Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Лезнов, Инвариантная форма генераторов полупростых алгебр Ли и квантовых алгебр в произвольном конечномерном представлении, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 3, 370–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf436>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:59:00

© 2001 г.

А. Н. Лезнов*

ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ГЕНЕРАТОРОВ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ И КВАНТОВЫХ АЛГЕБР В ПРОИЗВОЛЬНОМ КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Найден явный вид генераторов квантовых и обыкновенных полупростых алгебр в произвольных конечномерных представлениях. Генераторы, соответствующие простым корням, получены в терминах решения системы матричных уравнений. Результат представлен в виде $(N_l \times N_l)$ -матриц, где N_l – размерность соответствующего представления, определенная инвариантной формулой Вейля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе развивается подход, предложенный в работе [1] и состоящий в использовании формулы Вейля для характеров [2] с целью явного построения генераторов как квантовых, так и обычных полупростых алгебр в произвольном конечномерном представлении. Основная идея предложенного в [1] подхода состояла в использовании формулы Вейля для характеров при вычислении результата действия группового элемента $\exp \tau = \exp \sum_1^r \tau_i h_i$ (где h_i – элементы Картана алгебры) на базисные векторы состояний в конечномерном представлении. В уравнениях, определяющих квантовую алгебру,

$$R_i X_j^\pm = \pm \tilde{K}_{j,i} X_j^\pm R_i, \quad [X_i^+, X_j^-] = \delta_{j,i} \frac{R_i - R_i^{-1}}{2 \operatorname{sh}(w_i t)}, \quad R_i \equiv \exp(w_i t h_i), \quad (1)$$

это позволяет считать известным “групповой элемент” R_i в данном представлении l и искать конечномерные матрицы $X_i^\pm$ с известной структурой. В уравнениях (1) K обозначает матрицу Картана, $K_{j,i} w_i = w_j K_{j,i} \equiv \tilde{K}_{j,i}$, а t – параметр деформации.

* Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия; Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: leznov@ce.ifsicam.unam.mx

Из первых $2r^2$ уравнений (1) можно получить правила отбора, определяющие структуру матриц $X_i^\pm$. Вторые r^2 уравнений однозначно определяют матрицы $X_i^\pm$ с точностью до ортогонального преобразования, смысл которого объясняется ниже.

Данная работа реализует такую программу и построена следующим образом. В разделе 2 описана связь между формулой Вейля для характера и результатом действия группового элемента $\exp \tau$ на базисные векторы в произвольном конечномерном представлении l . В разделе 3 представлены правила отбора и явный вид уравнений, которым удовлетворяют примитивные матричные элементы генераторов $X_i^\pm$. Смысл ортогонального преобразования и его роль в конструкции обсуждаются в разделе 4. Следствия, вытекающие из соединения правил отбора с ортогональной инвариантностью, обсуждаются в разделе 5. Явное решение для генераторов каждого простого корня в канонической форме дано в разделе 6. В разделе 7 доказан основной результат работы — факторизационная теорема. Она ограничивает решения всей задачи на случай простых алгебр A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 . В разделе 8 соответствующая задача решена для алгебр ранга 2. Общий случай произвольной полупростой алгебры рассмотрен в разделе 9. Заключительные замечания и обсуждение дальнейших перспектив собраны в разделе 10.

2. ФОРМУЛА ВЕЙЛЯ ДЛЯ ХАРАКТЕРА И ДЕЙСТВИЕ ГРУППОВОГО ЭЛЕМЕНТА $\exp \tau$ НА БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ В ПРОИЗВОЛЬНОМ КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В настоящей работе мы не проводим различия между базисами квантовых и обычных полупростых алгебр, имея в виду, что их размерности и характеры их конечномерных представлений (в обычном случае) описываются знаменитыми формулами Вейля [2].

Базисные векторы состояний в конечномерном неприводимом представлении $l = (l_1, l_2, \dots, l_r)$ полупростой алгебры строятся путем многократного применения понижающих генераторов X_i^- к старшему вектору $|l\rangle$ со свойствами

$$X_s^+ |l\rangle = 0, \quad h_s |l\rangle = l_s |l\rangle,$$

где $X_s^\pm$ и h_s — генераторы соответственно простых корней и элементов Картана.

Очевидная трудность, возникающая в такой конструкции, состоит в том, что не все полученные таким образом векторы состояний являются линейно независимыми, так что требуется дополнительная процедура для исключения линейно зависимых компонент и дальнейшей ортогонализации базиса. Обычно это представляет собой сложную задачу. Тем не менее значения группового элемента $\exp \tau \equiv \exp \sum h_i \tau_i$ на базисных векторах можно получить из инвариантной формулы Вейля для характера неприводимого представления $l = \sum h_i l_i$.

Формула Вейля для характера

$$\pi^l(\exp \tau) = \frac{\sum_W \delta_W \exp(\tau_W, l + \frac{\rho}{2})}{\sum_W \delta_W \exp(\tau_W, \frac{\rho}{2})}, \quad (2)$$

представленного как сумма экспонент (знаменатель всегда является делителем числителя!)

$$\pi^l(\exp \tau) = \sum_{n^k}^{N_l} C_{n^k} \exp(\tau, n^k) = \sum_{n^k}^{N_l} C_{n^k} \exp \sum_i^r (\tau_i n_i^k),$$

дает ответы на многие вопросы о структуре базиса в соответствующем представлении. В формуле (2) W – элемент дискретной группы Вейля, δ_W – его сигнатура, τ_W – результат действия группового элемента W на τ , C_{n^k} – кратность соответствующей экспоненты, а $\rho/2$ – полусумма положительных корней алгебры.

Напомним определение:

$$\pi^l(\exp \tau) = \text{Tr}(\exp \tau) = \sum_{\alpha}^{N_l} \langle \alpha | (\exp \tau) | \alpha \rangle,$$

где $\langle \alpha |$ и $| \alpha \rangle$ – бра- и кет-векторы базисных состояний в представлении l .

Сравнивая два последних выражения, видим, что формула Вейля определяет действие группового элемента $\exp \tau$ на базисные векторы с данным числом понижающих операторов различных типов. Действительно,

$$\begin{aligned} e^{\tau} (X_1^-)^{m_1} \dots (X_r^-)^{m_r} |l\rangle &= \exp \left(\sum \tau_i l_i \right) \exp \left(- \sum_{p,s} m_p \tilde{K}_{p,s} \tau_s \right) \times \\ &\times (X_1^-)^{m_1} \dots (X_r^-)^{m_r} |l\rangle \end{aligned} \quad (3)$$

(разумеется, порядок понижающих операторов в последнем выражении несуществен).

Приравнивая каждую экспоненту в формуле Вейля к (3), можно легко найти соответствующие индексы m_i . Единственное, чего нельзя сделать с помощью формулы Вейля, – это провести различие между базисными векторами с одним и тем же числом понижающих операторов одного и того же типа, взятых в различных порядках. Тем не менее она определяет число таких состояний (т.е. кратность соответствующей экспоненты в формуле для характера). Эти замечания играют ключевую роль в предлагаемой конструкции.

3. ПРАВИЛА ОТБОРА И СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРИМИТИВНЫХ МАТРИЦ

Введем дуальные к h_i генераторы $\bar{h}^i$ со свойствами

$$[\bar{h}^i, X_j^{\pm}] = \pm \delta_{i,j} X_j^{\pm}, \quad \text{Tr}(h_j, \bar{h}^i) = \delta_{i,j}.$$

Генераторы $\bar{h}^i$ можно выразить как линейные комбинации элементов Картана,

$$\bar{h} = h K^{-1},$$

что можно проверить простым вычислением.

Простейший способ вычисления значений группового элемента $\exp(\bar{h}, p) = \exp \sum \bar{h}^i p_i$ на базисных векторах конечномерного представления состоит в подстановке $\tau \rightarrow K^{-1}p$ в формулы предыдущего раздела.

Рассмотрим семейство взаимно коммутативных групповых элементов

$$\bar{R}_i = \exp(\bar{h}^i t), \quad R_i = \prod_1^r (\bar{R}_s)^{\tilde{K}_{s,i}}.$$

Используя формулу Вейля для характера, можно вычислить собственные значения каждого такого элемента и их кратности в виде

$$C_{n^k} \exp[t(n^k K^{-1})_i].$$

Таким образом, каждый базисный вектор конечномерного представления l можно поместить r -мерным вектором $q^k = (q_1^k, q_2^k, \dots, q_r^k)$, $q_i^k = e^{(n^k K^{-1})_i}$. Кратности соответствующих векторов q^k обозначаются как $N_k \equiv C_{n^k}$.

Рассмотрим теперь первые $2r^2$ уравнений (1). Переписанная в терминах генераторов $\bar{R}^i$, эта система принимает вид

$$\bar{R}^i X_j^\pm = \exp(\pm \delta_{i,j} t) X_j^\pm \bar{R}^i,$$

откуда следует, что элементы матрицы $(X_i^\pm)_{k,k'}$ отличны от нуля, если индексы k и k' связаны соотношением

$$q_i^k = q_i^{k'} e^{\pm \delta_{i,j} t}, \quad \ln q_i^k - \ln q_i^{k'} = \pm(0, \dots, t, \dots, 0) \equiv \pm j,$$

где единственный ненулевой элемент t в j -м векторе в левой части равенства стоит на j -м месте. r -Мерный вектор с компонентами $\ln q_i^k$ обозначается единым символом k .

Вторые r^2 уравнений в (1) можно переписать, используя введенные выше обозначения, в виде

$$(X_i^+)_{k,k-i} (X_j^-)_{k-i,k-i+j} - (X_j^-)_{k,k+j} (X_i^+)_{k+j-i} = \delta_{i,j} \frac{\text{sh}(\ln R_i^k)}{\text{sh}(w_i t)} I_{N_k}, \quad (4)$$

где $(X_i^\pm)_{k,k}$ — прямоугольные $(N_k \times N_{k'})$ -матрицы (которые мы называем *примитивными*), а I_{N_k} — единичная $(N_k \times N_k)$ -матрица.

Снова подчеркнем, что значения всех компонент векторов q^k и соответствующих им кратностей известны из формулы Вейля для характера (2) и должны считаться заданными в системе (4). Неизвестными являются элементы прямоугольных примитивных матриц заданной размерности.

4. ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Из формулы Вейля (2) следует, что кратность каждой экспоненты в ней остается той же самой после того, как групповой элемент $\exp \tau$ редуцирован к произвольной подгруппе исходной полупростой группы. Это означает, что все групповые элементы R_i и $\bar{R}^i$ имеют одну и ту же блочную структуру и кратности каждой экспоненты в соответствующем месте одинаковы (это не исключает возможности дополнительного вырождения, когда собственные значения некоторых элементов R_i одни и те же для разных диагональных блоков). Поэтому каждый элемент R_i инвариантен по отношению к преобразованиям подобия, порожденным каждой подгруппой $G(N_k, R)$. Матрицы $X_i^\pm$ сохраняют свою форминвариантность, преобразуясь в соответствии с законом

$$X_i^\pm \rightarrow G(N_k, R) X_i^\pm G^{-1}(N_k, R),$$

или в терминах примитивных матриц

$$(X_i^\pm)_{k,k'} \rightarrow G(N_k, R) (X_i^\pm)_{k,k'} G^{-1}(N_{k'}, R).$$

Их инвариантность по отношению к внутренним автоморфизмам следует из определяющих уравнений квантовой алгебры (1):

$$(X_i^-)^T \rightarrow X_i^+, \quad (X_i^+)^T \rightarrow X_i^-, \quad R_i^T = R_i.$$

То же верно и по отношению к системе, возникающей после учета правил отбора, которым удовлетворяют примитивные матрицы.

Ниже мы найдем генераторы простых корней квантовых алгебр, удовлетворяющие дополнительным условиям

$$(X_i^-)^T = X_i^+.$$

В этом случае все уравнения сохраняют свою инвариантность только после того, как прямое произведение линейных групп редуцировано к прямому произведению ортогональных групп, для которых $O^{-1} = O^T$.

5. ПРАВИЛА ОТБОРА И ОРТОГОНАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Отдельно рассмотрим квантовую алгебру j -го простого корня с соответствующими генераторами $X_j^\pm$ и R_j . Прямым следствием правил отбора для генераторов $\bar{h}^i$, введенных в разделе 3,

$$\Delta \bar{h}^i = \pm \delta_{j,i},$$

являются соответствующие правила отбора для элементов Картана h_i

$$\Delta h_i = \pm K_{j,i}, \tag{5}$$

поскольку элементы матрицы $(X_j^\pm)_{k,k'}$ отличны от нуля, если индексы k, k' связаны соотношением

$$k - k' = \pm j.$$

На языке базисных векторов состояний это означает, что состояние $|k'\rangle$ отличается от $|k\rangle$ действием ровно одного генератора X_j^- . Запишем это в символическом виде:

$$|k'\rangle = [X_j^- |k\rangle],$$

где квадратные скобки означают, что вектор состояния $|k'\rangle$ построен как линейная комбинация понижающих генераторов базисных векторов состояний $|k\rangle$ добавлением оператора X_j^- .

Из условия (5) немедленно следует, что генератор $(X_j^\pm)_{k,k'}$ является прямой суммой генераторов квантовых алгебр A_1^q с известной размерностью каждой компоненты в этой прямой сумме. Параметр деформации для квантовой алгебры, связанной с j -м простым корнем, равен $w_j t$. Поэтому если мы сможем представить явное выражение для элементов матрицы $(X_j^\pm)_{k,k'}$ в каноническом виде для алгебр A_1^q , то можно быть уверенным в том, что оно будет отличаться от настоящего только дополнительным ортогональным преобразованием. Если бы мы смогли найти все углы “смешивания” (ортогональные матрицы соответствующей размерности) такого ортогонального преобразования, используя уравнения (4), связывающие генераторы ближайших двух или трех простых корней (для серий D_n и $E_{6,7,8}$), то мы получили бы окончательное решение задачи. В следующих разделах мы рассмотрим ряд конкретных примеров и представим общее решение для произвольного представления.

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АЛГЕБРЫ A_1^q В КАНОНИЧЕСКОМ ВИДЕ

Из последовательности базисных векторов, пронумерованных r -мерным вектором k , выберем $k(p_i^s)$ векторов со старшим весом для представления p_i^s квантовой алгебры A_1^q , где i — число простых корней, p_i^s — индекс $(2p_i^s + 1)$ -мерного представления этой алгебры, а s — его порядковый номер. Это означает, что

$$(X_i^+)_{k(p_i^s)+i, k(p_i^s)} = 0$$

(другими словами, состояние $k(p_i^s) + i$ не входит в экспоненты в формуле Вейля для характера).

Мы будем опускать пока все дополнительные индексы k, i и s , которые несущественны для задачи в данном разделе, и рассмотрим уравнения квантовой алгебры, используя для ее состояний обычные обозначения $l, -l \leq m \leq l$. Имеем

$$X_{m,m-1}^+ X_{m-1,m}^- - X_{m,m+1}^- X_{m+1,m}^+ = \frac{\text{sh}(2mt)}{\text{sh } t} I_{N_m}.$$

Через N_m обозначим размерность вектора с данным m . Для состояния со старшим весом $(X_{l+1,l}^+ = 0)$ соответствующее уравнение принимает вид

$$X_{l,l-1}^+ X_{l-1,l}^- = \frac{\text{sh}(2lt)}{\text{sh } t} I_{N_l}. \quad (6)$$

Единственное отличие от случая обычной квантовой алгебры состоит в матричном характере $X_{l,l-1}^+$: в обычном случае это одна s -числовая функция, а в рассматриваемом случае это прямоугольная $(N_l \times N_{l-1})$ -матрица. Имеем $N_l \leq N_{l-1}$, поскольку по крайней мере N_l базисных состояний из N_{l-1} принадлежат к $(2l + 1)$ -мультиплету. Применяя ортогональное преобразование O_{N_l} слева и $O_{N_{l-1}}$ справа, можно представить прямоугольную $(N_l \times N_{l-1})$ -матрицу как квадратную $(N_l \times N_l)$ -матрицу с ненулевыми элементами на ее главной антидиагонали. Как следует из уравнения (6), все эти элементы равны $X_{l,l-1}^+ = (\text{sh}(2lt)/\text{sh } t)^{1/2}$. Поэтому оставшиеся $N_{l-1} - N_l$ базисных векторов принадлежат к $(l - 1)$ -представлениям квантовой алгебры как векторы старшего веса в этих представлениях. По той же причине $X_{l-1,l-2}^+$ есть прямоугольная $(N_{l-1} \times N_{l-2})$ -матрица, которую можно представить как квадратную антидиагональную $(N_{l-1} \times N_{l-1})$ -матрицу. Ее первые $N_{l-1} - N_l$ элементов (считая от левого нижнего угла) совпадают с матричными элементами $X_{l-1,l-2}^+ = (\text{sh}(2(l-1)t)/\text{sh } t)^{1/2}$ квантовой алгебры A_1^q в ее $(l - 1)$ -представлении. Следующие N_l матричных элементов совпадают со значениями $X_{l-1,l-2}^+ = (\text{sh}(2(l-1)t) \text{sh } 2t/\text{sh}^2 t)^{1/2}$ тех же элементов, но в l -представлении. Оставшиеся элементы (если таковые имеются) являются векторами старшего веса в $(l - 2)$ -представлении и т.д. После прохождения середины возникает только одно отличие: $N_{m+1} \leq N_m$, и все повторяется в противоположном направлении. Матрица X^+ симметрична при отражении относительно своей главной антидиагонали.

В случае, когда кратности всех состояний в представлении совпадают, $N_l = N_{l-1} = \dots = N_{-l}$, канонический вид генераторов $X^\pm$ есть преобразование подобия единичной матрицы соответствующей размерности, на которую умножены матричные элементы скалярной квантовой алгебры A_1^q . Этот случай будет рассмотрен в разделе 9 при доказательстве теоремы о факторизации.

Мы называем построенную по приведенным выше правилам матрицу X^+ *канонической матрицей* и обозначаем ее $\hat{X}^+$ со всеми необходимыми индексами, которые были опущены в начале данного раздела.

7. ФАКТОРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Из результатов предыдущих разделов следует, что решение задачи зависит от нахождения ортогональных углов смешивания, связывающих все соседние вершины (корни) на диаграмме Дынкина соответствующей полупростой алгебры. В свою очередь, эту задачу можно решить с помощью тех же вычислений, только в случае алгебры ранга 2. Действительно, пусть i и $i + 1$ — соседние вершины на диаграмме Дынкина. Редуцируем формулу Вейля для характера на подгруппу ранга 2, порожденную простыми корнями.

В результате оказывается, что представление l исходной полупростой алгебры разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $G_{i, i+1}^2$, где i и $i+1$ – простые корни, порождающие данную алгебру ранга 2. Если известны ортогональные углы смешивания для всех (p, q) -представлений таких групп ранга 2, можно решить соответствующие уравнения в виде¹⁾

$$X_i^+ = \widehat{X}_i^+, \quad X_{i+1}^+ = \prod_{p, q} O^{(p, q)}(i, i+1) \widehat{X}_{i+1}^+,$$

где произведение берется по ортогональным углам смешивания всех (p, q) -представлений, на которые исходное представление l разлагается при указанной выше редукции.

Начав с первого простого корня на диаграмме Дынкина, получаем

$$X_1^+ = \widehat{X}_1^+, \quad X_2^+ = \prod_{p, q} O^{(p, q)}(1, 2) \widehat{X}_2^+, \quad X_3^+ = \prod_{p, q} O^{(p, q)}(1, 2) \prod_{p, q} O^{(p, q)}(2, 3) \widehat{X}_3^+.$$

Следующие шаги и явный вид генераторов X_i^+ совершенно очевидны.

Таким образом, мы свели решение задачи для произвольной полупростой алгебры к такой же задаче, но для алгебры ранга 2. Это утверждение можно назвать теоремой факторизации. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 9.

8. АЛГЕБРЫ РАНГА 2

В этом случае базисные векторы нумеруются парой индексов (вектор k является двумерным). Его компоненты при векторе старшего веса обозначаются как α и β ,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = k^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

где (p, q) – стандартное обозначение для неприводимого представления алгебры ранга два A_2 , $B_2 = C_2$ и G_2 . Вектор старшего веса имеет единичную кратность. Все другие базисные векторы можно разложить на подпространствах с данным числом N понижающих генераторов. Любой базисный вектор этого подпространства можно обозначить натуральным индексом i ($1 \leq i \leq N$) и индексом “тонкой структуры” m , который принимает все натуральные значения между своей кратностью (определенной формулой Вейля для характера) и единицей. Таким образом, для такого вектора мы используем обозначение

$$(\alpha - i, \beta - N + i)(m).$$

Максимально возможные значения кратности можно получить следующим образом. Временно оставим в стороне задачу о линейно независимых компонентах. Тогда на каждом шаге после применения двух генераторов $X_{1,2}^-$ к каждому базисному вектору предыдущего шага возникает в два раза больше базисных векторов, чем на предыдущем

¹⁾Мы пишем элемент ортогональной группы только слева, опуская соответствующий элемент O^{-1} справа.

шаге. Поэтому максимальные значения кратности являются в точности биномиальными коэффициентами $C_{\alpha-i, \beta-N+i}^N$.

Рассмотрим несколько первых младших базисных векторов, не учитывая пока их индексы тонкой структуры. Имеем цепочку

$$(\alpha, \beta), \quad [(\alpha-1, \beta), (\alpha, \beta-1)], \quad [(\alpha-2, \beta), (\alpha-1, \beta-1), (\alpha, \beta-2)], \\ [(\alpha-3, \beta), (\alpha-2, \beta-1), (\alpha-1, \beta-2), (\alpha, \beta-3)], \quad \dots,$$

где генераторы подпространств с данным N ($0, 1, 2, 3, \dots$) объединены в квадратные скобки. Старшие векторы $(\alpha, \beta) \equiv |p, q\rangle$ аннулируются обоими понижающими генераторами и являются поэтому одновременно старшими векторами (p, q) -представлений алгебр $A_1(1, 2)$, порожденных соответствующими генераторами простых корней $X_{1,2}^\pm$. Состояние $X_2^- |p, q\rangle$ представляет собой старший вектор представления $p - k_{21} \equiv p + k$ ($k = 1, 2, 3$) алгебры $A_1(1)$ и принадлежит к q -му представлению алгебры $A_1(2)$. Та же ситуация имеет место для всех других базисных векторов; это обозначается дополнительными верхним и нижним индексами, описывающими структуру мультиплетного соответствующих базисных состояний. Таким образом, полные обозначения для базисных векторов состояния имеют вид

$$(\alpha - i, \beta - N + i)_{q+i}^{p+N-i}(m).$$

Запишем в этих обозначениях несколько первых базисных векторов:

$$(\alpha, \beta)_q^p, \quad [(\alpha-1, \beta)_{q+1}^p, (\alpha, \beta-1)_{q+1}^{p+k}], \\ [(\alpha-2, \beta)_{q+2}^p, (\alpha-1, \beta-1)_{q+1}^{p+k}, (\alpha, \beta-2)_{q+2}^{p+2k}], \\ [(\alpha-3, \beta)_{q+3}^p, (\alpha-2, \beta-1)_{q+2}^{p+k}, (\alpha-1, \beta-2)_{q+1}^{p+2k}, (\alpha, \beta-3)_{q+3}^{p+3k}], \quad \dots$$

Перейдем теперь к конкретным вычислениям. Применив уравнения $[X_1^+, X_2^-] = 0$ к базисным векторам первого подпространства ($N = 1$), получаем, что правила отбора из раздела 4 эквивалентны одному уравнению

$$(X_1^+)_{(\alpha, \beta-1), (\alpha-1, \beta-1)} (X_2^-)_{(\alpha-1, \beta-1), (\alpha-1, \beta)} = (X_2^-)_{(\alpha, \beta-1), (\alpha, \beta)} (X_1^+)_{(\alpha, \beta), (\alpha-1, \beta)}.$$

За исключением вектора $(\alpha-1, \beta-1)$ с максимальной кратностью 2, все рассматриваемые векторы являются синглетами. Поэтому, используя определение канонического вида генераторов квантовой алгебры (раздел 6) и принимая во внимание определение ортогональных матриц (раздел 5), перепишем последнее уравнение как

$$\sqrt{\frac{\text{sh}((p+k)t)}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\text{sh}((q+1)kt)}{\text{sh}(kt)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\text{sh}(pt) \text{sh}(qkt)}{\text{sh } t \text{sh}(kt)}},$$

или

$$\cos \phi_1 = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(pt) \operatorname{sh}(qkt)}{\operatorname{sh}((p+k)t) \operatorname{sh}((q+1)kt)}}, \quad \sin \phi_1 = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+qk+k)t) \operatorname{sh}(kt)}{\operatorname{sh}((p+k)t) \operatorname{sh}((q+1)kt)}}.$$

Таким образом, мы нашли (двумерный) ортогональный угол смешивания и кратность 2 для вектора состояния $(\alpha - 1, \beta - 1)$. Только в случае $q = 0$ (мы подразумеваем, что $q \leq p$, однако это несущественно) эта кратность вырождается в единицу, что видно из приведенного выше явного выражения для угла смешивания. Подчеркнем, что в последнем вычислении мы не использовали формулу Вейля, а получили кратность базисного состояния $(\alpha - 1, \beta - 1)$ независимо.

Для дальнейших вычислений удобнее сменить обозначения для базисных векторов состояний и выразить их только через базисные векторы двух алгебр $A_{1,2}$. Легко проверить, что базисные векторы N -го подпространства можно перенумеровать, используя только один индекс $0 \leq s \leq N$, как

$$((p+ks)_{N-s}, (q+N-s)_s).$$

В этих обозначениях несколько первых базисных векторов состояния имеют вид

$$\begin{aligned} & (p_0, q_0), \quad [(p_1, (q+1)_0), ((p+k)_0, q_1)], \\ & [(p_2, (q+2)_0), ((p+k)_1, (q+1)_1), ((p+2k)_0, q_2)], \\ & [(p_3, (q+3)_0), ((p+k)_2, (q+2)_1), ((p+2k)_1, (q+1)_2), ((p+3k)_0, q_3)], \\ & [(p_4, (q+4)_0), ((p+k)_3, (q+3)_1), \\ & ((p+2k)_2, (q+2)_2), ((p+3k)_1, (q+1)_3), ((p+4k)_0, q_4)], \end{aligned}$$

где l_k символически эквивалентно $l_k \equiv (X^-)^k |l\rangle$ (l — индекс представления алгебр A_1 , а k — его квантовое число). При этом условия взаимной коммутативности генераторов X_1^+ и X_2^- принимают “факторизуемый” вид (генераторы $X_{1,2}^\pm$ имеют матричные элементы только между состояниями, обозначенными соответствующими индексами p и q):

$$\begin{aligned} & (X_1^+)_{(p+ks)_{N-s}, (p+ks)_{N-s+1}} (X_2^-)_{(q+N-s+1)_s, (q+N-s+1)_{s-1}} = \\ & = (X_2^-)_{(q+N-s)_s, (q+N-s)_{s-1}} (X_1^+)_{(p+k(s-1))_{N-s}, (p+k(s-1))_{N-s+1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя последние уравнения к трем базисным векторам из $N = 2$ подпространства, получаем пару уравнений

$$\begin{aligned} & (X_1^+)_{(p+k)_1, (p+k)_2} (X_2^-)_{(q+2)_1, (q+2)_0} = (X_2^-)_{(q+1)_1, (q+1)_0} (X_1^+)_{p_1, p_2}, \\ & (X_1^+)_{(p+2k)_0, (p+2k)_1} (X_2^-)_{(q+1)_2, (q+1)_1} = (X_2^-)_{q_2, q_1} (X_1^+)_{(p+k)_0, (p+k)_1}. \end{aligned}$$

Необходимо решить эти уравнения при дополнительных условиях, состоящих в том, что кратность состояний $(p+k)_1$ и $(q+1)_1$ равна двум, а максимальная кратность состояний $(p+k)_2$, $(q+2)_1$, $(p+2k)_1$ и $(q+1)_2$ равна трем. Пусть трехмерные ортогональные матрицы n и $\tilde{n}$ соответствуют состояниям $(q+2)_1$ и $(q+1)_2$, соответственно, тогда для их матричных элементов получаем

$$\begin{aligned} n_1^1 &= -\sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p-1)t) \operatorname{sh}((p+qk+k)t) \operatorname{sh} 2t \operatorname{sh}(kt)}{\operatorname{sh}((p+k)t) \operatorname{sh}((p+k-2)t) \operatorname{sh}((q+2)kt) \operatorname{sh} t}}, \\ n_2^1 &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p-1)t) \operatorname{sh}(qkt) \operatorname{sh}(pt)}{\operatorname{sh}((p+k)t) \operatorname{sh}((p+k-1)t) \operatorname{sh}((q+2)kt)}}, \\ \tilde{n}_1^1 &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+qk+k)t) \operatorname{sh}(2kt)}{\operatorname{sh}((p+2k)t) \operatorname{sh}((q+1)kt)}}, \quad \tilde{n}_1^2 = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(pt) \operatorname{sh}((q-1)kt)}{\operatorname{sh}((p+2k)t) \operatorname{sh}((q+1)kt)}}. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что в первом случае в действительности имеется “насыщение”: кратность совпадает со своим максимально возможным значением, за исключением случая алгебры A_2 ($k=1$). В этом случае и во всех случаях, относящихся к матрице $\tilde{n}$, имеем

$$(n_1^1)^2 + (n_2^1)^2 = 1, \quad (\tilde{n}_1^1)^2 + (\tilde{n}_1^2)^2 = 1$$

и можно считать, что кратность равна двум. Уравнение для вещественных значений кратностей в этих случаях можно записать после явных вычислений всех других матричных элементов матриц n и $\tilde{n}$. (Случаи возможного дополнительного вырождения, связанного с определенными значениями определяющих представление параметров (p, q) , здесь не рассматриваются.)

При $N=3$ основные уравнения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+k)_2, (p+k)_3} (X_2^-)_{(q+3)_1, (q+3)_0} &= (X_2^-)_{(q+2)_1, (q+2)_0} (X_1^+)_{p_2, p_3}, \\ (X_1^+)_{(p+2k)_1, (p+2k)_2} (X_2^-)_{(q+2)_2, (q+2)_1} &= (X_2^-)_{(q+1)_2, (q+1)_1} (X_1^+)_{(p+k)_1, (p+k)_2}, \\ (X_1^+)_{(p+3k)_0, (p+3k)_1} (X_2^-)_{(q+1)_3, (q+1)_2} &= (X_2^-)_{q_3, q_2} (X_1^+)_{(p+2k)_0, (p+2k)_1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Кратности состояний $(p+2k)_1$ и $(q+1)_2$ равны двум, состояний $(p+k)_2$ и $(q+2)_1$ – трем, состояний $(p+k)_3$, $(q+3)_1$, $(p+3k)_1$ и $(q+1)_3$ – не более чем четырем, а состояний $(p+2k)_2$ и $(q+2)_2$ – не более шести.

В терминах канонических форм генераторов $X_{1,2}^\pm$ (см. раздел 6) и ортогональных матриц (см. разделы 4 и 5) перепишем первое уравнение (8) как

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+k-3)t) \operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh}^2 t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+k-2)t) \operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh}^2 t}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+k-4)t)}{\operatorname{sh} t}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times O_4 \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((q+3)kt)}{\operatorname{sh}(kt)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = n \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((q+2)kt)}{\operatorname{sh}(kt)}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(p-2)t \operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh}^2 t}}, \end{aligned}$$

где O_4 – ортогональная (4×4) -матрица, а n – ортогональная (3×3) -матрица, компоненты которой были частично вычислены на предыдущем шаге.

Последнее уравнение позволяет получить только элементы первого столбца матрицы O_4 :

$$\begin{aligned} O_1^1 &= \sqrt{\frac{\text{sh}((q+2)kt) \text{sh}((p-2)t) \text{sh} 3t}{\text{sh}((q+3)kt) \text{sh}((p+k-4)t) \text{sh} t}} n_3^1, \\ O_2^1 &= \sqrt{\frac{\text{sh}((q+2)kt) \text{sh}((p-2)t)}{\text{sh}((q+3)kt) \text{sh}((p+k-2)t)}} n_2^1, \\ O_3^1 &= \sqrt{\frac{\text{sh}((q+2)kt) \text{sh}((p-2)t) \text{sh} 3t}{\text{sh}((q+3)kt) \text{sh}((p+k-3)t) \text{sh} 2t}} n_1^1. \end{aligned}$$

Легко проверить прямым вычислением, что размерность матрицы O_4 редуцирована к O_2 в случае алгебры A_2 ($k=1$) и к O_3 в случае алгебры $B_2 = C_2$ ($k=2$).

Второе уравнение (8) (с теми же замечаниями, что и в предыдущем случае) принимает вид

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\text{sh}((p+2k-1)t) \text{sh} 2t}{\text{sh}^2 t}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\text{sh}((p+2k-2)t)}{\text{sh} t}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times P \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{\text{sh}(qkt)}{\text{sh}(kt)}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\text{sh}(qkt)}{\text{sh}(kt)}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\text{sh}((q+1)kt) \text{sh}(2kt)}{\text{sh}^2(kt)}} & 0 & 0 \end{pmatrix} n^{-1} = \\ &= \tilde{n} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\text{sh}((q-1)kt)}{\text{sh}(kt)}} \\ \sqrt{\frac{\text{sh}(qkt) \text{sh}(2kt)}{\text{sh}^2(kt)}} & 0 \end{pmatrix} \times \\ &\times \phi_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\text{sh}((p+k-1)t) \text{sh} 2t}{\text{sh}^2 t}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\text{sh}((p+k-2)t)}{\text{sh} t}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Известно, что размерность ортогональной матрицы P в последнем уравнении меньше шести. Но можно определить только шесть ее элементов (выразить их через элементы ортогональной (3×3) -матрицы n). Приведем результат вычислений:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\text{sh}((q+1)kt) \text{sh}(2kt)}{\text{sh}^2(kt)}} P_2^3 & \sqrt{\frac{\text{sh}(qkt)}{\text{sh}(kt)}} P_2^2 & \sqrt{\frac{\text{sh}(qkt) \text{sh} 2t}{\text{sh}^2(kt)}} P_2^1 \\ \sqrt{\frac{\text{sh}((q+1)kt) \text{sh}(2kt)}{\text{sh}^2(kt)}} P_1^3 & \sqrt{\frac{\text{sh}(qkt)}{\text{sh}(kt)}} P_1^2 & \sqrt{\frac{\text{sh}(qkt) \text{sh} 2t}{\text{sh}^2(kt)}} P_1^1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\text{sh}((q-1)kt) \text{sh}(2kt) \text{sh}((p+k)t) \text{sh}((p+k-1)t)}{\text{sh}^2(kt) \text{sh}((p+2k)t) \text{sh}((p+2k-1)t)}} & 0 \\ \sqrt{\frac{\text{sh}(pt) \text{sh}((p+kq+k)t) \text{sh}((p+k-1)t) \text{sh} 2t}{\text{sh} t \text{sh}((p+k)t) \text{sh}((p+2k)t) \text{sh}((p+2k-2)t)}} & -\sqrt{\frac{\text{sh}(qkt) \text{sh}((p+2k)t) \text{sh}((p+k-2)t)}{\text{sh}(kt) \text{sh}((p+k)t) \text{sh}((p+2k-2)t)}} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} n_2^1 & n_2^2 & n_2^3 \\ n_1^1 & n_1^2 & n_1^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В частности,

$$P_2^3 = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((q-1)kt) \operatorname{sh}((p+k)t) \operatorname{sh}((p+k-1)t)}{\operatorname{sh}((q+1)kt) \operatorname{sh}((p+2k)t) \operatorname{sh}((p+2k-1)t)}},$$

$$P_1^3 = \frac{\operatorname{sh}(2kt)}{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(kt)} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(qkt) \operatorname{sh} 2t \operatorname{sh}((p+qk+k)t) \operatorname{sh}((p-1)t)}{\operatorname{sh}((q+2)kt) \operatorname{sh}((p+2k)t)}}.$$

Третье уравнение (8) принимает вид (мы дополнительно умножили его справа на ортогональную (2×2) -матрицу $\tilde{n}$)

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+3k)t)}{\operatorname{sh} t}} (1 \ 0 \ 0 \ 0) R_4 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((q-4)kt) \operatorname{sh}(3kt)}{\operatorname{sh}^2(kt)}} \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((q-2)kt) \operatorname{sh}(2kt)}{\operatorname{sh}^2(kt)}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((q-1)kt) \operatorname{sh}(3kt)}{\operatorname{sh}^2(kt)}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+2k)t)}{\operatorname{sh} t}} (1 \ 0) \tilde{n}.$$

В последнем уравнении мы полагаем, что происходит насыщение матрицы R . Однако явное вычисление дает другой результат:

$$R_1^2 = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((p+qk+k)t) \operatorname{sh}(3kt)}{\operatorname{sh}((p+3k)t) \operatorname{sh}((q+1)kt)}}, \quad R_1^1 = \sqrt{\frac{\operatorname{sh}((q-2)kt) \operatorname{sh}(pt)}{\operatorname{sh}((p+3k)t) \operatorname{sh}((q+1)kt)}},$$

из которого легко заключить, что кратность равна двум.

Из результатов данного раздела следует, что асимптотически (для достаточно больших значений (p, q)) кратности пространств с различными N равны

$$N = 1 \rightarrow (1, 1), \quad N = 2 \rightarrow (1, 2, 1), \quad N = 3 \rightarrow (1, 3, 2, 1), \quad N = 4 \rightarrow (1, 4, 4, 2, 1).$$

Этот результат получен без использования формулы Вейля для характеров. Когда параметры представления принимают некоторые специальные значения, кратности скачкообразно изменяются, что можно вывести из структуры ортогональной матрицы, связанной с соответствующим базисным вектором.

Случай $(2, 1)$ -представления алгебры B_2 . На этом конкретном примере мы продемонстрируем основные шаги вычисления и покажем самосогласованность всей конструкции.

Размерность рассматриваемого представления равна 35. В формулу Вейля для характера входят 35 экспонент (явное выражение для характера (p, q) -представления алгебры B_2 можно найти в приложении А), которые можно распределить по подпространствам с верхним индексом N ($0 \leq N \leq 10$) и с соответствующими кратностями в следующем порядке:

$$\begin{aligned} & [e^{2\tau_1+\tau_2}], \quad [e^{\tau_2}, e^{4\tau_1-\tau_2}], \quad [e^{-2\tau_1+3\tau_2}, 2e^{2\tau_1}], \quad [3e^{\tau_2}, e^{4\tau_1-2\tau_2}], \\ & [2e^{-2\tau_1+2\tau_2}, 3e^{2\tau_1-\tau_2}], \quad [e^{-4\tau_1+3\tau_2}, 3e^{4\tau_1-3\tau_2}], \quad [3e^{-2\tau_1+\tau_2}, e^{2\tau_1-2\tau_2}], \\ & [e^{-4\tau_1+2\tau_2}, 3e^{-\tau_2}], \quad [2e^{-2\tau_1}, e^{2\tau_1-3\tau_2}], \quad [e^{4\tau_1-\tau_2}, e^{-2\tau_2}], \quad [e^{-2\tau_1-\tau_2}]. \end{aligned}$$

Те же базисные векторы в терминах неприводимых представлений алгебры A_1 , распределенные по тем же подпространствам, имеют вид

$$\begin{aligned} [p_0, q_0], \quad & [(p_1, (q+1)_0), ((p+k)_0, q_1)], \quad [(p_2, (q+2)_0), \phi_1((p+k)_1, (q+1)_1)], \\ & [l((p+k)_3, (q+2)_1), ((p+2k)_1, (q+1)_2)], \\ & [\phi_2((p+k)_3, (q+3)_1), m((p+2k)_2, (q+2)_2)], \\ & [((p+k)_4, (q+4)_1), n((p+2k)_3, (q+3)_2), ((p+3k)_2, (q+2)_3)], \\ & [o((p+2k)_4, (q+4)_2), \phi_3((p+3k)_3, (q+3)_3)], \\ & [((p+2k)_5, (q+5)_2), r((p+3k)_4, (q+4)_3)], \\ & [\phi_4((p+3k)_5, (q+5)_3), ((p+4k)_4, (q+4)_4)], \\ & [((p+3k)_6, (q+6)_3), ((p+4k)_5, (q+5)_4)], \\ & [((p+4k)_6, (q+6)_4)], \end{aligned}$$

где ϕ_s и l, m, n, o, r обозначают соответственно двух- и трехмерные ортогональные матрицы, которые надо найти.

Разумеется, во всех приведенных выше выражениях необходимо положить $p = 2$, $q = 1$ и $k = 2$. Мы сохраняем предыдущие обозначения, чтобы облегчить сравнение с результатами предыдущего раздела. Подчеркнем, что не все приведенные мультиплеты начинаются с нулевого индекса: например, если мультиплет начинается с первого индекса $(p+k)_1$, это означает, что он является мультиплетом с $l = 2$, но не с $l = 4$.

После того как все матричные элементы в построенном базисе приравнены к нулю²⁾, условие взаимной коммутативности генераторов $X_1^\pm$ и $X_2^\mp$ приводит к системе уравнений, которую предстоит решить. Ниже мы представили эту систему, используя формулы из приложения Б и явные решения, полученные на каждом шаге вычислений (разумеется, все результаты при $N = 1, 2, 3$ можно получить с помощью прямых подстановок $k = 2$, $p = 2$ и $q = 1$ в общие формулы предыдущего раздела, но мы снова приведем их для полноты картины).

При $N = 1$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+k)_0, (p+k)_1} \phi_2 (X_2^-)_{(q+1)_1, (q+1)_0} &= (X_2^-)_{q_1, q_0} (X_1^+)_{p_0, p_1}, \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}}, \end{aligned}$$

или

$$\cos \phi_1 = \frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } 4t}, \quad \sin \phi_1 = \pm \frac{\sqrt{\text{sh } 6t \text{ sh } 2t}}{\text{sh } 4t}.$$

²⁾ Из правил отбора следует, что произведения генераторов $X_1^+ X_2^-$ и $X_2^- X_1^+$ сохраняют N , так что следует проверить матричные элементы коммутатора с фиксированными значениями N .

При $N = 2$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+k)_1, (p+k)_2} (X_2^-)_{(q+2)_1, (q+2)_0} &= (X_2^-)_{(q+1)_1, (q+1)_0} (X_1^+)_{p_1, p_2}, \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} l \sqrt{\frac{\text{sh } 6t}{\text{sh } 2t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \phi_1 \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}}, \\ l_1^1 &= \mp \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } 4t}}, \quad l_2^1 = \sqrt{\frac{\text{sh } t \text{ sh }^2 2t}{\text{sh } 3t \text{ sh } 4t \text{ sh } 6t}}, \quad l_3^1 = \sqrt{\frac{\text{sh } 8t \text{ sh } t}{\text{sh } 3t \text{ sh } 6t}}. \end{aligned}$$

При $N = 3$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+2k)_1, (p+2k)_2} (X_2^-)_{(q+2)_2, (q+2)_1} &= (X_2^-)_{(q+1)_2, (q+1)_1} (X_1^+)_{(p+k)_1, (p+k)_2}, \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} l^{-1} &= \\ = \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \phi_1^{-1} \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ m_1^3 &= \frac{\text{sh } 2t}{\sqrt{\text{sh } 4t \text{ sh } 6t}}, \quad m_1^2 = \left(\cos \phi_1 \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} l_2^2 - \sin \phi_1 l_1^2 \right), \\ m_1^1 &= \left(\cos \phi_1 \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} l_2^3 - \sin \phi_1 l_1^3 \right). \end{aligned}$$

При $N = 4$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+2k)_2, (p+2k)_3} (X_2^-)_{(q+3)_2, (q+3)_1} &= (X_2^-)_{(q+2)_2, (q+2)_1} (X_1^+)_{(p+k)_2, (p+k)_3}, \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} n \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_2^{-1} &= \\ = m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} l^{-1} \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При $N = 5$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+2k)_3, (p+2k)_4} (X_2^-)_{(q+4)_2, (q+4)_1} &= (X_2^-)_{(q+3)_2, (q+3)_1} (X_1^+)_{(p+k)_3, (p+k)_4}, \\ (X_1^+)_{(p+3k)_2, (p+3k)_3} (X_2^-)_{(q+3)_3, (q+3)_2} &= (X_2^-)_{(q+2)_3, (q+2)_2} (X_1^+)_{(p+2k)_2, (p+2k)_3}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t}} n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_2^{-1} \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \phi_3 \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} n^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} m^{-1} \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение последних уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} 4t}{\sqrt{\operatorname{sh} 2t \operatorname{sh} 6t}} (N_1^1 \ N_2^1 \ N_3^1) &= \begin{pmatrix} o_3^1 & o_2^1 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} o_1^1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\operatorname{sh} 4t}{\sqrt{\operatorname{sh} 2t \operatorname{sh} 6t}} (R_1^2 \ R_2^2 \ R_3^2) &= \begin{pmatrix} m_3^3 & m_2^3 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} m_1^3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$(N^1 \ N^2) \equiv n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_2^{-1}, \quad (R^1 \ R^2) = n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_3^{-1},$$

$N^{1,2}$ — два трехмерных вектор-столбца, $R^{1,2}$ — взаимно ортогональные трехмерные векторы. Из определения векторов $N^{1,2}$ и $R^{1,2}$ следует связывающее их уравнение

$$(R^2 \ R^1) = (N^1 \ N^2) (\phi_2 + \phi_3)^{-1}.$$

При $N = 6$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+3k)_3, (p+3k)_4} (X_2^-)_{(q+4)_3, (q+4)_2} &= (X_2^-)_{(q+3)_3, (q+3)_2} (X_1^+)_{(p+2k)_3, (p+2k)_4}, \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} o^{-1} &= \\ = \phi_3 \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} n^{-1} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 0 & 0 \end{pmatrix} o \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 6t}{\operatorname{sh} 2t}}. \end{aligned}$$

При $N = 7$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+3k)_4, (p+3k)_5} (X_2^-)_{(q+5)_3, (q+5)_2} &= (X_2^-)_{(q+4)_3, (q+4)_2} (X_1^+)_{(p+2k)_4, (p+2k)_5}, \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi_4 \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} o^{-1} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При $N = 8$

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{(p+4k)_4, (p+4k)_5} (X_2^-)_{(q+5)_4, (q+5)_3} &= (X_2^-)_{(q+4)_4, (q+4)_3} (X_1^+)_{(p+3k)_4, (p+3k)_5}, \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t}} (1 \ 0) \phi_4^{-1} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 6t}{\operatorname{sh} 2t}} (0 \ 0 \ 1) r^{-1} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ r_1^3 &= \mp \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} 4t}}, \quad r_2^3 = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}^2 2t}{\operatorname{sh} 3t \operatorname{sh} 4t \operatorname{sh} 6t}}, \quad r_3^3 = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 8t \operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} 3t \operatorname{sh} 6t}}. \end{aligned}$$

При $N = 9$

$$(X_1^+)_{(p+4k)_5, (p+4k)_6} (X_2^-)_{(q+6)_4, (q+6)_3} = (X_2^-)_{(q+5)_4, (q+5)_3} (X_1^+)_{(p+3k)_5, (p+3k)_6},$$

$$\sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } t}} = \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi_4 & \sin \phi_4 \\ -\sin \phi_4 & \cos \phi_4 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\cos \phi_4 = \frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } 4t}, \quad \sin \phi_4 = \pm \frac{\sqrt{\text{sh } 6t \text{ sh } 2t}}{\text{sh } 4t}.$$

Удобнее рассматривать приведенные выше системы после группировки уравнений в пары для $N = 1, 9$, $N = 2, 8$, $N = 3, 7$, $N = 4, 6$ и $N = 5, 5$. Из первой пары находим двумерные углы смешивания $\phi_1 = \phi_4$. Уравнения для $N = 2, 8$ позволяют определить первый и последний столбцы в трехмерных ортогональных матрицах l и r , соответственно, и восстановить их явный вид с точностью до произвольных двумерных вращений³⁾:

$$l = \phi_{1,2}^l \phi_{1,3}^l u_{2,3} \equiv \bar{l} u_{2,3}, \quad rW = \phi_{1,2}^l \phi_{1,3}^l u_{2,3} \equiv \bar{r} W v_{2,3},$$

где W – трехмерная матрица с ненулевыми элементами на главной антидиагонали,

$$\sin \phi_{1,2}^l = -\sqrt{\frac{\text{sh } 2t \text{ sh } t}{\text{sh } 4t \text{ sh } 5t}}, \quad \sin \phi_{1,3}^l = -\sqrt{\frac{\text{sh } 8t \text{ sh } t}{\text{sh } 3t \text{ sh } 6t}},$$

а $u_{2,3}$ и $v_{2,3}$ – матрицы двумерных вращений в плоскости $(2, 3)$ с произвольными параметрами u и v .

Уравнения для $N = 3, 7$ позволяют найти первые строки матриц m и o и восстановить их с точностью до произвольных двумерных вращений:

$$m = w_{2,3} \phi_{1,2}^m \phi_{1,3}^m u_{1,2} \equiv w_{2,3} \bar{m} u_{1,2}, \quad oW = z_{2,3} \phi_{1,2}^m \phi_{1,3}^m v_{1,2} \equiv \bar{o} W v_{1,2},$$

где

$$\sin \phi_{1,2}^m = -\sqrt{\frac{\text{sh } 6t \text{ sh } t}{\text{sh } 4t \text{ sh } 5t}}, \quad \text{tg } \phi_{1,3}^m = -\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } 4t} \sqrt{\frac{\text{sh } 2t \text{ sh } 5t}{\text{sh } t \text{ sh } 8t}},$$

параметры u, v те же, что и в параметризации матриц l и r , а w, z – произвольные новые параметры.

Уравнения для $N = 4, 6$ определяют пару взаимно ортогональных векторов (N^1, N^2) и (R^1, R^2) ($(N^1)^2 = (N^2)^2 = (R^1)^2 = (R^2)^2 = 1$ и $(N^1 N^2) = (R^1 R^2) = 0$). Условия ортонормированности являются не дополнительными уравнениями, а прямым следствием

³⁾ После транспонирования уравнение при $N = 8$ для неизвестной функции rW совпадает с соответствующим уравнением для матрицы l . То же относится ко всем указанным парам.

предыдущих уравнений для матриц l , r , m и o :

$$\begin{aligned}(N^1, N^2) &= \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } 4t}} w_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} & 1 & 0 \\ \frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{l}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv w_{1,2}(\bar{N}^1, \bar{N}^2), \\ (R^1, R^2) &= \sqrt{\frac{\text{sh } 2t}{\text{sh } 4t}} z_{1,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} & 1 & 0 \\ \frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{o} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{r}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv z_{1,2}(\bar{R}^1, \bar{R}^2).\end{aligned}$$

Заметим, что уравнения, определяющие векторы $(N^{1,2}, R^{1,2})$, содержат только два (пока произвольных) параметра w, z .

Уравнения при $N = 5$ связывают векторы N^1 и R^2 соответственно с первым и третьим столбцами матриц o и m . Мы ограничимся рассмотрением первого уравнения, следствия второго совершенно такие же.

Вектор N^1 и первый столбец матрицы o полностью определяются, как следует из приведенных выше явных формул, с точностью до соответствующих ортогональных преобразований $w_{1,2}$ и $z_{2,3}$ (вращение $v_{2,3}$ не дает вклада в первый столбец матрицы o). Действительно, прямое вычисление дает

$$\frac{\text{sh } 4t}{\sqrt{\text{sh } 2t \text{ sh } 6t}} N_3^1 = \sqrt{\frac{\text{sh } 4t \text{ sh } 3t}{\text{sh } t \text{ sh } 6t}} \left(\bar{m}_1^1 \bar{l}_2^3 + \bar{m}_1^2 \bar{l}_2^2 + \frac{\text{sh } 4t}{\text{sh } 2t} \bar{m}_1^3 \bar{l}_2^1 \right) = \sqrt{\frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t}} o_1^1$$

(все явные значения, входящие в соотношение, которое следует доказать, являются известными) и

$$\frac{\text{sh}^2 4t}{\text{sh } 2t \text{ sh } 6t} = (o_3^1)^2 + (o_2^1)^2 + \frac{\text{sh } 3t}{\text{sh } t} (o_1^1)^2.$$

Поэтому существенно только одно из трех уравнений, связывающих два трехмерных вектора N^1 и o^1 . Из этого уравнения получаем

$$\cos(w + z) = \frac{\bar{o}_3^1 \bar{N}_1^1 + \bar{o}_2^1 \bar{N}_2^1}{(\bar{N}_1^1)^2 + (\bar{N}_2^1)^2}.$$

Знание векторов $N^{1,2}$ и $R^{1,2}$ дает

$$\cos(\phi_2 + \phi_3) = \frac{\sqrt{\text{sh } 6t \text{ sh } 2t}}{\text{sh } 4t}.$$

Таким образом, мы определили все параметры, это позволяет явно восстановить инфинитезимальные генераторы простых корней квантовой алгебры B_2 в ее $(2, 1)$ -представлении.

Неудивительно, что мы смогли найти только некоторые конкретные комбинации параметров в некоторых случаях, а именно комбинации, в которых они возникают как инфинитезимальные операторы, являющиеся наблюдаемыми (в обычной квантово-механической терминологии) в рассматриваемой задаче. Справедливость этого утверждения следует из приведенных выше формул.

9. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПОЛУПРОСТОЙ (КВАНТОВОЙ) АЛГЕБРЫ

Рассмотрим векторы состояний в конечномерном представлении l произвольной квантовой алгебры с фиксированным числом понижающих генераторов

$$(X_1^-)^{m_1} (X_2^-)^{m_2} \dots (X_r^-)^{m_r} |(l_1, \dots, l_r)\rangle,$$

где порядок входящих операторов несуществен. После действия генератором X_s^+ на такой вектор состояния $m_s + 1$ раз заведомо получается нуль. Однако нуль может получиться на некотором промежуточном шаге, и выяснить, когда именно это происходит, можно из сравнения формулы Вейля для характера (2) с формулой (3), как объяснялось в разделе 1. Поэтому можно сказать, что указанный вектор состояния принадлежит к $(l_s - \sum m_t k_{ts})$ -конечномерному неприводимому представлению алгебры $A_1(s)$ с квантовым числом m_s . Снова подчеркнем, что может случиться, что первые j базисных векторов в этом представлении запрещены формулой Вейля для характера. В таком случае индекс представления редуцирован к jw_s , где w_s есть норма s -го простого корня рассматриваемой алгебры. Поэтому вместо обозначения базисных векторов представления l с использованием r -мерных векторов k (см. раздел 5) оказывается возможным и более удобным использовать обозначения, связанные с индексами и квантовыми числами неприводимых представлений r формально независимых алгебр $A_1(s)$. Начиная с этого места будем использовать следующие обозначения для базисных векторов в подпространствах с фиксированным N (числом понижающих генераторов):

$$\left[\dots \left(l_s - \sum_{t \neq s} m_t K_{ts} \right)_{m_s} \dots \right], \quad \sum m_s = N.$$

Согласно уравнениям (1), определяющим квантовую алгебру, коммутаторы каждой пары ($i \neq j$) генераторов положительных (i) и отрицательных (j) простых корней равны нулю. Это условие переписывается через матричные элементы соответствующего коммутатора как

$$\begin{aligned} & (X_i^+)_{(l_i - \sum_{t \neq i} m_t K_{ti} - K_{ji})_{m_i-1}, (l_i - \sum_{t \neq i} m_t K_{ti} - K_{ji})_{m_i}} \times \\ & \times (X_j^-)_{(l_j - \sum_{t \neq j} m_t K_{tj})_{m_j+1}, (l_j - \sum_{t \neq j} m_t K_{tj})_{m_j}} = \\ & = (X_j^-)_{(l_j - \sum_{t \neq j} m_t K_{tj} + K_{ij})_{m_j+1}, (l_j - \sum_{t \neq j} m_t K_{tj} + K_{ij})_{m_j}} \times \\ & \times (X_i^+)_{(l_i - \sum_{t \neq i} m_t K_{ti})_{m_i-1}, (l_i - \sum_{t \neq i} m_t K_{ti})_{m_i}} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Это в точности уравнение (7) (записанное в других обозначениях с $k = -K_{2,1}$ и $l = -K_{1,2}$), использовавшееся в вычислениях в разделе 8.

Рассмотрим сначала уравнение (9) в случае, когда $K_{i,j} = K_{j,i} = 0$, т.е. когда различные простые корни связаны нулевыми элементами матрицы Картана. Используем сокращения $I_{m_i} = l_i - \sum_{t \neq i} m_t K_{ti}$ и $J_{m_j} = l_j - \sum_{t \neq j} m_t K_{tj}$ и перепишем (9) в виде

$$(X_i^+)_{I_{m_i-1}, I_{m_i}} (X_j^-)_{J_{m_j+1}, J_{m_j}} = (X_j^-)_{J_{m_j+1}, J_{m_j}} (X_i^+)_{I_{m_i-1}, I_{m_i}}.$$

Здесь кратности состояний (I_{m_i}, J_{m_j}) равны (различаются только обозначения для одного и того же вектора состояния), по той же причине равны кратности каждой пары (I_{m_i-1}, J_{m_j+1}) , (I_{m_i}, J_{m_j+1}) и (J_{m_j}, I_{m_i-1}) . Это означает, что матричные элементы матриц X_i^+ и X_j^- канонически эквивалентны при унитарном преобразовании матричных элементов обычной одномерной квантовой алгебры (см. замечания в конце раздела 6).

Мы приходим к выводу, который является прямым следствием правил отбора из раздела 4, что коммутатор каждой пары генераторов положительных и отрицательных простых корней, связанных с нулевыми элементами матрицы Картана, равен нулю. Поэтому необходимо только решить уравнения коммутативности для пары генераторов простых корней, связанных с ненулевыми элементами матрицы Картана. Другими словами, на каждом шаге вычислений нам надо найти ортогональные углы смешивания для каждой пары, отмеченной вершинами на диаграмме Дынкина. Техника этих вычислений описана в разделе 8. Окончательный результат дается в виде рекуррентных формул в разделе 7.

Рассмотрение в данном разделе можно считать доказательством основного утверждения.

ТЕОРЕМА. *Задача нахождения явного вида генераторов простых корней полупростых алгебр Ли и квантовых алгебр сводится к решению той же задачи для алгебр ранга 2.*

10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы преобразовали предложенный в работе [1] подход в замкнутую математическую схему, позволяющую получать явный вид генераторов полупростых алгебр Ли и квантовых алгебр в их произвольных конечномерных представлениях. Для этого надо найти новые объекты (нам ранее неизвестные) – ортогональные матрицы, размерности которых совпадают с кратностями соответствующих экспонент в формуле Вейля для характера, или, что эквивалентно, некоторое количество линейно независимых базисных векторов в представлении, которые можно построить с помощью фиксированного числа понижающих операторов одного и того же типа.

Схема вычислений, проведенных в разделе 8 (см. также примеры $(2, 1)$ - и $(1, 1)$ -представлений соответственно алгебр A_1 и B_2 , рассмотренные в [1]), позволяет получать явные выражения для определенных примитивных матриц (построенных с использованием ортогональных матриц) на каждом шаге. Генераторы соответствующих простых корней построены из этих примитивных матриц. Последующее применение этой процедуры ко всем вершинам диаграммы Дынкина решает задачу о явном нахождении всех генераторов простых корней в произвольном конечномерном представлении рассматриваемой алгебры (см. разделы 7 и 9).

Наиболее неожиданным результатом является универсальный характер ортогональных матриц в асимптотической области достаточно больших параметров представле-

ния. Они не зависят от базиса в представлении, подсказываемого формулой Вейля для характера, и могут быть вычислены независимо, как это сделано в разделе 8 для подпространств базисных векторов с $N = 1, 2, 3, 4$.

Вычисленные таким образом “предельные значения” ортогональных матриц имеют универсальную аналитическую зависимость (от элементов матрицы Картана) для всех алгебр ранга 2, их свойства вырождения повторяют структуру соответствующих дискретных групп Вейля. Изучая свойства вырождения ортогональных матриц (дискретные изменения размерности при переходе от одного представления к другому), можно прийти к определенным выводам о структуре базисов представлений, эквивалентным следствиям из формулы Вейля для характера.

Если бы мы могли найти независимые аргументы (основанные на теории представлений или структурной теории полупростых алгебр), объясняющие существование и основные свойства ортогональных матриц, то мы могли бы решить задачу о явном виде генераторов, используя соответствующие формулы из разделов 7 и 9. В этом случае могло бы оказаться, что вся теория представлений полупростых алгебр является только прямым следствием соответствующей теории ортогональных матриц.

В заключение приведем два коротких замечания.

Во-первых, нет сомнения, что предложенная в данной работе конструкция применима без существенных модификаций к полупростым супералгебрам Ли и квантовым супералгебрам. Ее решение связано только с корректными вычислениями в грассмановых пространствах.

Во-вторых, напомним некоторые факты из истории вопроса. Предложенная в данной статье схема (см. также [1]) противоположна обычному подходу к решению данной задачи, берущему начало от знаменитых статей Гельфанда и Цейтлина [3]. Основная идея в предшествовавших исследованиях состояла в нахождении семейства взаимно коммутирующих операторов (построенных из генераторов алгебры), собственные значения которых могут определить базис в представлении. В предлагаемой нами конструкции такое семейство операторов (в том числе и операторов Казимира) не упоминается. Использование только тех сведений из глобальной теории представлений полупростых алгебр, которые содержатся в формуле Вейля для характеров, приводит к построению ортогональных матриц и к соответствующему алгоритму их вычисления. Этим данная работа отличается от предыдущих исследований.

Благодарности. Автор тепло благодарит Д. Б. Фэйрли и А. В. Разумова за многочисленные обсуждения и неоценимую помощь в подготовке рукописи к публикации. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 98-01-00330).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Характер (p, q) -представления алгебры B_2 дается формулой

$$\pi^{p,q}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\text{sh}(l_1 \tilde{\tau}_1) \text{sh}(l_2 \tilde{\tau}_2) - \text{sh}(l_1 \tilde{\tau}_2) \text{sh}(l_2 \tilde{\tau}_1)}{\text{sh } 2\tilde{\tau}_1 \text{sh } \tilde{\tau}_2 - \text{sh } \tilde{\tau}_2 \text{sh } \tilde{\tau}_1},$$

где $l_1 - l_2 = p + 1$, $l_2 = l_2$, $l_1 = p + q + 2$, $l_1 + l_2 = p + q + 3$, $\tilde{\tau}_1 = \tau_1$ и $\tilde{\tau}_2 = \tau_2 - \tau_1$. В случае $p = 2$ и $q = 1$ последнее выражение принимает вид

$$\pi^{2,1}(\tau_1, \tau_2) = 16 \operatorname{ch} \tilde{\tau}_1 \operatorname{ch} \tilde{\tau}_2 (\operatorname{ch} 2\tilde{\tau}_1 + \operatorname{ch} \tilde{\tau}_1 \operatorname{ch} \tilde{\tau}_2 + \operatorname{ch} 2\tilde{\tau}_2) - 12 \operatorname{ch} \tilde{\tau}_1 \operatorname{ch} \tilde{\tau}_2 - 1.$$

Почленное умножение в правой части приводит к сумме экспонент из формулы Вейля (2).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Приведем явный канонический вид генераторов $X_{1,2}^{\pm}$ для случая $(2, 1)$ -представления алгебр B_2 (во всех формулах $p = 2$ и $q = 1$, $k = 2$):

$$\begin{aligned} (X_1^+)_{p_0, p_1} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}}, & (X_1^+)_{p_1, p_2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}}, \\ (X_1^+)_{(p+k)_0, (p+k)_1} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, & (X_1^+)_{(p+k)_1, (p+k)_2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (X_1^+)_{(p+k)_2, (p+k)_3} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (X_1^+)_{(p+k)_3, (p+k)_4} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (X_1^+)_{(p+2k)_1, (p+2k)_2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (X_1^+)_{(p+2k)_2, (p+2k)_3} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (X_1^+)_{(p+2k)_3, (p+2k)_4} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{sh} t}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ (X_1^+)_{(p+2k)_4, (p+2k)_5} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ (X_1^+)_{(p+3k)_2, (p+3k)_3} &= (X_1^+)_{(p+k)_0, (p+k)_1}, & (X_1^+)_{(p+3k)_3, (p+3k)_4} &= (X_1^+)_{(p+k)_1, (p+k)_2}, \\ (X_1^+)_{(p+3k)_4, (p+3k)_5} &= (X_1^+)_{(p+k)_2, (p+k)_3}, & (X_1^+)_{(p+3k)_5, (p+3k)_6} &= (X_1^+)_{(p+k)_3, (p+k)_4}, \\ (X_1^+)_{(p+4k)_4, (p+4k)_5} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}}, & (X_1^+)_{(p+4k)_5, (p+4k)_6} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 2t}{\operatorname{sh} t}}, & (X_1^+)_{q_1, q_0} &= 1, \\ (X_2^-)_{(q+1)_1, (q+1)_0} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & (X_2^-)_{(q+1)_2, (q+1)_1} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (X_2^-)_{(q+2)_1, (q+2)_0} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 6t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & (X_2^-)_{(q+2)_2, (q+2)_1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X_2^-)_{(q+2)_3, (q+2)_2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 6t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & (X_2^-)_{(q+3)_2, (q+3)_1} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
(X_2^-)_{(q+3)_3, (q+3)_2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sh} 4t}{\operatorname{sh} 2t}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & (X_2^-)_{(q+4)_2, (q+4)_1} &= (X_2^-)_{(q+2)_1, (q+2)_0}, \\
(X_2^-)_{(q+4)_3, (q+4)_2} &= (X_2^-)_{(q+2)_2, (q+2)_1}, & (X_2^-)_{(q+4)_4, (q+4)_3} &= (X_2^-)_{(q+2)_3, (q+2)_2}, \\
(X_2^-)_{(q+5)_3, (q+5)_2} &= (X_2^-)_{(q+1)_1, (q+1)_0}, & (X_2^-)_{(q+5)_4, (q+5)_3} &= (X_2^-)_{(q+1)_2, (q+1)_1}, \\
(X_2^-)_{(q+6)_4, (q+6)_3} &= 1.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *А. Н. Лезнов.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 264–284.
- [2] *Г. Вейль.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1947.
- [3] *И. М. Гельфанд, М. Л. Цейтлин.* ДАН СССР. 1950. Т. 71. С. 825–829; С. 1017–1020.

Поступила в редакцию 5.X.1999 г.