

В заключение отметим, что выводы настоящей работы важны и для деревьев, построенных из двойных связей. Близость свойств деревьев, построенных из одинарных и двойных связей, установлена в работе [8], в которой для тех и других деревьев одним методом получены главные поправки степени $1/(2d - 1)^2$ для координат особых точек их производящих функций. Существование согласно выполненным расчетам особых точек спиновых временных корреляционных функций на оси мнимого времени объясняет экспоненциальные крылья их спектров, наблюдавшиеся экспериментально (см. приведенные в работах [5]–[8] ссылки).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-18214).

Список литературы

- [1] *M. E. Fisher, J. W. Essam.* J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 609.
- [2] *D. S. Gaunt, M. F. Sykes, G. M. Torrie, S. G. Whittington.* J. Phys. A. 1982. V. 15. P. 3209.

- [3] *J. Vannimenus, B. Nickel, V. Hakim.* Phys. Rev. B. 1984. V. 30. P. 391.
- [4] *R. Friedberg.* Ann. Phys. (NY). 1986. V. 171. P. 321.
- [5] *В.Е. Зобов.* ТМФ. 1988. Т. 77. С. 426.
- [6] *В.Е. Зобов, М.А. Попов.* ТМФ. 1997. Т. 112. С. 479.
- [7] *V. E. Zobov, M. A. Popov.* J. Stat. Phys. 1999. V. 97. P. 793.
- [8] *В.Е. Зобов.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 116.
- [9] *A. B. Harris.* Phys. Rev. B. 1982. V. 26. P. 337.
- [10] *P. J. Peard, D. S. Gaunt.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6109.
- [11] *S. Redner.* J. Phys. A. 1979. V. 12. P. L239.
- [12] *Z. Alexandrowicz.* Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 1420.
- [13] *Z. Rácz, M. Plischke.* Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 985.
- [14] *М. Фушер.* Природа критического состояния. М.: Мир, 1968.
- [15] *S. G. Whittington, G. M. Torrie, D. S. Gaunt.* J. Phys. A. 1983. V. 16. P. 1695.
- [16] *M. Tokuyama, K. Kawasaki.* Phys. Lett. A. 1984. V. 100. P. 337.
- [17] *C. Castellano, A. Gabrielli, M. Marsili et al.* Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. R5209.

Поступила в редакцию 24.VI.2000 г.,
после доработки 25.X.2000 г.