Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, Асимптотика старших порядков теории возмущений: константы ренормировки $O(n)$ -симметричной теории ϕ^4 в $(4 - \epsilon)$ -разложении, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 3, 409–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf438>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:45:13

© 2001 г.

М. В. Комарова*, М. Ю. Налимов*

АСИМПТОТИКА СТАРШИХ ПОРЯДКОВ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: КОНСТАНТЫ РЕНОРМИРОВКИ $O(n)$ -СИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ϕ^4 В $(4 - \epsilon)$ -РАЗЛОЖЕНИИ

На основе инстантонного подхода найдены асимптотики высоких порядков разложения констант ренормировки и критических индексов O_n -симметричной теории $\phi^4(4-\epsilon)$ в схеме минимальных вычитаний. Обнаружены значительные отклонения точно известных к настоящему моменту членов разложений от асимптотических значений. Предложены выражения, экстраполирующие неизвестные члены разложений констант ренормировки с помощью поправок к полученным асимптотикам.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование асимптотик старших порядков рядов теории возмущений основывается на предложенном в статье [1] методе перевала в функциональном интеграле. Результаты [1] были применены авторами работы [2] для исследования рядов разложений критических индексов, получаемых методом ренормализационной группы (РГ). Эти ряды асимптотические, поэтому для получения численных значений индексов в реальных размерностях пространства используются разнообразные схемы пересуммирования, такие как методы Бореля–Лероя, паде-аппроксимант и конформных отображений [3]. Данная тематика вызывала значительный интерес и в последнее время [4]–[7].

Как утверждается в работе [8], известная асимптотика дает информацию, позволяющую выбирать параметры, фиксирующие произвол схемы пересуммирования. Поэтому важен вопрос о том, насколько вычисленные к настоящему моменту коэффициенты разложений близки к асимптотическим значениям.

Согласно [1] N -й коэффициент стандартного теоретико-полевого разложения по константе взаимодействия g произвольной величины F (выражаемой через функции Грина) при больших N имеет вид

$$F^{(N)} \approx e^{N \ln N - N} a^N N^{b_F} c_F. \quad (1)$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия. E-mail: nalimov@snoopy.phys.spbu.ru

Здесь и далее $X^{(N)}$ обозначает коэффициент при g^N разложения величины X в ряд по g . Константы a и b_F вычислялись для произвольных функций Грина в [3]; в работах [1], [2] приведены амплитуды c_F для β -функций теорий ϕ^{2m} ($m = 2, 3, \dots$) в логарифмических размерностях пространства. Соответствующие результаты для теории ϕ^4 в 2- и 3-мерных пространствах основываются на численных решениях уравнений стационарности массивной модели [9]. Существуют по крайней мере два подхода к РГ-вычислению критических индексов: $(4-\epsilon)$ -разложение и непосредственно РГ-метод в реальной размерности пространства (см. [3], [10]). Технически они существенно различаются, мы ограничимся рассмотрением первого из них. В работе [8], посвященной обсуждению различных схем пересуммирования рядов для критических индексов, как и в [3], амплитуды c_F для $(4-\epsilon)$ -разложений не приведены вовсе. В работе [11] утверждается, что они вычислены в [12], а в следующей работе тех же авторов [13] объявлено (со ссылкой на [3]), что не только c , но и b для $(4-\epsilon)$ -разложения неизвестны.

Попробуем прояснить эту необычную ситуацию. В статьях [1], [2] для старших порядков разложения, например, вершинной функции $\phi^4(O_n)$ -теории в четырехмерном пространстве получено

$$\Gamma_4^{(N)} \approx \text{const} \int_0^\infty \frac{dy}{y} e^{\frac{1}{3}(n+8)\ln y} \left(\prod_{k=1}^4 [p_k | y K_1(p_k | y)] \right), \quad (2)$$

где вычисленная const зависит от N , K_1 — функция Макдональда. Здесь приведена частично ренормированная функция, в которой осуществлены вычитания на расходимости однопетлевых подграфов (следующие порядки разложения констант ренормировки признаны несущественными вследствие малости по $1/N$). В теориях ϕ^{2m} ($m > 2$) для асимптотики вершинной функции известно выражение, аналогичное (2), но без члена $\exp\{((n+8)\ln y)/3\}$. Ультрафиолетовые (УФ) расходимости в этих формулах проявляются в интегралах по y при $y \rightarrow 0$ (y — масштабный параметр). Несложно убедиться, что в формуле (2) УФ-расходимости отсутствуют: множитель $\exp\{((n+8)\ln y)/3\}$ регуляризует интеграл в области малых y . Более того, аналогичным свойством обладает и вычисленный в работе [14] поправочный по $1/N$ член рассматриваемой асимптотики: в нем УФ-расходимости пропадают при учете двухпетлевых вкладов в константы ренормировки.

Известный способ вычисления констант ренормировки [10] основан на том, что вклад в Z данной диаграммы определяется расходимостью, оставшейся после применения к ней R' -операции, вычитающей все расходимости подграфов. Иначе говоря, для определения вклада в константы ренормировки совокупности диаграмм некоторого порядка следует рассмотреть частично ренормированную теорию, в которой все указанные константы учтены с точностью на один порядок меньше. Результаты работ [1], [2], [14] дают лишь конечные вклады диаграмм в константы ренормировки (нулевые в схеме минимальных вычитаний (МВ)). С учетом ренормализационной инвариантности теории это означает, что диаграммы не дают никакого вклада в критические индексы.

Для исправления этой ситуации (отсутствия полюсов по ϵ) в работе [12] была предложена принципиально новая пертурбативная ренормировочная схема. В ней обнаружена пертурбативная фиксированная точка уравнения РГ, координаты которой не

являются аналитическими функциями ϵ . К сожалению, непертурбативный характер схемы не позволяет сравнивать ее результаты с соответствующими результатами обычного $(4 - \epsilon)$ -разложения.

Мы утверждаем, что отсутствие вкладов в асимптотику старших порядков разложения критических индексов в работах [12], [13] является следствием некорректного использования метода стационарной фазы при рассмотрении однопетлевых контрчленов в теории ϕ^4 (в теориях ϕ^{2m} ($m > 2$) сложностей не возникает). Проблема связана с тем, что метод вычисления асимптотики больших N не вполне согласуется с теорией ренормировки. Действительно, константы ренормировки естественно вычисляются в форме разложения по числу петель (имеется в виду структура R -операции). Вычисление методом стационарной фазы асимптотики при больших N тоже проводится с помощью петлевого разложения [10], но, строго говоря, $1/N$ не является параметром этого разложения. Нулевой порядок разложения по петлям (так называемые “древесные” диаграммы) пропорционален не нулевой степени $1/N$, а большому параметру N , поэтому первый порядок (однопетлевые диаграммы) пропорционален единице и не содержит малости по $1/N$. При использовании метода работ [1], [2], [14] асимптотики старших порядков теории ϕ^4 в результате вычитания расходимостей однопетлевых вершинных подграфов в выражении (2) появляется множитель $\exp\{((n+8)\ln y)/3\}$. Этот множитель является суммой логарифмических по y вкладов порядка единицы по $1/N$, поэтому он оставлен в виде экспоненты и устраняет поверхностную УФ-расходимость в произвольном порядке $1/N$ -асимптотики.

В рамках $(4 - \epsilon)$ -разложения наибольшее количество порядков для критических индексов (до ϵ^5 включительно [15]) было получено с использованием размерной регуляризации и схемы МВ в безмассовой теории. В этой схеме РГ-функции (коэффициенты уравнения РГ) связаны известным образом [16], [3], [10] с вычетами первого порядка по ϵ констант ренормировки теории:

$$\gamma_i(g) = -g\partial_g\{Z_i\}, \quad \beta(g) = -g(\epsilon + \gamma_g), \quad (3)$$

здесь и далее $\{X\}$ – вычет в полюсе первого порядка по ϵ величины X , $i = \tau, \phi, g$. В безмассовой теории критическая размерность τ определяется ренормировкой составного оператора ϕ^2 .

Константы ренормировки имеют смысл лишь в рамках определенной теории возмущений и не могут рассматриваться вне ее. Мы предлагаем вернуться к исходной форме разложения для учета вкладов расходимостей однопетлевых подграфов. Технически это означает использование вместо (2) асимптотически эквивалентного при больших N выражения, дающего, впрочем, принципиально иное УФ-поведение. А именно, вклад N -го порядка теории возмущений по g теперь содержит необходимые полюсы по ϵ , коэффициенты при которых вычисляются в форме $1/N$ -разложения. В схеме МВ оказалось несложным проконтролировать то, что поправочные члены стафазного вычисления функциональных интегралов дают поправочные же по $1/N$ вклады в РГ-функции. Изменение результата при использовании асимптотически эквивалентного выражения

не означает, что существует возможность получить произвольный ответ. Существенно здесь лишь то, конечное или бесконечное количество членов разложения выражения типа $\exp\{((n+8)\ln y)/3\}$ в (2) принимается во внимание.

Развитие метода перевала [17], [18] позволило аналитически вычислять липатовские асимптотики разложения различных величин не только в четырехмерном пространстве, как в [1], [2], но и в размерности $(4-\epsilon)$. Впрочем, в [17], [18] используется та же форма (2), поэтому результаты этих работ, касающиеся РГ, нельзя признать безупречными.

Нами вычислены асимптотики членов разложения констант ренормировки и критических индексов теории ϕ^4 в размерной регуляризации и МВ-схеме. Проведено их сравнение с современными результатами непосредственного расчета. Отклонения оказываются существенными, что ослабляет теоретическую обоснованность детерминированности коэффициентов схемы Бореля–Лероя пересуммирования рядов ϵ -разложения критических индексов [8].

Кроме того, мы попытались экстраполировать значения неизвестных членов разложения констант ренормировки (шестой порядок и далее) с помощью поправочного по $1/N$ члена в правой части формулы (1), определенного по разнице точно вычисленного пятого порядка и соответствующего $N = 5$ асимптотического значения (1).

Во втором разделе данной работы кратко излагаются основные моменты использования метода перевала в функциональных интегралах и особенности, связанные с рассмотрением $(4-\epsilon)$ -мерного пространства. В третьем разделе предложена модификация схемы, позволяющая вычислять асимптотики констант ренормировки в ϕ^4 -теории. В четвертом – вычислены асимптотики коэффициентов разложения констант ренормировки и критических индексов, проведено их сравнение с известными членами разложений, получены экстраполяционные формулы для старших порядков ϵ -разложения. В заключении обсужден вопрос о влиянии полученных результатов на выбор параметров схем пересуммирования рядов для критических индексов. Вклад поправочных по $1/N$ членов метода перевала в вычисленные асимптотики рассмотрен в приложении.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛИПАТОВСКОГО ПОДХОДА

Приведем основные положения работ [1], [2], [17], [18], используемые при вычислении асимптотик старших порядков разложений. Рассматривается теория с действием

$$S_R(\phi, g) = \frac{1}{2} Z_\phi^2 \partial_i \phi_\alpha \partial_i \phi_\alpha + \frac{1}{2} Z_\phi^2 Z_\tau \tau \phi^2 + \frac{1}{4!} Z_\phi^4 Z_g g \mu^\epsilon (\phi^2)^2 \quad (4)$$

в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$. Здесь ϕ – это n -компонентное векторное поле, свертки по повторяющимся векторным индексам и интегрирования по координатам здесь и в аналогичных формулах в дальнейшем подразумеваются, Z_i – константы ренормировки, μ – ренормировочная масса.

Вычисление коэффициентов $G_k^{(N)}$ разложения k -хвостой функции Грина $G_k(g)$ по константе связи g в высоких порядках ($N \rightarrow \infty$) осуществляется на основе интегрального представления [1]

$$G_k^{(N)} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dg}{(-g)^{N+1}} G_k(g) \quad (5)$$

(γ – замкнутый контур в комплексной плоскости g , охватывающий ноль) с последующим применением метода перевала. Вариационные уравнения $\partial J/\partial g = 0$, $\delta J/\delta \phi = 0$, $(J(\phi, g) = S_R(\phi, g) + N \ln(-g))$ не имеют решений (ϕ_c, g_c) при $D = 4$ в массивном ($\tau \neq 0$) случае [19] и при $D \neq 4$ в безмассовом случае ($\tau = 0$). Согласно [1], [2] $\phi_c \sim N^{1/2}$, $g_c \sim 1/N$, поэтому контрчлены действия (4) несущественны при вычислении точки стационарности, и вариационные уравнения принимают вид

$$-\Delta \phi_\alpha + \tau \phi_\alpha + \frac{1}{6} g \mu^\epsilon \phi^2 \phi_\alpha = 0, \quad \frac{g \mu^\epsilon}{4!} \int d\mathbf{x} (\phi(\mathbf{x})^2)^2 = -N. \quad (6)$$

Семейство решений уравнений (6) в безмассовой теории при $D = 4$ найдено в работе [1] и имеет вид сферически-симметричных, убывающих функций, зависящих от $\mathbf{x}_0$, y – произвольных параметров, отражающих трансляционную и дилатационную инвариантности теории, и $\mathbf{u}$ – произвольного единичного вектора – следа n -мерной вращательной инвариантности. Чтобы учесть этот факт, при исследовании асимптотики применяется прием Фаддеева–Попова [1], [17], заключающийся во введении под знак функционального интеграла для функции Грина представления единицы в виде интегралов по параметрам $x_0, y, \mathbf{u}$ от δ -функций, фиксирующих значения этих параметров для каждого ϕ . Растяжение координат и поля

$$\mathbf{x} \rightarrow y\mathbf{x} + \mathbf{x}_0, \quad \phi(y\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \rightarrow y^{-1+\frac{\epsilon}{2}} \phi(\mathbf{x}), \quad (7)$$

изменение порядков интегрирования по параметрам $\int dy d^D x_0 d^n u$ и переменным $\oint dg \times \int \mathcal{D}\phi$ и последующее применение метода перевала по g и ϕ приводят к окончательному выражению для асимптотик корреляционных функций.

В таком подходе решена также проблема отсутствия перевальных точек при $D = 4 - \epsilon$ в безмассовой теории. Как показано в работе [18], в этом случае следует искать функции, реализующие экстремум действия, предварительно зафиксировав масштабный параметр y . Введенное дополнительное условие

$$\left\langle \int d^D x \phi^4(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\mathbf{x}}{y} \right)^2 \right\rangle = 0$$

приводит к появлению члена $\varrho \tilde{\phi}_c^3(\mathbf{x}) \ln(x^2)$ (ϱ – множитель Лагранжа) в первом уравнении (6). Теперь решения уравнений (6) существуют и могут быть найдены аналитически в виде рядов по ϵ . При растяжении поля и координат (7) параметры μ и ϱ заменятся на эффективные: $\mu \rightarrow \mu y$, $\varrho \rightarrow \varrho y^\epsilon$. Чтобы указывать в последующих выражениях зависимость от N, y, μ явно, перейдем к переменным

$$\bar{\phi} = \frac{\phi}{\sqrt{N}}, \quad \bar{g} = Ng(\mu y)^\epsilon, \quad \bar{\varrho} = \frac{\varrho y^\epsilon}{N}. \quad (8)$$

В результате выражение для асимптотики больших N коэффициента разложения по g неренормированной функции Грина принимает вид [1], [17]

$$G_k^{(N)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = (-1)^N D^* L_k N^N N^{\frac{1}{2}(k+n+3)} e^{-NS(\bar{\phi}_c, \bar{g}_c(\mu y)^{-\epsilon}) - N \ln(-\bar{g}_c)} \times \\ \times \int d^D \mathbf{x}_0 \int_0^\infty \frac{d(y^2)}{y^{D+2}} \frac{(\mu y)^{N\epsilon}}{y^{k(\frac{D}{2}-1)}} \bar{\phi}_c\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{y}\right) \dots \bar{\phi}_c\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{y}\right), \\ L_k = \frac{S_n(k-1)!!}{n(n+2) \dots (n+k-2)}, \quad S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad (9)$$

в нулевом по ϵ порядке

$$\bar{\phi}_c^{(0)}(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)}, \quad \bar{g}_c^{(0)} = -16\pi^2. \quad (10)$$

Под D^* в (9) подразумевается гауссов вклад от второй вариации функционала J в перевальной точке. При $D = 4$ он был вычислен разными способами в [1] при $n = 1$ и в [2] при произвольном n :

$$\overline{D}^* = 2^{\frac{7-4n}{2}} 3^{\frac{5n}{2}} \pi^{-\frac{5+n}{2}} 5^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{4(n+2)}{3} - \frac{7(n+8)}{18} - \frac{R}{12}}, \\ R = \sum_{l=2}^{\infty} (l+1)(l+2)(2l+3) \left(\ln \left[\frac{(l-1)(l+4)}{(l+1)(l+2)} \right] + \right. \\ \left. + (n-1) \ln \left[\frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)} \right] + \frac{2(n+2)}{(l+1)(l+2)} + \frac{2(n+8)}{(l+1)^2(l+2)^2} \right). \quad (11)$$

Выражение (11) приведено в так называемой “единичной” схеме ренормировки [10] без содержащих расходимости полных вкладов однопетлевых диаграмм

(12)

(линия – затравочный пропагатор теории ϕ^4 , волнистый хвост обозначает ϕ_c). Первая диаграмма (12) обращается в нуль в безмассовой теории с размерной регуляризацией, где сдвиг критической температуры вследствие аддитивной ренормировки $\delta\tau$ отсутствует. Вклад второй диаграммы (12) проще всего вычислить в импульсном представлении. Обозначив фурье-образ $\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2/4$ через $v(k)$, в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ получим с учетом симметричного коэффициента данной диаграммы, что

$$\frac{n+8}{144\pi^2} \int d^D k v(k) \left[\frac{2}{\epsilon} + (\Psi(1) + \ln(4\pi) + 2) - 2 \ln|k| \right] v(-k) \equiv U. \quad (13)$$

Вклад в U не зависящего от импульса слагаемого в квадратных скобках немедленно вычисляется вследствие нормировки инстантонного решения:

$$\bar{g}_c \int d\mathbf{x} \frac{\bar{\phi}_c^4}{4!} = -1.$$

Для произвольной функции $v(k)$ можно написать

$$\int d^{4-\epsilon} \mathbf{k} v(\mathbf{k}) \ln(|\mathbf{k}|) v(-\mathbf{k}) = S_D(-1) \frac{\partial}{\partial \chi} \int_0^\infty k^{3-\chi} v(k) v(-k) dk \Big|_{\chi=\epsilon},$$

что для члена с $\ln |\mathbf{k}|$ в (13) приводит к выражению

$$S_D(-1) \frac{\partial}{\partial \chi} (2\pi)^{4-\chi} \int_0^\infty dx x^{3-\chi} \left(\frac{\bar{g}_c \bar{\phi}_c^2}{4} \right)^2 \Big|_{\chi=\epsilon}.$$

Проводя дифференцирование по χ и вспоминая нормировку ϕ_c и равенство

$$\int d\mathbf{x} \ln(|\mathbf{x}|) \phi_c^4(\mathbf{x}) = 0$$

(обусловленное одной из δ -функций в разбиении единицы), окончательно для конечной части (13) получим

$$U_{\text{рег}} = \frac{n+8}{6} (\Psi(1) + 2 - \ln \pi).$$

Множитель $\exp U_{\text{рег}}$ следует добавить в выражение (11) в схеме МВ: $D^* = \bar{D}^* \exp U_{\text{рег}}$.

В пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ переход к импульсному представлению осуществляется с учетом справочной формулы

$$\bar{\phi}_c^{(0)}(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} (2\pi)^{\frac{4-\epsilon}{2}} \frac{K_{1-\epsilon}(|p|)}{|p|}. \quad (14)$$

В результате выражение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} G_k^{(N)} &= \frac{C_k^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty dy \chi_k(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) y^{k-5} (\mu y)^{N\epsilon} e^{-\alpha\epsilon N} e^{\frac{n+8}{3\epsilon}}, \\ \chi_k(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) &= \frac{y K_1(y|p_1|)}{|p_1|} \dots \frac{y K_1(y|p_k|)}{|p_k|} \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{p}_l = 0 \right), \\ C_k^{(N)} &= (-1)^N D^* L_k (4\sqrt{3}\pi)^k N^N N^{\frac{1}{2}(k+n+3)} e^{-N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $e^{-\alpha\epsilon N}$ — добавка к варьируемому функционалу в перевальной точке (ϕ_c, g_c) , обусловленная сдвигом размерности пространства $4 \rightarrow 4 - \epsilon$:

$$N\alpha = \frac{dJ(\bar{\phi} = \bar{\phi}_c, \bar{g} = \bar{g}_c)}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \left[\frac{d\bar{\phi}_c}{d\epsilon} \frac{\delta J}{\delta \bar{\phi}} + \frac{d\bar{g}_c}{d\epsilon} \frac{\partial J}{\partial \bar{g}} + \frac{\partial J}{\partial \epsilon} \right] \Big|_{\epsilon=0, \bar{\phi}=\bar{\phi}_c, \bar{g}=\bar{g}_c}. \quad (16)$$

В $(4 - \epsilon)$ -схеме функции Грина рассматриваются в форме разложения по ϵ . Поправки по ϵ к $\bar{\phi}_c^{(0)}$ и D^* при больших N дают несущественные по сравнению с $\alpha N \epsilon$ вклады в (15) и потому отброшены. При этом параметр ρ в D^* можно положить равным нулю и

вместо вычисления D^* в пространстве $D = 4 - \epsilon$ воспользоваться известными результатами (11) при $D = 4$. Из аналогичных соображений в (15) отброшены множители типа y^ϵ по сравнению с $y^{N\epsilon}$.

Вследствие вариационных уравнений (6) лишь последнее слагаемое в (16) не обращается в нуль. Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(S_{4-\epsilon} \int dx x^{3-\epsilon} \left[-\frac{1}{2} \bar{\phi}_c \left(\Delta_x + \frac{3-\epsilon}{x} \partial_x \right) \bar{\phi}_c + \frac{\bar{g} \bar{\phi}_c^4}{4!} \right] \right) \Big|_{\epsilon=0} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \Psi(1) - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

(Учтено, что $\int \ln(x^2) \bar{\phi}_c^4 dx = 0$), Ψ — логарифмическая производная гамма-функции.

3. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ АСИМПТОТИК РАЗЛОЖЕНИЙ КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ

Мы утверждаем, что при вычислении асимптотик высоких порядков следует обратить особое внимание на регуляризацию и ренормировку теории. Для вычисления констант ренормировки в N -м порядке разложения по g рассмотрим функции Грина с R' -операцией, т.е. с вычитаниями расходимостей подграфов с меньшим числом петель. Эта частичная ренормировка осуществляется константами Z в действии (4), вычисленными в теории возмущений по g вплоть до порядка $N - 1$. В размерной регуляризации данные константы содержат полюсы по ϵ . В [1], [2] справедливо отмечено, что в главном порядке по $1/N$ достаточно приближения $Z_g \approx 1 + ag/(16\pi^2\epsilon)$, $Z_\phi \approx 1$, где

$$a = \frac{n+8}{3}. \quad (18)$$

После необходимых растяжений переменных (7), (8) имеем для N -го коэффициента разложения, например, четыреххвостой функции Грина (с R' -операцией и при $\tau = 0$)

$$\begin{aligned} G_4^{(N)} &= \frac{(-1)^N}{\pi i} N^{N+2} \int_0^\infty \frac{dy}{y} y^{N\epsilon} \oint_\gamma \frac{d\bar{g}}{(-\bar{g})^{N+1}} \int D\bar{\phi} \delta^* e^{-\bar{S}} \times \\ &\times y^{8-\epsilon} \bar{\phi}(\mathbf{p}_1 y) \dots \bar{\phi}(\mathbf{p}_4 y) \exp \left[-\frac{a\bar{g}(\mu y)^{-\epsilon} \bar{g}(\bar{\phi}^2)^2}{4! 16\pi^2 \epsilon} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\bar{S} = \frac{N}{2} \partial_i \bar{\phi}_\alpha \partial_i \bar{\phi}_\alpha + \frac{N}{4!} \bar{g}(\bar{\phi}^2)^2 + N \bar{\varrho}(\bar{\phi}^2)^2 \ln x^2,$$

сокращение вакуумных петель и нормировка на функциональный интеграл свободной теории подразумеваются, δ^* обозначает набор δ -функций [1], [17] вместе с нормирующим множителем. В размерной регуляризации множитель $y^{N\epsilon}$ устраняет УФ-расходимость в нуле интеграла по y .

Перечислим используемые нами при вычислении приближения. Интегралы $\oint d\bar{g}$, $\int D\bar{\phi}$ в (19) вычисляем методом перевала при больших N в соответствии с изложенным в предыдущем разделе. Затем берем $\int dy$ в форме разложения в ряд Лорана по

ϵ . По окончании вычислений в однопетлевых по ϵ выражениях вспоминаем о малом параметре $1/N$. Проблема заключается в том, что метод перевала плохо работает в области малых y , где, как показано в приложении, реальным параметром разложения выступает $(\ln y)/N$. Вычисляя (19), мы можем считать ϵ конечным, но обязаны рассмотреть произвольные y при интегрировании по этому параметру.

Тем не менее задачу определения асимптотик старших порядков разложения РГ-функций удастся решить, если:

а) ограничиться вычислением важного при УФ-асимптотике объекта – такого, например, как вычет в простом полюсе по ϵ в константах ренормировки;

б) уточнить форму написания предэкспоненциального фактора в выражении (19). Вся зависимость от y в интегралах $\oint dg \int D\phi$ сосредоточена в члене, который рассматривается как предэкспонента при вычислении методом перевала.

Преобразуем вклад Z_g в (19):

$$\frac{a\bar{g}(\mu y)^{-\epsilon}\bar{g}(\bar{\phi}^2)^2}{4!16\pi^2\epsilon} = \frac{a\bar{g}[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]\bar{g}(\bar{\phi}^2)^2}{4!16\pi^2\epsilon} + \frac{a\bar{g}^2(\bar{\phi}^2)^2}{4!16\pi^2\epsilon}.$$

Не зависящее от y второе слагаемое правой части этого равенства после замен $\bar{g} \rightarrow \bar{g}_c$, $\bar{\phi} \rightarrow \bar{\phi}_c$ сокращает множитель $\exp((n+8)/(3\epsilon))$ в (15) (расходимости однопетлевых вершинных подграфов), возникающий в результате стафазного вычисления. Под знаком $\oint dg/g^{N+1}$ в (19) точным является равенство

$$\exp\left[-\frac{a\bar{g}[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]\bar{g}(\bar{\phi}^2)^2}{4!16\pi^2\epsilon}\right] = \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{j!} \left[-\frac{a\bar{g}[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]\bar{g}(\bar{\phi}^2)^2}{4!16\pi^2\epsilon}\right]^j. \quad (20)$$

При фиксированном y оно справедливо и в асимптотике при больших N , однако части этого равенства существенно различаются в УФ-области интегрирования по y . Напомним, что константы ренормировки имеют смысл лишь в рамках определенной теории возмущений. Следовательно, представление предэкспоненты в форме правой части (20) является более естественным. Здесь становится важной погрешность стафазного вычисления: в оценку предэкспоненты с помощью левой части выражения (20) дают ненулевой вклад все члены разложения по g , и в частности пропорциональные g^M с $M > N$, в то время как использование правой части (20) исключает их из рассмотрения.

В результате стафазного вычисления для частично-ренормированной (с вычитаниями на однопетлевые подграфы) четыреххвостой функции Грина в N -м порядке имеем

$$G_4^{(N)} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{dy}{y} (\mu y)^{N\epsilon} \chi_4(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) e^{-\alpha N \epsilon} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{j!} \left[-a \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon}\right]^j, \quad (21)$$

$\chi_k, C_k^{(N)}$ приведены в (15). Интегрирование по y рассматриваем в целом (не только при большом N). Теперь сингулярности при $y \rightarrow 0$ находят свое выражение в виде полюсов по ϵ . Простейший размерный анализ диаграмм обычной теории возмущений по g , лежащий в основе УФ-ренормировки теории, показывает, что поверхностная расходимость

произвольной N -петлевой диаграммы приводит к полюсу первого порядка $1/(N\epsilon)$. Поэтому при вычислении $\int dy$ коэффициент $N\epsilon$ следует считать малым, отбрасывая полюсы по $(N\epsilon)$.

Рассматриваемый интеграл $\int dy$ представляет собой интегрирование по совокупности модулей внутренних импульсов диаграмм, его расходимость ассоциируется с поверхностью. Напомним на примере выражения для функции $G_4^{(N)}$ основные правила вычислений в размерной регуляризации [20], которые мы и будем использовать для выделения полюсов по ϵ .

1. Параметр ϵ (и даже $N\epsilon$) считается малым, однако величину $y^{N\epsilon}$ в расходящихся интегралах не следует разлагать в ряд по нему до окончания вычислений.

2. В расходящихся при малых y интегралах (регуляризованных множителем $y^{N\epsilon}$) полюсные члены легко выделяются интегрированием по частям. Например,

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} \chi_4(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) y^{N\epsilon} \quad (22)$$

после интегрирования по частям дает

$$\int dy^{N\epsilon} \chi_4(y) (N\epsilon)^{-1} = -(N\epsilon)^{-1} \int dy y^{N\epsilon} \partial_y \chi_4(y). \quad (23)$$

Обращение в нуль внеинтегральных членов обеспечивается асимптотическим поведением функций $\chi_k(y, \dots)$ (15) (функций Бесселя $K_1(x)$). Образовавшийся в правой части (23) интеграл уже сходится при $\epsilon = 0$. Интересуясь полюсными по ϵ членами, в нем можно разложить множитель $y^{N\epsilon}$ в ряд по параметру $N\epsilon$ (существенна сходимость всех образовавшихся интегралов) и окончательно получить ответ для полюсного вклада (23) в виде $(N\epsilon p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2)^{-1}$. Аналогично (23) несложно получить, например, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{dy}{y} \chi_4(y, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) (\mu y)^{N\epsilon} \left[a \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right] = \\ = \frac{a}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \frac{1}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2} + O(1), \end{aligned} \quad (24)$$

т.е. при больших N этот интеграл содержит только второй полюс по $N\epsilon$.

Исследуя описанным выше способом интеграл (21), получаем в рассматриваемой функции Грина полюсы по $N\epsilon$ вплоть до порядка $N/2$ (вообще говоря, для рассматриваемой суммы диаграмм в N -м порядке теории возмущений следует ожидать появления полюсов по $N\epsilon$ вплоть до порядка N , однако метод стационарной фазы практически не позволяет контролировать старшие полюсы). Форма записи (21) и составляет основное отличие нашего подхода от работ [1], [2], в которых под знаком интеграла по y вместо $\sum [a(1 - (\mu y)^{-\epsilon})/\epsilon]^j / j!$ поставлено $\exp(a \ln(\mu y))$ (при $\epsilon = 0$). Хотя асимптотически эти выражения равны, они дают принципиально разные вклады в интеграл $\int dy$. А именно, УФ-конечность полученных в [2] выражений ($\exp(a \ln y) = y^a$ устраняет все УФ-расходимости при малых y в $\int dy$) обусловлена тем, что под знаком $\int dy$ вклад любой степени выражения в квадратных скобках в (21) ($\sim \ln y$ при $\epsilon = 0$) пропорционален

соответствующей степени $1/(N\epsilon)$. Суммирование степеней $\ln y$ эквивалентно суммированию подрядов по степеням g/ϵ в константах ренормировки, что приводит к их конечности при $\epsilon \rightarrow 0$ (см. приложение).

Наличие в (21) множителя $\exp(-\alpha N\epsilon)$ приводит к необходимости вычислять полюсные члены всех порядков в $\int dy$ для определения вычета в простом полюсе¹⁾. Чтобы этого избежать, сделаем в (21) замену переменной

$$y \rightarrow \tilde{y} = y \exp(-\alpha). \quad (25)$$

В результате получаем

$$G_4^{(N)} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} (\mu\tilde{y})^{N\epsilon} \chi_4(\tilde{y}e^\alpha, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{j!} \left[-a \frac{(\mu\tilde{y}e^\alpha)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right]^j. \quad (26)$$

Преобразуем правую часть (26) с учетом равенства (23), асимптотического поведения $\chi_4(\tilde{y}e^\alpha, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) \rightarrow 1$ при $\tilde{y} \rightarrow 0$ и соотношения

$$a \frac{(\mu\tilde{y}e^\alpha)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} = a \frac{(\mu\tilde{y})^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} + a(\mu\tilde{y})^{-\epsilon} \frac{(e^\alpha)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon}.$$

Вследствие (24) слагаемые (26), содержащие ненулевые степени $a((\mu\tilde{y})^{-\epsilon} - 1)/\epsilon$, дают вклад только в старшие полюсы по $N\epsilon$ и не влияют на первый полюс. Можно положить $(\mu\tilde{y})^{-\epsilon}(e^{-\alpha\epsilon} - 1)/\epsilon \approx -\alpha$, поправки по ϵ к этому равенству дают малые по $1/N$ вклады в наши вычисления (т.к. член $(\mu\tilde{y})^{-\epsilon} \approx 1$ и мал по сравнению с $(\mu\tilde{y})^{N\epsilon}$). Окончательно получим

$$\frac{\{G_4^{(N)}\}}{\epsilon} \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{N\epsilon} \frac{1}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{j!} [a\alpha]^j \approx \frac{C_4^{(N)}}{(16\pi^2)^N} e^{a\alpha} \frac{1}{N\epsilon} \frac{1}{p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2}. \quad (27)$$

Для парной корреляционной функции ($k = 2$) выражение, аналогичное интегралу (22), принимает вид

$$\int_0^\infty dy \chi_2(y, \mathbf{p}) (\mu y)^{N\epsilon} y^{-3} \quad (28)$$

и имеет полюсы первого и второго порядков по ϵ . Перед вычислением интеграла (28) следует предварительно осуществить вычитание из подынтегрального выражения

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^3} (\mu y)^{N\epsilon} \left(\chi_2(y, \mathbf{p}) - \frac{1}{p^4} [q^4 \chi_2(y, q)]|_{q=0} \right),$$

соответствующее аддитивной ренормировке массы. Далее, как и при $k = 4$, несколько раз проинтегрируем по частям. В возникшем слагаемом типа

$$\int dy \ln y (\mu y)^{N\epsilon-1} K_1(y p)$$

¹⁾ Для контроля мы провели эти вычисления, просуммировав образовавшийся ряд вкладов в вычет в простом полюсе.

воспользуемся представлением $\ln y$ посредством $\partial_{(N\epsilon)} y^{N\epsilon}$. Выделяя полюсы первого и второго порядков по ϵ , окончательно получим для (28) выражение

$$\frac{1}{p^2(N\epsilon)^2} - \frac{\ln 2 + \Psi(1) + \frac{1}{2}}{p^2(N\epsilon)}.$$

Повторив приведенные выше рассуждения (с заменой (25)), нетрудно получить для простого полюса в ампутированной функции G_2 :

$$\frac{\{G_2^{(N)}\}}{\epsilon} \approx \frac{C_2^{(N)}}{(16\pi^2)^N} e^{\alpha a} \left[\ln 2 + \Psi(1) + \frac{1}{2} + \alpha \right] \frac{1}{N\epsilon}. \quad (29)$$

4. АСИМПТОТИКИ КОНСТАНТ РЕНОРМИРОВКИ

Конечность ренормированных функций G_{2R} и G_{4R} позволяет вычислить асимптотики констант ренормировки Z_ϕ и Z_g . Факториальный рост по N коэффициентов разложения существенно упрощает исследование: при перемножении рядов в N -м по g порядке следует учитывать только их начальные и конечные члены [21].

Для ренормированной вершинной функции Грина вплоть до N -го порядка по g напишем

$$G_{4R} = Z_\phi^4 \left[- \text{X} g Z_g + \frac{(n+8)}{6} \text{C} g^2 Z_g^2 + \dots + g^N Z_g^N G_4^{(N)} \right]. \quad (30)$$

Вклады в правую часть (30) порядка g^N , имеющие полюсы первого порядка по ϵ , должны сокращаться. Получаемое отсюда условие на константы ренормировки в асимптотике при больших N имеет вид

$$-\frac{\{Z_g^{(N-1)}\}}{\epsilon} + \frac{\{G_4^{(N)}\}}{\epsilon} = 0. \quad (31)$$

Вклад от Z_ϕ^4 в (30) асимптотически мал (см. ниже). Мы перешли к ампутированной функции $\{G_4^{(N)}\}$, опустив очевидный множитель $1/(p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2)$. Учитывая соотношение $C_k^{(N+1)} \approx -N C_k^{(N)}$ и формулы (15), (27), окончательное выражение для асимптотики $\{Z_g\}$ можно представить в виде

$$\{Z_g^{(N)}\}_{\text{asympt}} = -\frac{C_4^{(N)}}{16\pi^2} \exp \left[\frac{n+8}{6} \left(\Psi(1) - \ln \pi - 2 \right) \right]. \quad (32)$$

Здесь и далее $Z_i^{(j)}$ в окончательных выражениях обозначает коэффициент при u^j в выражении для Z_i , $u \equiv g/(16\pi^2)$, как это принято в схеме МВ [10].

Ряд теории возмущений для парной функции Грина при $\tau = 0$

$$G_{2R} = \text{---} Z_\phi^2 + \frac{1}{6} \frac{n+2}{3} \text{---} \bigcirc \text{---} Z_\phi^2 g^2 Z_g^2 + \dots + Z_\phi^2 g^N Z_g^N G_2^{(N)} \quad (33)$$

позволяет найти константу ренормировки поля. Так как асимптотики $Z_\phi^{(N)}$, $Z_g^{(N)}$ при больших N связаны соотношением $Z_\phi^{(N)} \sim Z_g^{(N-2)}$ (вследствие того что $G_4^{(N-2)} \sim G_2^{(N)}$), то помимо первого и последнего членов ряда (33) в старшем по N порядке следует учесть вклад диаграммы второго порядка по g :

$$\text{---}\bigcirc\text{---} = -\frac{1}{(4\pi)^4\epsilon} - \frac{1}{2(4\pi)^4} \left(\frac{13}{4} + \ln(4\pi) + \Psi(1) \right) + \frac{\ln p}{(4\pi)^4}. \quad (34)$$

Учитывая (29), (32), получим

$$\begin{aligned} \{Z_\phi^{(N)}\}_{\text{asmp}} &= \frac{1}{2} \left\{ C_2^{(N)} \exp \left[\frac{n+8}{6} (\Psi(1) - \ln \pi - 2) \right] \times \right. \\ &\times \left. \frac{1}{2} (\ln(4\pi) + 3 + \Psi(1)) + \frac{n+2}{18} \left(\frac{13}{4} + \ln(4\pi) + \Psi(1) \right) \frac{\{Z_g^{(N)}\}_{\text{asmp}}}{N^2} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Контроль за правильностью вычислений формул (29), (32) можно осуществить, проследив сокращение в старшем по N порядке членов, содержащих логарифм внешнего импульса, которые появляются как при вычислении $\{G_2^{(N)}\}$, так и в конечной части диаграммы (34).

Константа ренормировки массы Z_τ определяется условием конечности двуххвостой функции Грина со вставкой составного оператора $Q \equiv \phi^2/2$:

$$\langle \phi(x_1) \phi^2(x) \phi(x_2) \rangle = Z_\phi^2 \left[\text{---}\bigtriangleright\text{---} Z_\tau - \frac{1}{2} \frac{n+2}{3} \text{---}\bigcirc\text{---} Z_\tau Z_g g + g^N Z_g^N G_{Q,2} \right],$$

где

$$\begin{aligned} G_{Q,2} &= \frac{C_4^{(N)}}{16\pi^2} \int_0^\infty dy (\mu y)^{N\epsilon} \chi_{Q,2}(y, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}) \left(1 - \frac{a}{N\epsilon} ((\mu y)^{-\epsilon} - 1) \right)^N, \\ \chi_{Q,2}(y, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}) &= \frac{y K_1(y|\mathbf{p}_1|)}{|\mathbf{p}_1|} \frac{y K_1(y|\mathbf{p}_2|)}{|\mathbf{p}_2|} \frac{K_0(|\mathbf{p}|)}{8\pi^2}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

(при получении $\chi_{Q,2}$ в дополнение к (14) была использована справочная формула $1/(1+x^2)^2 \rightarrow 2\pi^2 K_0(|\mathbf{p}|)$), составной оператор Q рассмотрен при ненулевом импульсе p , чтобы избежать ИК-расходимостей). Полюсные особенности (36) определяются, как и в предыдущих аналогичных формулах. При вычислении Z_τ так же, как и в случае для Z_ϕ , можно убедиться в том, что логарифмы внешних импульсов в старшем по N порядке сокращаются. Окончательная подстановка всех констант приводит к тому, что и прочие слагаемые в выражении для асимптотики константы ренормировки массы сокращаются. В старшем по N порядке имеем

$$\{Z_\tau^{(N)}\}_{\text{asmp}} = 0. \quad (37)$$

На основе полученных выражений можно выяснить, насколько точно асимптотики (32), (35), (37) описывают реальное поведение коэффициентов $Z_g^{(N)}$, $Z_\phi^{(N)}$,

$Z_\tau^{(N)}$. В табл. 1 приведены для сравнения точные $\{Z^{(N)}\}_{\text{exact}}$ [10] и асимптотические $\{Z^{(N)}\}_{\text{asympt}}$ значения коэффициентов в случае $n = 1$. Видно, что последний точно вычисленный вклад $\{Z^{(5)}\}_{\text{exact}}$ сильно отличается от соответствующего асимптотического значения, хотя и наблюдается монотонность в приближении $\{Z^{(N)}\}_{\text{exact}}$ к $\{Z^{(N)}\}_{\text{asympt}}$. Аналогичная ситуация имеет место и для $n = 2, 3, \dots$.

Таблица 1

$n = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\{Z_g^{(N)}\}_{\text{exact}}$	-2.833	10.850	-67.901	569.713
$\{Z_g^{(N)}\}_{\text{asympt}}$	-0.0049	0.062	-0.68	7.51
$\{Z_\phi^{(N)}\}_{\text{exact}}$	-0.0417	0.0208	-0.0846	0.3851
$\{Z_\phi^{(N)}\}_{\text{asympt}}$	-0.00003	0.0001	-0.0009	0.0063
$\{Z_\tau^{(N)}\}_{\text{exact}}$	-0.417	1.167	-4.989	30.151
$\{Z_\tau^{(N)}\}_{\text{asympt}}$	0	0	0	0

Константы ренормировки ренормализационно-неинвариантны, и, вообще говоря, факт их отклонения от асимптотических значений необъективен. Поэтому проведем аналогичное сравнение известных порядков $(4-\epsilon)$ -разложения и соответствующих асимптотических значений для критических индексов. Используя соотношения (3), превратим (32), (35), (37) в асимптотики РГ-функций: $\gamma_i^{(N)} \text{asympt} = -N\{Z_i^{(N)}\}_{\text{asympt}}$. В результате для асимптотик $(4-\epsilon)$ -разложения критических индексов $\eta = 2\gamma_\phi(g_*)$, $1/\nu = 2 - \gamma_\tau(g_*)$, где g_* – положение фиксированной точки $\beta(g_*) = 0$, имеем

$$\eta_{\text{asympt}}^{(N)} = 4a_\phi^{(2)} \frac{\{Z_g^{(N)}\}_{\text{asympt}}}{(a_g^{(1)})^{N+1}} e^{\frac{2a_g^{(2)}}{a} \epsilon} \epsilon^N,$$

$$\nu_{\text{asympt}}^{(N)} = -\frac{1}{4}a_\tau^{(1)} \frac{\{Z_g^{(N+1)}\}_{\text{asympt}}}{(a_g^{(1)})^{N+1}} e^{\frac{2a_g^{(2)}}{a} \epsilon} \epsilon^N,$$

где $a_\phi^{(2)} = -(n+2)/72$, $a_g^{(2)} = -(3n+14)/6$, $a_\tau^{(1)} = (n+2)/3$. Для случая $n = 1$ и $\epsilon = 1$ сравнение асимптотических и точных значений членов разложения критических индексов приведено в табл. 2.

Таблица 2

$n = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
$\eta_\epsilon^{(N)}$	0.0185	0.0187	-0.0083	0.0257
$\eta_{\text{asympt}}^{(N)}$	$4.6 \cdot 10^{-6}$	$-1.93 \cdot 10^{-5}$	$7.11 \cdot 10^{-5}$	$-2.60 \cdot 10^{-4}$
$\nu_\epsilon^{(N)}$	0.0044	-0.020	0.0701	-0.217
$\nu_{\text{asympt}}^{(N)}$	$-8.70 \cdot 10^{-5}$	$3.20 \cdot 10^{-4}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$4.44 \cdot 10^{-3}$

В работе [1] было предложено приближенно вычислять функции Грина, заменив неизвестные члены разложения их асимптотическими значениями. Наши результаты

свидетельствуют, что в случае ϕ^4 -теории для этого совершенно недостаточно главного по N члена асимптотики. Поэтому мы попытались учесть отличие $\{Z^{(N)}\}_{\text{exact}}$ от $\{Z^{(N)}\}_{\text{asympt}}$, вводя в асимптотике (1) первые поправки по $1/N$ с помощью вычисления коэффициентов при поправочных членах по разнице последних известных точных и асимптотических членов разложения. В результате получились следующие экстраполяционные формулы для еще не вычисленных порядков разложений констант ренормировки $\{\tilde{Z}_i^{(N)}\}$:

$$\begin{aligned}\{\tilde{Z}_g^{(N)}\} &= \{Z_g^{(N)}\}_{\text{asympt}} \left(1 + \frac{1}{N} \left(\frac{5a_g^{(5)}}{\{Z_g^{(5)}\}_{\text{asympt}}} - 5 \right) \right), \\ \{\tilde{Z}_\phi^{(N)}\} &= \{Z_\phi^{(N)}\}_{\text{asympt}} \left(1 + \frac{1}{N} \left(\frac{5a_\phi^{(5)}}{\{Z_\phi^{(5)}\}_{\text{asympt}}} - 5 \right) \right), \\ \{\tilde{Z}_\tau^{(N)}\} &= \frac{C_4^{(N)}}{C_4^{(5)}} \frac{5a_\tau^{(5)}}{N}.\end{aligned}\tag{38}$$

Здесь $a_i^{(N)}$ – известные коэффициенты N -го порядка разложения простого полюса по ϵ вычисленных констант ренормировки Z_i (в схеме МВ константы ренормировки имеют вид

$$Z_i(u, \epsilon) = 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{a_i^{(N)} u^N}{\epsilon} + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right),$$

$u \equiv g/(16\pi^2)$). Мы не приводим эти коэффициенты, отсылая читателя к работам [15], [10].

Заметим, что если бы нам не были известны пятые члены разложений, то, проведя описанную выше экстраполяцию, основывающуюся только на четвертых коэффициентах, можно было бы восстановить пятые с точностью порядка 80 %. Следовательно, в принципе полученные экстраполяционные выражения (38) можно использовать для уточнения вычисления критических индексов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хочется отметить, что обнаруженное нами в теории $\phi^4(4 - \epsilon)$ расхождение вычисленных членов разложения критических индексов и их липатовских асимптотик может быть присуще только этой теории или данной конкретной схеме разложения. В значительной мере оно обусловлено, как уже упоминалось, тем, что при вычислении интегралов методом перевала конечные суммы заменяются рядами. Действительно, вычисляемые в компактной форме величины $\overline{D}^*$ (11) и $\exp U_{\text{reg}}$ (13) связаны с конечными вкладами однопетлевых диаграмм, а вошедший в (32) множитель $\exp[(n+8)(\Psi(1)/2 - 1 - (\ln \pi)/2)/3]$ своим происхождением обязан учету частичной ренормировки на расходимости однопетлевых графов. В N -м порядке исходной теории возмущений по g соответствующие подграфы, как объяснялось выше, присутствуют лишь в конечном числе, а их вклады – в виде конечных сумм. Отбирая конечные, не зависящие от N вклады

в $\{Z_g^{(N)}\}$ (11), (15), (13), (27) (именно асимптотика $\{Z_g\}$ определяет асимптотическое поведение рядов ϵ -разложений критических индексов), для $n = 1$ получаем вклад в амплитуду c (1) для $\{Z_g\}$ порядка $e^{-3.10}$ (без учета множителей S_n и $1/(16\pi^2)$). Для вычисления его в виде конечного отрезка ряда (как и происходит в традиционной теории возмущений) требуется учесть 10–11 членов для получения приличной точности (сумма первых пяти членов дает даже ошибку в знаке, что мы и имеем в асимптотике разложений критических индексов). Отсюда напрашивается не слишком оптимистичный прогноз: ряды $(4 - \epsilon)$ -разложений выйдут на липатовские асимптотики не ранее чем в порядке ϵ^{10} .

Итак, мы получили, что для $(4 - \epsilon)$ -разложения единственным результатом применения липатовского метода оказывается утверждение о борелевской суммируемости рядов для критических индексов. В сущности это и является основным моментом в различных методах пересуммирования. Однако объявленная в работе [8] возможность фиксировать параметры схемы пересуммирования данными асимптотического поведения представляется проблематичной. Аналогичное заключение о практической независимости результатов пересуммирования от асимптотик высоких порядков приведено и в работе [7] на основании исследования разложений в пределе сильной связи. По-видимому, этим и объясняется тот факт, что для фиксации параметров схем пересуммирования авторы работ [4]–[6] также не используют знание асимптотик, получая, тем не менее, хорошие результаты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь приведены некоторые факты, следующие из ренормируемости теории, полезные для контроля вычислений и оценки результатов. Обсужден также вопрос о влиянии $1/N$ поправок метода стационарной фазы на асимптотики констант ренормировки и критических индексов.

Следствием определения $g_0 = g\mu^\epsilon Z_g$ является известное выражение

$$\beta(g) = \frac{-\epsilon g}{1 + g\partial_g \ln Z_g}. \quad (39)$$

Конечность β -функции при $\epsilon \rightarrow 0$ требует сокращения старших полюсов по ϵ в (39). Разлагая обе части этого равенства в ряды по g и учитывая факториальный рост коэффициентов, в асимптотике больших N для коэффициента при втором полюсе по ϵ находим

$$Z_{(2)g}^{(N)} \approx \frac{a\{Z_g^{(N)}\}}{N}$$

($Z_g = 1 + \{Z_g\}/\epsilon + Z_{(2)g}/\epsilon^2 + \dots$). Именно такой результат для $Z_{(2)g}^{(N)}$ получается при вычислении $G_4^{(N)}$ предложенным нами методом.

Рассматривая (39) как дифференциальное уравнение на Z_g , в схеме МВ получаем

$$Z_g = \exp\left(-\int_0^g \frac{du}{\beta(u)} - \int_0^g \frac{du}{u}\right).$$

Ограничившись однопетлевым приближением $\beta(g) = g(-\epsilon + ag)$, имеем

$$Z_g \approx \frac{\epsilon}{\epsilon - ag} + O\left(\frac{g^2}{\epsilon}\right), \quad (40)$$

что совпадает с результатом суммирования в разложении Z_g “главных” вкладов по g/ϵ . Заметим, что это выражение конечно при $\epsilon \rightarrow 0$, $g = \text{const}$. Аналогичное суммирование имело место в работах [1], [2], что и объясняет полученную конечность частично ренормированных функций Грина теории ϕ^4 в этих работах.

Обсудим вклады в $\{Z_g\}$ поправок порядка $1/N$ при вычислении интегралов $\oint dg \int D\phi$ методом перевала. Они получаются в результате учета поправочных членов при интегрировании по отклонениям $\delta\phi$, δg от положения точки стационарности ϕ_c , g_c и могут быть представлены диаграммами, линии которых определяются оператором $\delta^2 S(\phi_c, g_c)/\delta\phi^2$. Несингулярные при $\epsilon \rightarrow 0$ (и $y \rightarrow 0$) вклады в эти диаграммы дают лишь $O(1/N)$ -поправки к $\{Z_g\}$. Итак, следует детально рассмотреть лишь полюсные по ϵ члены.

При анализе расходящихся диаграмм следует выделить 1-неприводимые диаграммы (проблема с 1-приводимыми диаграммами решается тривиально)

здесь хвостиками обозначены решения ϕ_c уравнения стационарной фазы. Выделение расхождений по ϵ , в частности, приводит к разложению линий в ряд по $g_c\phi_c^2$.

Ренормировочные контрчлены теории – это часть предэкспоненты вычисляемого методом перевала интеграла. Учтенный в главном по N порядку контрчлен $\sim a\mu^\epsilon g^2 \phi^4/\epsilon$ дает вклад и в поправку $\sim a(\mu y)^{-\epsilon} g^2 \phi_c^2 (\delta\phi)^2/\epsilon$. После интегрирования по $\delta\phi$ этот член сокращает расхождимости подграфов в рассматриваемых диаграммах, а оставшаяся поверхностная расхождимость устраняется вкладами в Z_g , пропорциональными $a^2 g^2/\epsilon^2$ и $a_g^{(2)} g^2/\epsilon$. В результате сокращений мы получаем вклады в $\int dy y^{N\epsilon-1}$ порядков $a_g^{(2)} (1 - (\mu y)^{-\epsilon})/(N\epsilon)$ и $a^2 (1 - (\mu y)^{-\epsilon})^2/(N\epsilon^2)$. Им соответствуют (см. (24)) вклады в Z_g вида $a_g^{(2)}/(N^3 \epsilon^2)$ и $a^2/(N^4 \epsilon^3)$, несущественные по сравнению со степенными вкладами $1/(N\epsilon)^j$, которые мы учли при получении (27).

Благодарности. Авторы благодарят А. Н. Васильева за плодотворные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-16783) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза России (грант № 97-0-14.1-30).

Список литературы

- [1] Л. Н. Лунатов. ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 411.
- [2] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 1544.
- [3] J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Oxford University Press, 1989.
- [4] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov. Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 1894.
- [5] V. I. Yukalov, S. Gluzman. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 1359.
- [6] A. I. Mudrov, K. B. Varnashev. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 5371.
- [7] H. Kleinert. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 085001.
- [8] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. B. 1980. V. 21. P. 3976.
- [9] E. Brezin, G. Parisi. J. Stat. Phys. 1978. V. 19. P. 269.
- [10] А. Н. Васильев. Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. С.-П.: Изд-во ПИЯФ, 1998.
- [11] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. J. Physique Lett. 1985. V. 46. P. L137.
- [12] A. J. McKane, D. J. Wallace, O. F. de Alcantara Bonfim. J. Phys. A. 1984. V. 17. P. 1861.
- [13] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. J. Physique. 1989. V. 50. P. 1365.
- [14] Ю. А. Кубышин. ТМФ. 1983. Т. 57. С. 363.
- [15] H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin, S. A. Larin. Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 39; 1993. V. 319. P. 545.
- [16] А. А. Владимиров. ТМФ. 1978. Т. 36. С. 271.
- [17] И. М. Суслов. ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 220.
- [18] И. М. Суслов. ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 1896.
- [19] V. G. Makhankov. Phys. Lett. A. 1977. V. 61. P. 431.
- [20] G. 't Hooft, M. Veltman. Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189.
- [21] И. М. Суслов. ЖЭТФ. 1994. Т. 106. С. 560.

Поступила в редакцию 21.IX.2000 г.