Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Широков, Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 3, 393–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 06:39:08

ТОЖДЕСТВА И ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Изучаются тождества (функциональные соотношения между генераторами группы преобразований), а также алгебры инвариантных операторов на однородных пространствах. Применяемый метод орбит коприсоединенного представления (K -орбит) позволил установить связь между двумя этими объектами и предъявить алгоритм их построения. На основе метода K -орбит введена классификация однородных пространств.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G – вещественная связная n -мерная группа Ли, $\mathcal{G}$ – ее алгебра Ли, $M = G/H$ – m -мерное однородное правое G -пространство, H – замкнутая подгруппа группы G . Обозначим через x^a ($a = 1, \dots, m = \dim M$) локальные координаты точки $x \in M$; $X_i(x) = X_i^a(x) \partial_{x^a}$ – генераторы группы преобразований G , образующие n -мерную алгебру Ли $\mathcal{G}$ векторных полей на пространстве M .

В настоящей работе нас будут интересовать в основном два объекта исследований. Во-первых, это алгебра $D(M)$ инвариантных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов на M , т.е. таких операторов ζ , которые коммутируют со всеми генераторами X_i . В ассоциативной алгебре инвариантных операторов можно выделить конечный набор функционально независимых порождающих $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$, образующих нелинейные коммутационные соотношения:

$$\frac{i}{\hbar} [\zeta_\mu, \zeta_\nu] = \Omega_{\mu\nu}(\zeta),$$

здесь $\hbar$ – вспомогательный вещественный параметр, $\Omega_{\mu\nu}(\zeta)$ – симметризованные функции от операторов ζ . Алгебру с нелинейными коммутационными соотношениями называют *функциональной* алгеброй (F -алгеброй). В работе показано, что знание структурных констант алгебры $\mathcal{G}$ и подалгебры изотропии $\mathcal{H}$ (соответствующей подгруппе H) позволяет определить размерность F -алгебры, центра ее обертывающей и предъявить алгоритм построения базиса ζ_μ .

* Омский государственный университет, Омск, Россия. E-mail: shirokov@univer.omsk.su

Вторым объектом исследований настоящей работы являются тождества на однородных пространствах — функциональные соотношения между генераторами X_i группы преобразований G , составляющих алгебру $\mathcal{G}$. Тождества являются делителями нуля в обертывающей алгебре $U(\mathcal{G})$ и образуют в ней двусторонний идеал. В качестве примера рассматривается группа $E(3)$ движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с генераторами $X_a = \partial_{x^a}$, $X_{ab} = x_a \partial_{x^b} - x_b \partial_{x^a}$, $a, b = 1, 2, 3$. В данном случае имеем одно тождество $X_{12}X_3 + X_{23}X_1 - X_{13}X_2 = 0$.

При интегрировании дифференциальных уравнений наличие тождеств говорит о функциональной зависимости операторов симметрии, и поэтому их необходимо изучать. Тождества на однородных пространствах, по-видимому, впервые стали учитываться в методе разделения переменных [1]. В работе [2] подробно изучались тождества для случая конформной группы $K^{1,3}$, действующей в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. Общих результатов о тождествах в однородных пространствах автору не известно. Тождества на однородных пространствах — явление общего порядка; в частности, можно утверждать, что тождества существуют, если размерность однородного пространства мала (например, при $\dim M < (\dim \mathcal{G} + \text{ind } \mathcal{G})/2$). Число независимых тождеств мы называем индексом однородного пространства и обозначаем через i_M .

Между F -алгеброй инвариантных операторов и тождествами имеется нетривиальная связь (например, как будет показано ниже, $\dim F = i_M + 2m - n$). Эта связь обусловлена тем, что в обоих случаях приходится изучать структуру орбит коприсоединенного представления (K -орбит). Метод орбит, открытый в пионерских работах Кириллова [3]–[5], применяемый в теории представлений групп и породивший теорию геометрического квантования, оказался также мощным инструментом исследования однородных пространств. В настоящей статье мы, базируясь на изученной структуре K -орбит [6], даем классификацию однородных пространств. На основе полученной классификации можно легко предъявить все тождества и дать описание F -алгебры инвариантных операторов.

2. ОПИСАНИЕ K -ОРБИТ

Необходимое для наших целей описание K -орбит дано в работе [6], однако для замкнутости изложения мы его кратко повторим.

Группа G действует на коалгебре $\mathcal{G}^*$ коприсоединенным представлением $Ad^*: G \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$, $(g, f) \rightarrow Ad_g^* f$ по правилу

$$\langle Ad_g^* f, X \rangle \equiv \langle f, Ad_{g^{-1}} X \rangle; \quad f \in \mathcal{G}^*, \quad g \in G, \quad X \in \mathcal{G}. \quad (1)$$

Здесь Ad_g — линейный оператор присоединенного представления группы Ли G на алгебре Ли $\mathcal{G}$. Обозначим через f_i координаты ковектора f в дуальном базисе: $f = f_i e^i$, $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i$ (здесь $\{e_j\}$ — базис алгебры $\mathcal{G}$), тогда формула (1) в координатах имеет вид $(Ad_g^* f)_i = (Ad_{g^{-1}})_i^j f_j$.

На дуальном пространстве $\mathcal{G}^*$ определена вырожденная линейная скобка Пуассона

$$\{\varphi, \psi\}(f) \equiv \langle f, [\nabla \varphi(f), \nabla \psi(f)] \rangle; \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathcal{G}^*),$$

или в координатной форме

$$\{\varphi(f), \psi(f)\} = C_{ij}(f) \frac{\partial \varphi(f)}{\partial f_i} \frac{\partial \psi(f)}{\partial f_j}, \quad C_{ij}(f) \equiv C_{ij}^k f_k; \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathcal{G}^*). \quad (2)$$

Вследствие вырожденности скобки Пуассона (2) в пространстве $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ существуют так называемые *функции Казимира* $K_\mu(f)$ – функции, коммутирующие со всеми функциями из $C^\infty(\mathcal{G}^*)$. Функции Казимира являются инвариантами коприсоединенного представления $K_\mu(Ad_g^* f) = K_\mu(f)$ и определяются уравнениями

$$C_{ij}(f) \frac{\partial K_\mu(f)}{\partial f_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Число независимых функций Казимира определяется рангом матрицы $C_{ij}(f) = C_{ij}^k f_k$ и называется *индексом алгебры $\mathcal{G}$* ($\text{ind } \mathcal{G}$):

$$r = \text{ind } \mathcal{G} \equiv \inf_{f \in \mathcal{G}^*} \text{corank } C_{ij}(f). \quad (3)$$

Действие (1) группы G расслаивает пространство $\mathcal{G}$ на орбиты коприсоединенного представления (K -орбиты). Пусть $\mathcal{O}_\lambda$ – K -орбита, проходящая через точку $\lambda \in \mathcal{G}^*$. Нетрудно видеть, что $\dim \mathcal{O}_\lambda = \text{rank } C_{ij}(\lambda)$.

Обозначим через $F^s(f)$ совокупность всех миноров матрицы $C_{ij}(f)$ размера $n - r - 2s + 2$, где число s пробегает значения $s = 0, 1, \dots, (n - r)/2$. Введем подпространства в $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} M_0 &= \{f \in \mathcal{G}^* \mid F^1(f) \neq 0\}; \\ M_s &= \{f \in \mathcal{G}^* \mid F^s(f) = 0, F^{s+1} \neq 0\}, \quad s = 1, \dots, \frac{n-r}{2} - 1; \\ M_{\frac{n-r}{2}} &= \{f \in \mathcal{G}^* \mid F^{\frac{n-r}{2}}(f) = 0\}. \end{aligned}$$

Условие $F^s(f) = 0$ означает, что все миноры матрицы $C_{ij}(f)$ размера $n - r - 2s + 2$ в точке f обращаются в нуль, а условие $F^s \neq 0$ – что в точке f соответствующие миноры не обращаются в нуль одновременно.

Каждая поверхность M_s есть инвариантное пространство, которое является объединением орбит одинаковой размерности $n - r - 2s$:

$$\mathcal{G}^* = \bigcup_{s=0}^{\frac{n-r}{2}} M_s, \quad M_{s_1} \cap M_{s_2} = \emptyset \quad \text{для } s_1 \neq s_2.$$

Определение пространств M_s можно дать в инвариантных терминах, используя полевекторы. Обозначим через $Y_i(f)$ генераторы коприсоединенного действия,

$$Y_i(f) = C_{ij}(f) \frac{\partial}{\partial f_j} \in T_f \mathcal{G}^*, \quad (4)$$

тогда

$$M_s = \{f \in \mathcal{G}^* | Y_{i_1}(f) \wedge \cdots \wedge Y_{i_{n-r-2s+1}}(f) = 0; Y_{i_1}(f) \wedge \cdots \wedge Y_{i_{n-r-2s-1}}(f) \neq 0\}.$$

Важно отметить, что инвариантная поверхность M_s сама может состоять из нескольких непересекающихся инвариантных компонент, которые мы будем различать буквенными индексами: $M_s = M_{sa} \cup M_{sb} \dots$. Чтобы каждый раз отдельно не оговаривать случай, когда пространство M_s несвязно, примем следующее соглашение: число s в круглых скобках (s) будет обозначать конкретную компоненту (M_{sa} , M_{sb} и т.д.) для орбиты со степенью вырождения s . Из всего набора функций $F^s(f)$ выберем $n - \dim M_{(s)}$ независимых функций $F_\alpha^{(s)}(f)$, которые и определяют это пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Непостоянные функции $K_\mu^{(s)}(f)$ ($\mu = 1, \dots, r_{(s)}$) называются функциями Казимира (s) -типа, если они коммутируют с любой функцией на $M_{(s)}$.

В общем случае функции Казимира являются многозначными (например, если пространство орбит $\mathcal{G}^*/G$ не полуотделимо, то функции Казимира бесконечнозначные). В дальнейшем под функцией Казимира мы будем понимать некоторую фиксированную ветвь многозначной функции $K_\mu^{(s)}$. При этом функции Казимира $K_\mu^{(s)}$ в общем случае будут лишь локальными инвариантами коприсоединенного представления, т.е. равенство $K_\mu^{(s)}(Ad_g^* f) = K_\mu^{(s)}(f)$ имеет место для элементов g , принадлежащих некоторой окрестности единицы группы G .

Обозначим через $\Omega^{(s)} \subset R^{r_{(s)}}$ множество значений отображения $K^{(s)}: M_{(s)} \rightarrow R^{r_{(s)}}$ и введем локально-инвариантное подмножество $O_\omega^{(s)}$ — поверхность уровня

$$O_\omega^{(s)} = \{f \in M_{(s)} \mid K_\mu^{(s)}(f) = \omega_\mu^{(s)}, \mu = 1, \dots, r_{(s)}\}, \quad \omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}.$$

Размерность множества $O_\omega^{(s)}$ совпадает с размерностью орбиты $\mathcal{O}_\lambda \in M_{(s)}$, где $\omega^{(s)} = K^{(s)}(\lambda)$. Если функции Казимира однозначны, то пространство орбит отделимо, и в этом случае множество $O_\omega^{(s)}$ состоит из счетного (как правило, конечного) числа орбит.

Таким образом, пространство $\mathcal{G}^*$ состоит из объединения связных инвариантных непересекающихся алгебраических поверхностей $M_{(s)}$, которые, в свою очередь, представляют собой объединение поверхностей уровня $O_\omega^{(s)}$:

$$\mathcal{G}^* = \bigcup_{(s)} M_{(s)} = \bigcup_{(s)} \bigcup_{\omega^{(s)} \in \Omega^{(s)}} O_\omega^{(s)}. \quad (5)$$

ПРИМЕР 1 (Группа Пуанкаре). Коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре $\mathcal{P}^{1,3} = \{e_{ab}, e_a\}$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} [e_{ab}, e_{cd}] &= g_{ad}e_{bc} - g_{ac}e_{bd} + g_{bc}e_{ad} - g_{bd}e_{ac}; & [e_a, e_{bc}] &= g_{ab}e_c - g_{ac}e_b; \\ [e_a, e_b] &= 0; & a, b, c, d &= 0, 1, 2, 3; & g_{ab} &= \text{diag}(1, -1, -1, -1). \end{aligned}$$

Обозначим через $\{l_{ab}, p_a\}$ координаты ковектора f в дуальном базисе. Размерность группы Пуанкаре $n = 10$, индекс $r = 2$, и, таким образом, для алгебры Пуанкаре существуют две функции Казимира

$$K_1 = p^a p_a, \quad K_2 = W^a W_a \quad \left(W^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abcd} l_{bc} p_d \right)$$

(здесь и ниже поднятие и опускание индекса осуществляется с помощью диагональной матрицы g_{ab}).

Разложение (5) для группы Пуанкаре имеет вид

$$\begin{aligned} M_0 &= \{f \in R^{10} \mid \neg(W_a p_b - W_b p_a = 0)\}; \\ O_\omega^0 &= \{f \in M_0 \mid K_1 = \omega_1^0, K_2 = \omega_2^0\}, \quad \Omega^0 = R^2; \\ M_{1a} &= \{f \in R^{10} \mid W_a = 0, \neg(p_a = 0)\}; \\ O_\omega^{1a} &= \{f \in M_{1a} \mid K_1 = \omega_1^{1a}\}, \quad \Omega^{1a} = R^1; \\ M_{1b} &= \{f \in R^{10} \mid W_a p_0 = W_0 p_a, \neg(W_a = 0)\}; \\ O_\omega^{1b} &= \left\{f \in M_{1b} \mid \frac{W_0}{p_0} = \omega_1^{1b}\right\}, \quad \Omega^{1b} = R^1 \setminus \{0\}; \\ M_2 &= \{f \in R^{10} \mid p_a = 0, \neg(f = 0)\}; \\ O_\omega^2 &= \{f \in M_2 \mid l_{ab} l^{ab} = \omega_1^2, \varepsilon^{abcd} l_{ab} l_{cd} = \omega_2^2\}, \quad \Omega^2 = R^2; \\ M_3 &= O^3 = \emptyset; \quad M_4 = O^4 = \{f = 0\}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2 (Пятимерная неразрешимая группа). Ненулевые коммутационные соотношения этой алгебры Ли имеют вид

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= -e_1, & [e_1, e_5] &= e_2, & [e_2, e_3] &= e_1, & [e_2, e_4] &= e_2, \\ [e_3, e_4] &= -2e_3, & [e_3, e_5] &= e_4, & [e_4, e_5] &= -2e_5. \end{aligned}$$

Структура K -орбит дается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} O_\omega^0 &= \{f \in \mathcal{G}^* \mid K^0(f) \equiv f_1 f_2 f_4 + f_1^2 f_5 - f_2^2 f_3 = \omega^0; \neg(f_1 = f_2 = 0)\}; \\ O_\omega^1 &= \{f \in \mathcal{G}^* \mid f_1 = f_2 = 0; K^1(f) \equiv f_4^2 + 4f_3 f_5 = \omega^1; \neg(f = 0)\}; \\ O^2 &= \{f \in \mathcal{G}^* \mid f = 0\}. \end{aligned}$$

3. ТОЖДЕСТВА И КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим m -мерное однородное пространство $M = G/H$, где H — группа изотропии точки x_0 . В этой точке $(n - m)$ векторных полей из $\mathcal{G}$ — генераторов подгруппы

изотропии H , обращаются в нуль. Без потери общности будем считать, что $\mathcal{H} = \{X_\alpha\}$ ($\alpha = m+1, \dots, n$) – алгебра Ли группы H :

$$X_\alpha(x_0) = 0, \quad (6)$$

и, кроме того, $X_a^b(x_0) = \delta_a^b$ ($a, b = 1, \dots, m$).

Обозначим через f^x элемент кокасательного пространства (ковектор) в точке x : $f^x \in T_x^*M$, $f^x = p_a dx^a$, здесь p_a – координаты ковектора f^x в базисе dx^a , дуальном к базису ∂_{x^a} : $\langle dx^a, \partial_{x^b} \rangle = \delta_b^a$. Введем линейный функционал $f^0 \in \mathcal{G}^*$ с координатами

$$f_i^0 = \langle f^{x_0}, X_i(x_0) \rangle = X_i^a(x_0) p_a^0. \quad (7)$$

В силу (6) $f_\alpha^0 = 0$, иначе говоря, ковектор f^0 принадлежит ортогональному дополнению к алгебре $\mathcal{H}$: $f^0 \in \mathcal{H}^\perp \equiv \{f \in \mathcal{G}^* \mid \langle f, \mathcal{H} \rangle = 0\}$. Итак, мы сопоставили элементу кокасательного пространства $f^{x_0} \in T_{x_0}^*M$ ковектор $f^0 \in \mathcal{H}^\perp$. Вследствие равенства $\text{rank } X_i^a(x_0) = m$ это соответствие взаимно однозначное.

Каждому оператору $X_i(x)$ поставим в соответствие функцию на кокасательном расслоении T^*M : $X_i(x) \rightarrow X_i(x, p) = \langle f^x, X_i(x) \rangle = X_i^a(x) p_a$, которую мы будем называть *символом оператора* $X_i(x)$. Аналогично симметризованному произведению операторов сопоставим произведение их символов: $\{X_{i_1}(x) \dots X_{i_k}(x)\} \rightarrow X_{i_1}(x, p) \dots X_{i_k}(x, p)$. Таким образом, каждой симметрической функции от операторов $X_i(x)$ взаимно однозначно соответствует функция от символов $X_i(x, p)$.

Рассмотрим отображение $\Lambda: C^\infty(\mathcal{G}^*) \rightarrow C^\infty(T^*M)$ пространства почти всюду гладких функций на коалгебре $\mathcal{G}^*$ в пространство почти всюду гладких функций на кокасательном расслоении T^*M , действующее по правилу

$$\Lambda: \psi(f) \rightarrow \tilde{\psi}(x, p) = \psi(f)|_{f_i=X_i(x, p)} \equiv \psi(X(x, p)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ядро отображения Λ , т.е. совокупность функций $\Gamma(f) \in \text{Ker } \Lambda \subset C^\infty(\mathcal{G}^*)$ таких, что $\Gamma(X(x, p)) \equiv 0$, будем называть тождествами на однородном пространстве M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число независимых тождеств на однородном пространстве M будем называть индексом однородного пространства и обозначать i_M .

Иначе говоря, i_M – число независимых функциональных соотношений между символами операторов $X_i(x, p)$. Как уже обсуждалось выше, эти же соотношения имеют место и для самих операторов $X_i(x)$.

В работе [7] получена верхняя оценка размерности пространства M , у которого $i_M > 0$, а именно:

$$\dim M < \frac{1}{2}(\dim \mathcal{G} + \text{ind } \mathcal{G}). \quad (8)$$

Например, для группы Пуанкаре $P^{1,3}$ неравенство (8) дает $\dim M < 6$, и, в частности, для четырехмерного пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$, на котором транзитивно действует группа Пуанкаре, $i_M > 0$. Ниже мы покажем, что в этом случае $i_M = 3$.

ТЕОРЕМА 1. Функция $\Gamma(f) \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ является тождеством на однородном пространстве тогда и только тогда, когда ее ограничение на орбиту $G\mathcal{H}^\perp$ пространства $\mathcal{H}^\perp$ равно нулю:

$$\Gamma(f)|_{G\mathcal{H}^\perp} = 0. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть под действием элемента g группы G точка x_0 перейдет в точку x , тогда дифференциал этого отображения отобразит касательную и кокасательную плоскости в точке x_0 в соответствующие касательную и кокасательную плоскости в точке x :

$$R_g: x_0 \rightarrow x = x_0 g; \quad (10)$$

$$(R_g)^*: f^{x_0} \rightarrow f^x = (R_g)^* f^{x_0} = \frac{\partial x_0^a}{\partial x^b} p_a^0 dx^b = p_b dx^b \in T_x^* M;$$

$$(R_g)_*: X_i(x_0) \rightarrow \tilde{X}_i(x) \equiv (R_g)_* X_i(x_0) = X_i^a(x_0) \frac{\partial x^b}{\partial x_0^a} \partial_{x^b} \in T_x M. \quad (11)$$

С другой стороны, генераторы X_i группы преобразований представляют собой левоинвариантные векторные поля на группе Ли (генераторы правых сдвигов), ограниченные на пространство правых смежных классов по подгруппе H , и поэтому справедливо равенство

$$\tilde{X}_i(x) = (Ad_{g^{-1}})_i^j X_j(x).$$

Из формул (10), (11) следует также

$$\langle f^x, \tilde{X}_i(x) \rangle = \langle f^{x_0}, X_i(x_0) \rangle = f_i^0. \quad (12)$$

Исходя из определения символа оператора и учитывая формулы (11), (12), (1), получим

$$X_i(x, p) = \langle f^x, (Ad_g)_i^j \tilde{X}_j(x) \rangle = (Ad_g)_i^j X_j(x_0, p^0) = (Ad_{g^{-1}}^*)_{ij} f_j^0, \quad (13)$$

где связь между величинами x, p, x_0, p^0, f^0 определена выражениями (7), (10), (11).

Таким образом, для произвольной функции $\varphi \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$ имеем

$$\Lambda\varphi(f) = \varphi(Ad_{g^{-1}}^* f^0), \quad f^0 \in \mathcal{H}^\perp \quad (f_i^0 = X_i(x_0, p^0)). \quad (14)$$

Правая часть равенства (14) равна нулю тогда и только тогда, когда функция $\varphi(f)$ принимает нулевое значение в каждой точке орбиты $G\mathcal{H}^\perp$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует формула для индекса однородного пространства:

$$i_M = \text{codim } G\mathcal{H}^\perp, \quad (15)$$

откуда очевидным образом вытекает неравенство

$$i_M \leq n - m = \dim H. \quad (16)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть для некоторого типа орбит (s) : $M_{(s)} \cap \mathcal{H}^\perp \neq \emptyset$, но $M_{s-1} \cap \mathcal{H}^\perp = \emptyset$. В этом случае число s будем называть степенью вырождения однородного пространства M и обозначать s_M . Соответственно будем говорить, что пространство M является пространством типа (s_M) .

Введем инвариантные подпространства

$$M_{(s)}^H = G\mathcal{H}^\perp \cap M_{(s)}, \quad s \geq s_M. \quad (17)$$

Очевидно, что $M_{(s)}^H$ состоит из объединения орбит (s) -типа, имеющих ненулевое пересечение с $\mathcal{H}^\perp$, т.е.

$$M_{(s)}^H = \bigcup_{\omega \in \Omega_H^{(s)}} O_\omega^{(s)},$$

где $\Omega_H^{(s)} = K^{(s)}(M_{(s)} \cap \mathcal{H}^\perp) \subset \Omega^{(s)}$. Из формулы (5) имеем

$$G\mathcal{H}^\perp = \bigcup_{(s), s \geq s_M} M_{(s)}^H. \quad (18)$$

Разложение (18) играет центральную роль при построении неприводимых унитарных представлений группы G в пространстве функций на M , и поэтому важно иметь явный вид пространств $M_{(s)}^H$, что, впрочем, не является большой проблемой, если известно описание K -орбит (5).

С точки зрения тождеств и алгебр инвариантных операторов естественно ввести следующие критерии эквивалентности однородных пространств.

Грубый критерий: Два однородных G -пространства эквивалентны, если они имеют одинаковый тип (s_M) и индекс i_M .

Тонкий критерий: Два однородных G -пространства эквивалентны, если они имеют одинаковые подпространства $M_{(s)}^H$ в разложении (18).

Вспоминая определение пространства $M_{(s)}$, нетрудно видеть, что определение 4 эквивалентно условиям

$$F^{(s_M)}(f)|_{\mathcal{H}^\perp} \equiv 0, \quad F^{s_M+1}(f)|_{\mathcal{H}^\perp} \neq 0.$$

Очевидно, что для однородного пространства типа (s_M) функции $F^{(s_M)}(f)$ суть тождества и, кроме того, любые другие тождества в силу теоремы 1 и разложения (18) являются функциями Казимира $\tilde{K}_\mu^{(s_M)}(f)$ (s_M) -типа такими, что $\tilde{K}_\mu^{(s_M)}(f)|_{\mathcal{H}^\perp} \equiv 0$.

Таким образом, набор из независимых тождеств $\Gamma(f)$ на однородном пространстве M состоит из функций

$$\Gamma(f) = \{F_\alpha^{(s_M)}(f); \tilde{K}_\mu^{(s_M)}(f)\}. \quad (19)$$

Как будет показано ниже, индекс однородного пространства удовлетворяет дополнительному неравенству $i_M \geq n - 2m$. Объединяя это неравенство с неравенствами (16), получим

$$\max\{n - 2m, 0\} \leq i_M \leq n - m, \quad \max\left\{\frac{n-r}{2} - m, 0\right\} \leq s_M \leq \frac{n-r}{2}. \quad (20)$$

Например, для конформной группы $K^{1,3} \approx SO(2, 4)$ ($n = \dim K^{1,3} = 15$, $r = \text{ind } K^{1,3} = 3$), действующей на пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ ($m = 4$), неравенства (20) принимают вид $7 \leq i_M \leq 11$, $2 \leq s_M \leq 6$.

ПРИМЕР 1 (Группа Пуанкаре $P^{1,3}$, продолжение). Пусть группа Пуанкаре транзитивно действует на четырехмерном пространстве, тогда неравенства (20) имеют вид $2 \leq i_M \leq 6$, $0 \leq s_M \leq 4$.

А. Группа Пуанкаре действует на пространстве Минковского стандартным образом. Генераторы действия группы $P_a = \partial_{x^a}$, $L_{ab} = x_a P_b - x_b P_a$; алгебра Ли $\mathcal{H}$ группы изотропии $H = SO(1, 3)$ точки $x = 0$ порождается базисом $\{e_{ab}\}$, соответственно $\mathcal{H}^\perp = \{f = (l_{ab}, p_a) \in R^{10} \mid l_{ab} = 0\}$. Используя описание K -орбит для группы Пуанкаре, полученное нами ранее, имеем

$$M_0^H = M_{1b}^H = M_2^H = M_3^H = \emptyset, \quad M_4^H = \{0\}, \quad M_{1a}^H = M_{1a}; \quad G\mathcal{H}^\perp = M_{1a} \cup \{0\}.$$

Таким образом, наше физическое пространство-время является однородным пространством, которое мы будем называть пространством типа А, со степенью вырождения $s_M = 1$ и индексом $i_M = 3$. Все независимые функциональные связи между генераторами группы преобразований исчерпываются соотношениями $\widehat{W}^a \equiv \varepsilon^{abcd} L_{bc} P_d = 0$ (из них только три независимых).

Б. Группа Пуанкаре действует на четырехмерном пространстве с алгеброй изотропии $\mathcal{H} = \{e_{01} - e_{13}, e_{02} - e_{23}, e_{03}, e_0 + e_3, e_1, e_2\}$. Тогда

$$M_0^H = M_{1a}^H = M_3^H = \emptyset; \quad M_{1b}^H = M_{1b}; \quad M_4^H = \{0\}; \\ M_2^H = \bigcup_{\omega_2^2=0, \omega_1^2>0} O_\omega^2; \quad G\mathcal{H}^\perp = M_{1b} \cup M_2^H \cup \{0\}.$$

В этом случае однородное пространство будет называться пространством типа Б и $i_M = 3$. Функционально независимые тождества имеют вид $W_a p_0 = W_0 p_a$ ($a = 1, 2, 3$).

В. Группа Пуанкаре действует на четырехмерном пространстве с алгеброй изотропии $\mathcal{H} = e(3) = \{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_1, e_2, e_3\}$. Тогда

$$M_0^H = M_{1b}^H = M_3^H = \emptyset; \quad M_{1a}^H = M_{1a}; \quad M_4^H = \{0\}; \\ M_2^H = \bigcup_{\omega_2^2=0, \omega_1^2<0} O_\omega^2; \quad G\mathcal{H}^\perp = M_{1a} \cup M_2^H \cup \{0\}.$$

В данном случае однородное пространство имеет тип А, $i_M = 3$ и тождества такие же, как и в пункте А.

Г. Группа Пуанкаре действует на четырехмерном пространстве с алгеброй изотропии $\mathcal{H} = \{e_{01} - e_{13}, e_{02} - e_{23}, e_{12}, e_0 + e_3, e_1, e_2\}$. Тогда

$$M_0^H = M_{1b}^H = M_3^H = \emptyset; \quad M_4^H = \{0\}; \\ M_{1a}^H = \{W_a = 0, p^a p_a = 0; \neg(p_a = 0)\} = O_{\omega=0}^{1a}; \\ M_2^H = \bigcup_{\omega_2^2=0, \omega_1^2} O_\omega^2; \quad G\mathcal{H}^\perp = M_{1a}^H \cup M_2^H \cup \{0\}.$$

Однородное пространство имеет тип А и $i_M = 4$. Функционально независимые тождества имеют вид $W_a = 0$, $p_a p^a = 0$.

Пространства А и В эквивалентны с точки зрения грубого критерия, а с точки зрения тонкого критерия все выше рассмотренные пространства попарно не эквивалентны.

В заключение данного раздела отметим, что подобная классификация всех четырехмерных однородных пространств с группами движений Пуанкаре и де Ситтера была проведена в работе [8].

4. ДЕФЕКТ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Каждому однородному пространству M сопоставим целое неотрицательное число

$$d(M) = m + i_M - s_M - \frac{1}{2}(n + r), \quad (21)$$

которое мы будем называть *дефектом однородного пространства*. Дефект играет важную роль в теории гармонического анализа на однородных пространствах и в методах интегрирования дифференциальных уравнений [9]. В частности, в следующем разделе будет показано, что при $d(M) > 0$ алгебра инвариантных дифференциальных операторов на однородном пространстве некоммутативна. В настоящем разделе мы получим явные формулы для вычисления дефекта, индекса и степени вырождения однородного пространства.

Используя определение степени вырождения и индекса однородного пространства, а также формулу (15), перепишем выражение (21) в виде

$$d(M) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda - (\dim G\mathcal{H}^\perp - \dim \mathcal{H}^\perp). \quad (22)$$

Здесь и ниже λ – элемент общего положения пространства $\mathcal{H}^\perp$. Первый член в правой части этого равенства может быть вычислен по формуле

$$\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda \equiv \frac{1}{2}(n - r) - s_M = \frac{1}{2} \operatorname{rank} C_{ij}(\lambda) \equiv \frac{1}{2} \operatorname{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle.$$

Член в круглых скобках в (22) равен числу линейно независимых векторов $Y_{(\mu)} = C_{(\mu)}^i Y_i(\lambda)$ ($Y_i(\lambda)$ определены формулой (4)), трансверсальных к пространству $\mathcal{H}^\perp$. Иначе говоря,

$$\dim G\mathcal{H}^\perp - \dim \mathcal{H}^\perp = \operatorname{rank} C_{i\alpha}(\lambda) \equiv \operatorname{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \rangle.$$

Таким образом, дефект однородного пространства можно вычислить по формуле

$$d(M) = \frac{1}{2} \operatorname{rank} C_{ij}(\lambda) - \operatorname{rank} C_{i\alpha}(\lambda), \quad (23)$$

или в инвариантном виде

$$d(M) = \frac{1}{2} \operatorname{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle - \operatorname{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \rangle = \frac{1}{2} \dim \mathcal{G}/\mathcal{G}^\lambda - \dim \mathcal{H}/\mathcal{H}^\lambda,$$

где $\mathcal{G}^\lambda$ – аннулятор ковектора $\lambda \in \mathcal{H}^\perp$, $\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}^\lambda$.

Сопоставляя формулы (23) и (21), получим

$$s_M = \frac{1}{2}(n - r) - \frac{1}{2} \operatorname{rank} C_{ij}(\lambda), \quad i_M = \dim H - \operatorname{rank} C_{a\alpha}(\lambda), \quad (24)$$

или в инвариантной форме

$$s_M = \frac{1}{2} \operatorname{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle - \frac{1}{2} \operatorname{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \rangle = \frac{1}{2} (\dim \mathcal{G}/\mathcal{G}^\lambda - \dim \mathcal{H}/\mathcal{H}^\lambda),$$

$$i_M = \dim \mathcal{H} - \operatorname{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \rangle = \dim \mathcal{H}^\lambda.$$

Среди всех однородных пространств симметрические пространства занимают особое, привилегированное место. Это проявляется и при рассмотрении их с точки зрения K -орбит.

ТЕОРЕМА 2. *Произвольное симметрическое пространство имеет нулевой дефект.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{H}$ — подалгебра, то для произвольного элемента $\lambda \in \mathcal{H}^\perp$ справедливы равенства $C_{\alpha\beta}(\lambda) = 0$, $\operatorname{rank} C_{i\alpha}(\lambda) = \operatorname{rank} C_{a\alpha}(\lambda)$ и матрица $C_{ij}(\lambda)$ имеет следующую структуру:

$$C_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} C_{ab}(\lambda) & C_{a\alpha}(\lambda) \\ -C_{a\alpha}(\lambda) & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Известно, что алгебра Ли $\mathcal{G}$ группы движений симметрического пространства $\mathbb{Z}_2$ -градуированна и представляет собой прямую сумму подпространств $\mathcal{G} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ — алгебра изотропии некоторой точки x_0 симметрического пространства M , $\mathcal{H}_1$ естественным образом отождествляется с касательной плоскостью $T_{x_0}M$. Коммутационные соотношения алгебры $\mathcal{G}$ имеют следующую структуру:

$$[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0] \subset \mathcal{H}_0, \quad [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] \subset \mathcal{H}_1, \quad [\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1] \subset \mathcal{H}_0.$$

Это означает, что в формуле (25) для произвольного $\lambda \in \mathcal{H}^\perp$ имеем $C_{ab}(\lambda) = 0$, и, следовательно, $\operatorname{rank} C_{ij}(\lambda) = 2 \operatorname{rank} C_{i\alpha}(\lambda)$. Подстановка в (23) завершает доказательство теоремы.

Отметим, что существуют однородные пространства с нулевым дефектом, не являющиеся симметрическими, т.е. обратное утверждение к теореме 2 не верно.

ПРИМЕР 1 (Группа Пуанкаре $P^{1,3}$, продолжение). Для пространств типов А, Б, В дефект $d(M) = 0$, а для пространства типа Г дефект $d(M) = 1$. Следует отметить, что это единственное четырехмерное пространство с ненулевым дефектом [8]. Пространства А и В являются симметрическими, и поэтому равенство нулю их дефекта есть следствие теоремы 2, пространство Б представляет собой пример однородного несимметрического пространства с нулевым дефектом.

5. F -АЛГЕБРЫ ИНВАРИАНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть π – проекция группы G на пространство правых смежных классов $M = G/H$, s – борелевское отображение M в G такое, что $\pi \circ s = \text{id}$. Тогда каждый элемент g группы G однозначно записывается в виде

$$g = hs(x), \quad x \in M, \quad h \in H. \quad (26)$$

Кроме того, каждую функцию на однородном пространстве M можно отождествить с функцией на группе Ли G , которая постоянна на каждом правом классе смежности, т.е. удовлетворяет условию $\varphi(hg) = \varphi(g)$, $g \in G$, $h \in H$, что эквивалентно следующему:

$$\eta_\alpha \varphi(g) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n - m, \quad \varphi \in C^\infty(G), \quad (27)$$

где η_α – правоинвариантные векторные поля, образующие подалгебру изотропии $\mathcal{H}$.

Выпишем в координатах (h^α, x^a) (единица e группы G имеет координаты $e = (0, x_0)$) правоинвариантные векторные поля, соответствующие подалгебре изотропии, а также левоинвариантные векторные поля на группе G :

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha^\beta(h) \partial_{h^\beta}, \quad \xi_i = \xi_i^\alpha(h, x) \partial_{h^\alpha} + X_i^a(x) \partial_{x^a}.$$

Из условия $\det \eta_\alpha^\beta \neq 0$ и из вышеприведенных формул следует вполне очевидный результат: в координатах (h, x) функции на G , постоянные на каждом правом классе смежности, не зависят от переменных h и генераторы группы преобразований X_i являются ограничением левоинвариантных полей на пространство правых смежных классов, т.е. $X_i = \pi_* \xi_i$. Очевидно, что множество дифференциальных (и псевдодифференциальных) операторов, коммутирующих со всеми ξ_i , принадлежит обертывающему полю $E(\mathcal{G}^R)$ от алгебры правоинвариантных полей $\mathcal{G}^R = \{\eta_i\}$. Это же утверждение справедливо и при ограничении на M . (Мы считаем, что элементами обертывающего поля $E(\mathcal{G}^R)$ являются почти всюду аналитические симметрические функции от базисных операторов алгебры $\mathcal{G}^R$.) Однако не все элементы из $E(\mathcal{G}^R)$ допускают корректное ограничение. В силу условия (27) корректное ограничение на M допускают лишь H -инвариантные операторы. Иначе говоря, инвариантным псевдодифференциальным оператором на M будет являться ограничение операторной функции $\zeta(-i\hbar\eta) \in E(\mathcal{G}^R)$, удовлетворяющей условию

$$[\eta_\alpha, \zeta(-i\hbar\eta)] = C_\alpha^\beta(\eta) \eta_\beta. \quad (28)$$

Здесь $\hbar$ – вещественный вспомогательный параметр, C_α^β – некоторые элементы из $E(\mathcal{G}^R)$.

Обозначим через $\tilde{E}$ множество всех решений уравнения (28), которые образуют алгебру относительно обычной операции умножения операторов. Из формулы (28) следует, что множество $E(\mathcal{G}^R)\mathcal{H}^R$ является двусторонним идеалом в алгебре $\tilde{E}$ и при проецировании на M каждый элемент из этого множества переходит в нулевой оператор. Вследствие этого алгебра $D(M)$ инвариантных операторов на M изоморфна фактор-алгебре $\tilde{E}/E(\mathcal{G}^R)\mathcal{H}^R$.

Введем линейное пространство F с базисом $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$, являющимся максимальным набором функционально независимых нетривиальных решений уравнения (28). Это значит, что алгебра инвариантных операторов на M изоморфна обертывающему полю $E(F)$ и последнее не содержит делителей нуля. Базисные элементы ζ_μ имеют в общем случае нелинейные коммутационные соотношения

$$\frac{i}{\hbar}[\zeta_\mu, \zeta_\nu] = \Omega_{\mu\nu}(\zeta) \in E(F). \quad (29)$$

Линейное пространство F с базисом $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ и с коммутационными соотношениями (29) будем называть *функциональной алгеброй* или *F-алгеброй*.

Считая, что все операторы ζ_μ являются симметрическими функциями от операторов $-i\hbar\eta$, определим “классический” предел оператора $\zeta_\mu(-i\hbar\eta)$ как функцию $a_\mu(f)$ на коалгебре $\mathcal{G}^*$, полагая

$$a_\mu(f) \equiv \lim_{\hbar \rightarrow 0} \zeta_\mu(f). \quad (30)$$

(Отличие функций $a_\mu(f)$ от функций $\zeta_\mu(f)$ обусловлено возможной некоммутативностью операторов η_β и $C_\alpha^\beta(\eta)$ в формуле (28).) Относительно обычной скобки Пуассона на коалгебре (2) функции $a_\mu(f)$ образуют пуассонову алгебру с нелинейными коммутационными соотношениями

$$\{a_\mu, a_\nu\} = \Omega_{\mu\nu}^{cl}(a), \quad \Omega_{\mu\nu}^{cl}(a) \equiv \lim_{\hbar \rightarrow 0} \Omega_{\mu\nu}(a). \quad (31)$$

Таким образом, F -алгебре инвариантных операторов соответствует пуассонова алгебра с коммутационными соотношениями (31), и функции $a_\mu(f)$ определяют “главную” часть инвариантных операторов ζ_μ .

Нетрудно видеть, что набор $\{a_1(f), \dots, a_k(f)\}$ порождает кольцо тождественно непостоянных на $\mathcal{G}^*$ функций, ограничение которых на подпространство $\mathcal{H}^\perp$ постоянно и не равно нулю на орбитах коприсоединенного представления подгруппы H , т.е. функций $a(f)$, удовлетворяющих условию $a(\text{Ad}_h^* \lambda) = a(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{H}^\perp$, $h \in H$. Последнее условие в силу связности группы H эквивалентно следующему:

$$\{f_\alpha, a\}(\lambda) \equiv \left(C_{\alpha i}(f) \frac{\partial a(f)}{\partial f_i} \right) \Big|_{f=\lambda} = \left(C_{\alpha a}(f) \frac{\partial a(f)}{\partial f_a} \right) \Big|_{f=\lambda} = 0, \quad \lambda \in \mathcal{H}^\perp. \quad (32)$$

Размерность F -алгебры определяется рангом матрицы $C_{a\alpha}(\lambda)$:

$$k \equiv \dim F = m - \sup_{\lambda \in \mathcal{H}^\perp} \text{rank } C_{a\alpha}(\lambda).$$

Выражая ранг матрицы $C_{a\alpha}$ из формулы (24), получим

$$\dim F = i_M + 2m - n. \quad (33)$$

Из неотрицательности числа k , в частности, следует ограничение снизу на индекс однородного пространства (20).

Максимальное число независимых функций из обертывающего поля $E(F)$, порождающих центр F -алгебры, назовем *индексом* F -алгебры ($\text{ind } F$). Нетрудно видеть, что индекс F -алгебры совпадает с числом нетривиальных функций Казимира (s_M)-типа:

$$\text{ind } F = r + 2s_M - i_M. \quad (34)$$

Обозначим через F^* k -мерное линейное пространство с базисом $\{a_1, \dots, a_k\}$. Бесконечномерное пространство гладких функций на F^* является пуассоновой алгеброй относительно скобки (31):

$$\{\phi_1(a), \phi_2(a)\} \equiv \frac{\partial \phi_1(a)}{\partial a_\mu} \frac{\partial \phi_2(a)}{\partial a_\nu} \Omega_{\mu\nu}^{cl}(a). \quad (35)$$

Каждой функции $\phi(a)$ однозначно соответствует касательное векторное поле на F^* :

$$\text{sgrad } \phi(a) \equiv \frac{\partial \phi(a)}{\partial a_\mu} \tilde{Y}_\mu,$$

где

$$\tilde{Y}_\mu = \text{sgrad } a_\mu \equiv \Omega_{\mu\nu}^{cl}(a) \frac{\partial}{\partial a_\nu}.$$

Все касательные векторы $\text{sgrad } \phi(a)$ лежат в плоскости $\pi(a) = \{\tilde{Y}_\mu(a)\}$, являющейся линейной оболочкой базисных векторов $\{\tilde{Y}_\mu(a)\}$. Из тождества Якоби для скобки Пуассона (35) следует инволютивность векторных полей $\tilde{Y}_\mu(a)$:

$$[\tilde{Y}_\mu, \tilde{Y}_\nu](a) = \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}^{cl}(a)}{\partial a_\sigma} \tilde{Y}_\sigma(a),$$

и согласно теореме Фробениуса распределение плоскостей $\pi(a)$ интегрируемо. Интегральные многообразия распределения $\pi(a)$ называются *симплектическими листами*. Симплектические листы играют роль невырожденных K -орбит в случае групп Ли. Ограничение скобки Пуассона (35) на симплектический лист невырожденно и определяет на нем симплектическую структуру.

Каждый симплектический лист общего положения O_σ (σ — параметры поверхности O_σ), как поверхность в F^* , определяется равенствами

$$O_\sigma = \{a \in F^* \mid Z_t(a) = \sigma_t - \text{const}, t = 1, \dots, \text{ind } F\},$$

где функции $Z_t(a)$ находятся из уравнений $\tilde{Y}_\mu Z_t(a) = 0$. Функции $Z_t(a)$, коммутирующие с любыми функциями на F^* , так же как и в случае группы Ли, называются функциями Казимира.

С учетом формул (33), (34), (21) нетрудно найти размерность симплектического листа:

$$\dim O_\sigma = \dim F - \text{ind } F = 2d(M). \quad (36)$$

Обозначим через $E(\mathcal{G}^L)$ обертывающее поле от алгебры $\mathcal{G}^L = \{X_i\}$ — генераторов группы преобразования, и сформулируем полученные выше результаты в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра $D(M)$ инвариантных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов на однородных пространствах нулевого дефекта коммутативна и является центром поля $E(\mathcal{G}^L)$. Для пространств положительного дефекта алгебра инвариантных операторов некоммутативна, не принадлежит полю $E(\mathcal{G}^L)$ и имеет с последним лишь общий центр.*

В работе [10] показано, что алгебра инвариантных операторов на слабосимметрических пространствах коммутативна. Тогда из теоремы 3 следует, что и слабосимметрические пространства являются пространствами нулевого дефекта.

ПРИМЕР 1 (Группа Пуанкаре $P^{1,3}$, продолжение). Так как пространства A , B , V имеют нулевой дефект, то согласно теореме 3 и формуле (33) алгебра инвариантных операторов порождается одним нетривиальным оператором Казимира $\hat{K}$ соответствующего типа: $\hat{K} = X_a X^a$ для пространств A , B и $\hat{K} = \hat{W}^0/X_0$ для пространства типа B . Отметим, что в этом случае оператор Казимира нелокален, но так как X_0 коммутирует с любыми операторами, входящими в состав оператора $\hat{W}^0 \equiv (1/2)\varepsilon^{0abc}X_{ab}X_c$, то проблема упорядочения операторов здесь не возникает. Для пространства типа Γ формулы (33), (34) дают $\dim F = 2$, $\text{ind } F = 0$. Это означает, что алгебра инвариантных операторов $D(M) \approx E(F)$ (а также поле $E(\mathcal{G}^L)$) центра не имеет и порождается двумя некоммутирующими операторами. Проиллюстрируем на этом примере процедуру нахождения F -алгебры.

В этом случае $\mathcal{H}^\perp = \{(f_{ab}, f_a) \in R^{10} \mid f_1 = f_2 = f_0 + f_3 = f_{01} - f_{13} = f_{02} - f_{23} = f_{12} = 0\}$, и поскольку нас интересует ограничение на $\mathcal{H}^\perp$, то можно считать $a = a(f_0, f_{01}, f_{02}, f_{03})$. Легко проверить, что произвольная функция $a = a(f_0, f_{03})$ удовлетворяет уравнениям (32). Полагая $a_1 = f_0|_{\mathcal{H}^\perp}$, $a_2 = f_{03}|_{\mathcal{H}^\perp}$, найдем пуассонову структуру: $\{a_1, a_2\} = \{f_0, f_{03}\}|_{\mathcal{H}^\perp} = f_3|_{\mathcal{H}^\perp} = -f_0|_{\mathcal{H}^\perp} = -a_1$. Так как функции a_1, a_2 линейны, то $\zeta_1(f) = a_1(f)$, $\zeta_2(f) = a_2(f)$, т.е. $\zeta_1 = -i\hbar\eta_0|_M$, $\zeta_2 = -i\hbar\eta_{03}|_M$. Легко проверить выполнение условия (28) и справедливость соотношения $(i/\hbar)[\zeta_1, \zeta_2] = -\zeta_1$.

ПРИМЕР 2 (Пятимерная неразрешимая группа, продолжение). Рассмотрим однородное пространство $M = G/H$, где $H = \exp(te_5)$ – одномерная подгруппа. Это пространство невырожденно, $s_M = i_M = 0$, из (33), (34), (36) следует $\dim F = 3$, $\text{ind } F = 1$, $d(M) = 1$. Решая уравнения (32), найдем три неизвестные функции $a(f)$: $a_1 = f_2$, $a_2 = f_4$, $a_3 = f_1f_4 - f_2f_3$. Последние являются символами инвариантных операторов и после замены $f_i \rightarrow -i\hbar\eta_i$ определяют коэффициенты при старших производных. Нетрудно восстановить явный вид инвариантных операторов ζ_μ :

$$\zeta_1 = -i\hbar\eta_2|_M, \quad \zeta_2 = -i\hbar\eta_4|_M, \quad \zeta_3 = -\hbar^2(\eta_1\eta_4 - \eta_2\eta_3)|_M.$$

Выпишем коммутационные соотношения F -алгебры, которая в данном случае совпадает с трехмерной разрешимой алгеброй Ли:

$$\frac{i}{\hbar}[\zeta_1, \zeta_2] = \zeta_1, \quad \frac{i}{\hbar}[\zeta_1, \zeta_3] = 0, \quad \frac{i}{\hbar}[\zeta_2, \zeta_3] = \zeta_3.$$

Единственная функция Казимира для F -алгебры имеет вид $Z(a) = a_1a_3$, соответственно инвариантный оператор $\zeta_1\zeta_3$, лежащий в центре алгебры $E(F)$, совпадает с кубическим оператором Казимира $K^0(i\hbar X)$.

Список литературы

- [1] У. Миллер. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
- [2] В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, А. В. Шаповалов, И. В. Широков. ТМФ. 1990. Т. 83. № 1. С. 14–22.
- [3] А. А. Кириллов. УМН. 1962. Т. 17. № 4. С. 57–110.
- [4] А. А. Кириллов. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
- [5] А. А. Кириллов. Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 22. Теория представлений и некоммутативный гармонический анализ. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–162.
- [6] И. В. Широков. ТМФ. 2000. Т. 123. № 3. С. 407–423.
- [7] А. В. Шаповалов, И. В. Широков. ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 195–213.
- [8] С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков. Изв. вузов. Физика. 2000. Т. 43. № 11. С. 72–78.
- [9] И. В. Широков. К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений. Препринт. Омск: ОмГУ, 1998.
- [10] D. N. Akhiezer, E. B. Vinberg. Transformation Groups. 1999. V. 4. № 1. P. 3–24.

Поступила в редакцию 24.VIII.2000 г.