Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Нейтральный фермион с магнитным моментом во внешних электромагнитных полях, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 3, 427–442

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:47:11

НЕЙТРАЛЬНЫЙ ФЕРМИОН С МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Взаимодействие массивного нейтрального фермиона, обладающего статическим (спиновым) магнитным дипольным моментом μ , с внешним электромагнитным полем описывается уравнением Дирака–Паули. Найдены точные решения этого уравнения и соответствующий спектр энергий для внешнего магнитного поля с аксиальной симметрией и для некоторых центрально-симметричных электрических полей. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие нейтрального фермиона с магнитным моментом определяет как характерные свойства квантовых состояний, так и спектр энергий фермиона. Установлено, что: 1) дискретный спектр энергий нейтрального фермиона зависит от проекции спина фермиона (на определенную ось квантования); 2) низший уровень энергии фермиона в рассматриваемых электрических полях и все уровни энергии (с одним определенным значением квантового числа, характеризующего проекцию спина фермиона) связанных состояний в электрическом поле напряженности $E = e\tau$ вырождены со счетной бесконечной кратностью; 3) спектры энергий нейтральных фермионов и антифермионов, обладающих спиновыми магнитными моментами, в центрально-симметричных электрических полях симметричны. Связанные состояния нейтрального фермиона с магнитным моментом в некоторых внешних электрических полях существуют, даже если уравнение Дирака–Паули не содержит явно члена с фермионной массой. Кроме того, в центрально-симметричных электрических полях существует счетное бесчисленное множество пар изолированных зарядово-сопряженных решений уравнения Дирака–Паули с нулевой энергией.

1. ВВЕДЕНИЕ

В релятивистской квантовой теории движение заряженной частицы со спином $1/2$ во внешнем электромагнитном поле описывается уравнением Дирака, содержащим так называемое “минимальное” взаимодействие заряженного фермиона с векторным потенциалом внешнего электромагнитного поля $A_\mu(x)$. Паули [1], изучая лагранжианы релятивистских заряженных фермионов во внешних электромагнитных полях, указал, что добавлением к лагранжиану дополнительных членов, содержащих явно напряженности внешнего поля $F_{\mu\nu}(x)$, можно описать дополнительные (аномальные) магнитные моменты (АММ) заряженных фермионов. Заметим, что в работе [1] рассматривались лишь

* Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: khalilov@thc.phys.msu.ru

дополнительные взаимодействия, не изменяющие симметрию исходного лагранжиана, и, в частности, АММ нейтрона можно описать введением в лагранжиан дополнительного взаимодействия указанного типа. Если инвариантность взаимодействий элементарных частиц по отношению к обращению времени (или CP -инвариантность, как в распаде $K_2^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$) не является универсальным принципом природы, то фермионы могут обладать электрическими дипольными моментами (ЭДМ) [2]. ЭДМ заряженного фермиона можно учесть феноменологически, вводя в лагранжиан дополнительный калибровочно-инвариантный, но не инвариантный относительно T - и P -отражений, член взаимодействия [3].

Учет дополнительных членов, связанных с АММ и ЭДМ заряженного фермиона, существенно усложняет структуру и нахождение точных решений полученного из такого лагранжиана обобщенного уравнения Дирака в присутствии внешнего электромагнитного поля. Точные решения обобщенного уравнения Дирака для заряженного фермиона, обладающего АММ и ЭДМ, известны лишь в некоторых специальных конфигурациях электромагнитных полей: в поле плоской электромагнитной волны [4], [5], в произвольном постоянном электромагнитном поле [6] и для одного класса постоянных неоднородных электрических полей [7], [8].

Точные решения обобщенного уравнения Дирака для нейтрального фермиона с АММ (это уравнение называют уравнением Дирака–Паули) в постоянном неоднородном магнитном поле специальной конфигурации и в некоторых неоднородных электростатических полях обсуждались в работах [9] и [10], соответственно.

В последнее время снова возник интерес к этим задачам. На наш взгляд, этот интерес связан с рядом замечательных событий, среди которых можно выделить следующие: открытие нейтронных звезд с гигантскими индукциями магнитных полей и сверхвысокими плотностями нейтронов и протонов в центральных областях этих звезд; создание квантово-полевых теоретических моделей, предсказывающих возможность существования АММ и даже ЭДМ у массивного дираковского нейтрино (индуцированных радиационными поправками во внешнем электромагнитном поле); предсказание [11] и открытие [12] эффекта Ааронова–Кашера, прямо указывающего на существование и важную роль “неминимального” взаимодействия. Отметим, что задача о рассеянии нейтронов на ядрах, обусловленном (прямым) “неминимальным” взаимодействием АММ нейтрона с внешним электростатическим полем ядра, впервые рассматривалась Швингером [13].

В настоящей работе мы изучим решения уравнения Дирака–Паули для массивного нейтрального фермиона, обладающего статическим (спиновым) магнитным дипольным моментом, во внешнем аксиально-симметричном магнитном поле и в некоторых центрально-симметричных электрических полях. Задача может представлять интерес для физики элементарных частиц и астрофизики.

Мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$, и выбрали так называемое стандартное представление матриц Дирака [14]: $\gamma^0 = \gamma_0 \equiv \beta$, $\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\sigma} = \gamma^5\boldsymbol{\gamma}\gamma^0$.

2. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Лагранжиан фермиона с массой m , зарядом e и АММ μ , взаимодействующего с внешним электромагнитным полем, был предложен Паули [1] в виде

$$L = \bar{\Psi}[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\Psi - \frac{1}{2}\mu\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\Psi, \quad (1)$$

где $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ – матрицы Дирака, удовлетворяющие антикоммутиационным соотношениям $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ с $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$, A_μ – 4-потенциал внешнего электромагнитного поля, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор внешнего электромагнитного поля.

Обобщенное уравнение Дирака для массивного заряженного фермиона с АММ, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем, имеет вид

$$\left(\gamma^\mu P_\mu - \frac{1}{2}\mu\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m\right)\Psi = 0, \quad (2)$$

где $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$ – оператор обобщенного импульса заряженного фермиона.

Нетрудно показать, что

$$\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}, \quad (3)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ – напряженности электрического и магнитного полей, соответственно.

Уравнение Дирака для массивного нейтрального фермиона с АММ μ получают из уравнения (2), полагая в нем $e = 0$. С учетом (3) уравнение Дирака–Паули (2) (с $e = 0$) можно записать в виде уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{H}\Psi \quad (4)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \mu(-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) + \beta m. \quad (5)$$

Сначала мы найдем точные стационарные решения одночастичного уравнения Дирака–Паули во внешних статических электромагнитных полях с “положительными” частотами (в области энергий $\mathcal{E} > 0$), а затем обсудим решения уравнения Дирака–Паули с “отрицательными” частотами и область спектра с $\mathcal{E} < 0$. Весь спектр энергий с $\mathcal{E} > 0$ и $\mathcal{E} < 0$ необходимо знать, для того чтобы понять, возможно ли пересечение уровней энергии, принадлежащих в отсутствие поля областям $\mathcal{E} > 0$ и $\mathcal{E} < 0$. Кроме того, все решения уравнения Дирака–Паули определенным образом входят в схему вторичного квантования [15] и поэтому необходимы для определения основного состояния (вакуума) вторично квантованной теории.

3. ФЕРМИОН В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим движение нейтрального фермиона во внешнем аксиально-симметричном магнитном поле, вектор напряженности которого в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид

$$\mathbf{B} = \left(0, 0, \frac{a}{r} + b\right). \quad (6)$$

Решение уравнения Дирака–Паули во внешнем поле (6) ищем в виде

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{-i\mathcal{E}t} \psi(\mathbf{r}), \quad (7)$$

где $\mathcal{E}$ – энергия фермиона, а $\psi(\mathbf{r})$ – не зависящий от времени биспинор. Спектр энергий фермиона определяется из стационарного уравнения Дирака–Паули

$$\mathcal{H}\psi(\mathbf{r}) = \mathcal{E}\psi(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ определяется формулой (5) с подстановкой (6).

Нетрудно показать, что волновая функция Ψ в поле (6) является также собственной функцией следующих операторов (интегралов движения): проекции импульса на направление поля (ось z)

$$-i\frac{\partial \Psi}{\partial z} = p\Psi, \quad (9)$$

проекции полного момента на это направление

$$J_z \Psi = \left(-i\partial_\varphi + \frac{\sigma_3}{2}\right) \Psi = \left(l + \frac{1}{2}\right) \Psi \quad (10)$$

и спинового оператора [9]

$$S\Psi = s\Psi, \quad S = m\sigma_3 - i[\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}]_3 - \mu B, \quad (11)$$

описывающего проекцию спина фермиона на направление магнитного поля. Эти операторы коммутируют с гамильтонианом $\mathcal{H}$, а их собственные значения p , $l + 1/2$ и s нумеруют решения уравнения Дирака–Паули.

С учетом этих требований биспинор $\psi(\mathbf{r})$ можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ipz + il\varphi)}{\sqrt{2\pi L}} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} c_1 f(r) \\ i c_2 g(r) e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \chi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -c_2 f(r) \\ i c_1 g(r) e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

причем функции f и g удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} - \frac{l}{r}f + \left(s + m - \frac{\mu a}{r} - \mu b\right)g &= 0, \\ \frac{dg}{dr} + \frac{l+1}{r}g - \left(s - m - \frac{\mu a}{r} - \mu b\right)f &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

коэффициенты c_k имеют вид

$$c_1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{s}{\mathcal{E}}}{2}}, \quad c_2 = -\sqrt{\frac{1 - \frac{s}{\mathcal{E}}}{2}} \quad (14)$$

и выполняется соотношение

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2 + s^2}. \quad (15)$$

Обозначим $s - \mu b = \zeta E$, где значения $\zeta = \pm 1$, очевидно, соответствуют двум возможным ориентациям спина фермиона.

Система уравнений (13) совпадает с системой уравнений в задаче о движении релятивистского заряженного фермиона во внешнем кулоновском поле в $2 + 1$ измерениях. Последняя задача была решена в [16]. Используя результаты работ [16], нетрудно показать, что дискретный спектр для s или E ($E < m$) возможен при $-\mu a \equiv \alpha > 0$ только для $\zeta = -1$, а при $\alpha < 0$ только для $\zeta = 1$. Подчеркнем, что спектр энергий нейтрального фермиона в поле (6) определяется формулой (15) и является квазинепрерывным и в области $E < m$.

Функции $f(r)$ и $g(r)$ имеют вид [16]

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{m + E} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma-1} (Q_1 + Q_2), \\ g &= \sqrt{m - E} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma-1} (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где введены обозначения

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2}, \quad (17)$$

а γ определяет асимптотическое поведение волновых функций при малых r .

Решение, конечное при $\rho = 0$, выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(a, b; z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF \left(\gamma - \frac{1}{2} - \left(\frac{\alpha E}{\lambda} \right), 2\gamma; \rho \right), \\ Q_2 &= DF \left(\gamma + \frac{1}{2} - \left(\frac{\alpha E}{\lambda} \right), 2\gamma; \rho \right), \end{aligned} \quad (18)$$

причем связь между постоянными A и D определяется соотношением

$$D = \frac{\gamma - \frac{1}{2} - \frac{\alpha E}{\lambda}}{l + \frac{1}{2} + \frac{\alpha m}{\lambda}} A. \quad (19)$$

Остающийся неопределенным общий нормировочный коэффициент A можно найти из условия

$$\int_0^\infty (f^2 + g^2) r dr = 1. \quad (20)$$

Заметим, что коэффициент A проще найти, используя асимптотический вид функций при $r \rightarrow \infty$. Мы находить A не будем.

Собственные значения энергии определяются из уравнения

$$\gamma - \frac{1}{2} - \frac{\alpha E}{\lambda} = -n, \quad (21)$$

причем нетрудно показать, что допустимы следующие значения радиального квантового числа n : $0, 1, 2, \dots$ при $l \geq 0$ и $1, 2, 3, \dots$ при $l < 0$. Тогда

$$E_{n,l} = m \left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(n + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

а спектр энергий нейтрального фермиона в аксиально-симметричном магнитном поле (6) имеет вид

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2 + (E_{n,l} - \mu b)^2}. \quad (23)$$

Волновые функции непрерывного спектра ($E > m$) можно получить из функций дискретного спектра заменами

$$\begin{aligned} \sqrt{E + m} &\rightarrow \sqrt{E + \zeta m}, & \sqrt{m - E} &\rightarrow -i\sqrt{E - \zeta m}, \\ \lambda &\rightarrow -ik, & -n &\rightarrow \gamma - \frac{i\alpha E}{k}, \end{aligned} \quad (24)$$

и, разумеется, заново должна быть произведена нормировка функций. Мы не будем приводить здесь волновые функции состояний непрерывного спектра.

Итак, главная особенность состояний нейтрального фермиона с АММ μ в магнитном поле (6) состоит в том, что квазидискретный спектр энергий существует в зависимости от знака μ только при одном значении проекции спина фермиона. Отметим также, что магнитное поле вида (6) можно создать только с помощью внешних токов, текущих во всем пространстве, так как $\text{rot } \mathbf{B} \neq 0$.

4. ФЕРМИОН В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

При нахождении решений уравнения Дирака–Паули для массивного нейтрального фермиона с аномальным (спиновым) магнитным моментом μ в электрических полях, обладающих центральной симметрией, используем сферические координаты (r, θ, ϕ) . Вектор напряженности внешнего электрического поля зададим в виде

$$\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r, \quad (25)$$

где $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор в радиальном направлении.

Решение уравнения Дирака–Паули ищем в виде (7). Тогда спектр энергий фермиона определяется из стационарного уравнения Дирака–Паули (8), а гамильтониан Дирака–Паули для поля (25) имеет вид

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + i\mu\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{E} + \beta m. \quad (26)$$

Можно показать, что в поле (25) интегралами движения являются операторы полного момента частицы $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, где $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$, одна из проекций полного момента (на ось z), а также спиновый оператор $N_0 = \beta(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L} + 1)$, введенный Дираком [17]. Нелишне отметить, что оператор $N_0 = N^0$ является временной компонентой спинового векторного оператора [18]. Состояния рассматриваемого нейтрального фермиона в центрально-симметричных электрических полях можно выбрать как собственные состояния гамильтониана (26) и операторов $\mathbf{J}^2$, J_z и N_0 с собственными значениями $(l+1/2)(l+3/2)$, $m+1/2$ и $s(l+1)$, соответственно, где для характеристики двух возможных ориентаций спина фермиона вдоль вектора момента $\mathbf{J}$ введено квантовое число $s = \pm 1$.

Волновую функцию стационарного состояния ψ (в стандартном представлении матриц Дирака) ищем в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где φ и χ – двухкомпонентные спиноры. Тогда стационарное уравнение Дирака–Паули принимает вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - i\mu E \mathbf{e}_r) \varphi &= (\mathcal{E} + m) \chi, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + i\mu E \mathbf{e}_r) \chi &= (\mathcal{E} - m) \varphi, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – матрицы Паули.

Определим два двухкомпонентных спинора [10], [18], [19]

$$\begin{aligned} u_{lm}^+(\theta, \phi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} Y_{l,m}(\theta, \phi) \\ \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} Y_{l,m+1}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, & u_{lm}^-(\theta, \phi) &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l-m+1}{2l+3}} Y_{l+1,m}(\theta, \phi) \\ -\sqrt{\frac{l+m+2}{2l+3}} Y_{l+1,m+1}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \\ l &= 0, 1, 2, \dots, \quad m = -(l+1), -l, \dots, l. \end{aligned}$$

Здесь $Y_{lm}(\theta, \phi)$ – шаровые функции [15] (сферические гармоники [20]). Обратим внимание, что спиноры u^+ , u^- являются общими собственными функциями операторов $\mathbf{J}^2$, J_z , $\mathbf{L}^2$ с собственными значениями

$$\left(l + \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{3}{2}\right), \quad m + \frac{1}{2}, \quad l(l+1)$$

и

$$\left(l + \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{3}{2}\right), \quad m + \frac{1}{2}, \quad (l+1)(l+2),$$

соответственно.

Биспинор (27) представим в виде

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1+s}{2} \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \chi^+ \end{pmatrix} + \frac{1-s}{2} \begin{pmatrix} \varphi^- \\ \chi^- \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1+s}{2r} \begin{pmatrix} f_s(r)u_{lm}^+(\theta, \phi) \\ ig_s(r)u_{lm}^-(\theta, \phi) \end{pmatrix} + \frac{1-s}{2r} \begin{pmatrix} f_s(r)u_{lm}^-(\theta, \phi) \\ ig_s(r)u_{lm}^+(\theta, \phi) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (29)$$

Подставляя (29) в (28), после несложных преобразований приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для функций f_s и g_s , характеризующих радиальное движение:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dr} + s\frac{l+1}{r} + \mu E\right)f_s + (\mathcal{E} + m)g_s &= 0, \\ \left(\frac{d}{dr} - s\frac{l+1}{r} - \mu E\right)g_s - (\mathcal{E} - m)f_s &= 0.\end{aligned}\quad (30)$$

Напомним, что квантовое число s принимает значения ± 1 и характеризует ориентацию проекции спина фермиона вдоль вектора момента $\mathbf{J}$. Радиальные функции f_s и g_s нормированы условием

$$\int_0^\infty (|f_s|^2 + |g_s|^2) dr = 1. \quad (31)$$

Заметим, что при заменах $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{E}$, $\mu \rightarrow -\mu$ уравнение (30) для f_{-1} переходит в (30) для g_1 , а уравнение (30) для f_1 — в (30) для g_{-1} . Такими же свойствами симметрии обладает система уравнений (13) для нейтрального фермиона с АММ в магнитном поле (6). Эти свойства позволяют по найденным решениям с “положительными” частотами ($\mathcal{E} > 0$) построить решения с “отрицательными” частотами ($\mathcal{E} < 0$).

Исключая из системы уравнений (30) функцию f_s или g_s , получим следующие независимые уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^2}{dr^2} + \mathcal{E}^2 - m^2 + \mu\left(-2sE\frac{l+1}{r} \pm \frac{dE}{dr}\right) - \right. \\ \left. - \frac{(l+1)(l+1 \pm s)}{r^2} - (\mu E)^2\right] \begin{pmatrix} f_s(r) \\ g_s(r) \end{pmatrix} = 0,\end{aligned}\quad (32)$$

где верхний знак относится к уравнениям для функций $f_s(r)$, а нижний знак — для $g_s(r)$. Уравнения (32) для функций f_s и g_s имеют вид радиального уравнения Шредингера в центральном поле с эффективными потенциалами

$$U_\pm = 2\mu Es\frac{l+1}{r} \mp \mu\frac{dE}{dr} + \frac{(l+1)(l+1 \pm s)}{r^2} + (\mu E)^2. \quad (33)$$

Первый член в (33) характеризует спин-орбитальное взаимодействие массивного нейтрального фермиона, обладающего АММ, с электрическим полем. Мы увидим, что влияние этого члена на свойства состояний и спектр энергий нейтрального фермиона

оказывается весьма существенным. Далее, уже из вида (33) следует, что спектр энергий частиц лежит в области энергий $\mathcal{E} \geq m$. Действительно, если, например, в некоторой области r $U_+(r) > 0$, то в той же области $U_-(r) < 0$, и наоборот, если $U_+(r) < 0$, то $U_-(r) > 0$. Отсюда следует, что $\mathcal{E}^2 - m^2 \geq 0$, и, значит, низший (положительный) уровень энергии $\mathcal{E} \geq m$. Точные решения системы (30) можно получить для некоторых конкретных функций $E(r)$. Для определенности фиксируем знак АММ фермиона, полагая $\mu > 0$; АММ антифермиона равен по величине, но противоположен по знаку, так что $\mu < 0$.

4.1. Радиально-постоянное поле $E(r) = a$. Рассмотрим точные решения системы (30) в радиально-постоянном электрическом поле с $E(r) = a > 0$ (случай $a < 0$ заменой переменных в (30) сводится к случаю $a > 0$). Как видно из (32), все связанные состояния в этом поле существуют лишь при $s = -1$, причем спектр энергий связанных состояний лежит в области $\sqrt{m^2 + (\mu a)^2} < \mathcal{E} \leq m$. Все состояния с $s = 1$ принадлежат непрерывному спектру энергий. Для этих состояний $\mathcal{E} > \sqrt{m^2 + (\mu a)^2}$.

Решения уравнений (32) с $s = -1$ удобно выразить через функции Уиттекера [21]:

$$f_{-1}(r) = AW_{\beta, \gamma}(2\lambda r), \quad g_{-1}(r) = BW_{\beta, \gamma+1}(2\lambda r), \quad (34)$$

где

$$\beta = \frac{\mu a(l+1)}{\lambda}, \quad \lambda = \sqrt{m^2 + (\mu a)^2 - \mathcal{E}^2}, \quad \gamma = l + \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Связь между постоянными A и B можно найти из любого из уравнений (30), используя рекуррентные соотношения для функций Уиттекера [22]

$$(2\mu + 1) \frac{dW_{\nu, \mu}(z)}{dz} - \left[\frac{(2\mu + 1)^2}{2z} - \nu \right] W_{\nu, \mu}(z) = \left(\nu - \mu - \frac{1}{2} \right) W_{\nu, \mu+1}(z).$$

В результате найдем $A(\lambda - \mu a) = B(\mathcal{E} + m)$. Заметим, что в низшем связанном состоянии ($\mathcal{E} = m$) $\lambda = \mu a$ и, следовательно, $B = 0$. Обе функции Уиттекера в (34) должны сводиться к полиномам, что имеет место при выполнении условий

$$\frac{1}{2} + \gamma - \beta = -n \quad (36)$$

для функции $f_{-1}(r)$ и

$$\frac{1}{2} + \gamma + 1 - \beta = -n \quad (37)$$

для функции $g_{-1}(r)$.

Если $n = 1, 2, \dots$, то обе функции Уиттекера сводятся к полиномам, если же $n = 0$, то к полиному сводится лишь функция $f_{-1}(r)$. Но равенство $n = 0$ означает, что $\mathcal{E} = m$, $\lambda = \mu a$, а в этом случае, как было показано выше, коэффициент $B = 0$, так что $g_{-1}(r) = 0$. Таким образом, из определения (36) найдем выражение для дискретного

спектра энергий с учетом его явной зависимости от знака проекции спина нейтрального фермиона:

$$\mathcal{E}_{nl s} = \left[m^2 + (\mu a)^2 \frac{(n+l+1)^2 - (l+1)^2}{(n+l+1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1-s}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

Здесь n имеет смысл радиального квантового числа. Видно, что низший уровень энергии $\mathcal{E}_{0l} = m$ не зависит от l , т.е. уровень энергии с $n = 0$ вырожден с (счетно) бесконечной кратностью [19].

Состояния непрерывного спектра ($\mathcal{E} > \sqrt{m^2 + (\mu a)^2}$) можно получить из функций дискретного спектра с помощью замен типа (24). Мы их здесь приводить не будем, подчеркнем только, что при выбранном знаке АММ фермиона $\mu > 0$ и электрического поля $a > 0$ проекция спина фермиона на вектор момента $\mathbf{J}$ может принимать только одно значение $s = 1$. Итак, состояния нейтрального фермиона с АММ μ в радиально-постоянном электрическом поле имеют две главные особенности: основной уровень энергии дискретного спектра вырожден с (счетно) бесконечной кратностью; как дискретный, так и непрерывный спектры энергий существуют в зависимости от знака μ только для одного значения проекции спина фермиона.

4.2. Центральнo-симметричные поля $E(r) = er$ и $E(r) = a/r$. Найдем точные решения системы (30) с “положительными” частотами в электрическом поле $E(r) = er$ с $e > 0$ (полагаем также, что $\mu > 0$). Из (32) нетрудно установить, что в поле $E(r) = er > 0$ связанные состояния существуют для двух значений квантового числа $s = \pm 1$. Решение задачи полностью аналогично решению известной задачи нерелятивистской квантовой механики – уравнения Шредингера для осцилляторного потенциала. Выполнив простые и стандартные процедуры в уравнениях (32), нетрудно показать, что функции $f_s(r)$ и $g_s(r)$, конечные при $r \rightarrow 0$, можно представить в виде

$$\begin{aligned} f_s(r) &= A r^{l+1} e^{-\frac{|\mu e| r^2}{2}} F(a, b; |\mu e| r^2), \\ g_s(r) &= B r^{l+2} e^{-\frac{|\mu e| r^2}{2}} F(a+1, b+1; |\mu e| r^2), \end{aligned} \quad (39)$$

где введены обозначения

$$a = \frac{1}{2} \left(l + \frac{4+s}{2} - d \right), \quad d = \frac{\mathcal{E}^2 - m^2 - s\mu e(2l+2-s)}{2|\mu e|}, \quad b = l + \frac{3}{2}, \quad (40)$$

а $F(a, b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Дискретный спектр энергий фермиона определяется из условия

$$a = -n, \quad (41)$$

тогда

$$d = 2n + l + \frac{4+s}{2},$$

откуда получим

$$\mathcal{E}_{nl s} = \sqrt{m^2 + |\mu e| [4n + (2l + 3)(1 + s)]}, \quad (42)$$

где n имеет смысл радиального квантового числа. В полученном выражении уровни энергии (42) явно зависят от ориентации спина нейтрального фермиона. Видим также, что все уровни энергии с $s = -1$ не зависят от l , т.е. все эти уровни энергии вырождены с (счетно) бесконечной кратностью. Связь между постоянными A и B можно найти из любого из уравнений (30), используя рекуррентные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций. В результате найдем $B(2l + 3) = -A(s\mathcal{E} + m)$. Отметим, что в низшем связанном состоянии с $s = -1$, $n = 0$ ($\mathcal{E} = m$) $B = 0$.

Заметим также, что все найденные выше решения можно записать в терминах одной из специальных функций – вырожденной гипергеометрической функции $F(a, b; z)$, функции Уиттекера $W_{\beta, \gamma}(z)$ или полинома Лагерра $L_r^k(z)$, используя соотношения между этими функциями [21]

$$\begin{aligned} W_{l+\mu+\frac{1}{2}, \mu}(z) &= (-1)^l z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} (2\mu + 1)(2\mu + 2) \dots (2\mu + l) F(-l, 2\mu + 1; z) = \\ &= (-1)^l z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} L_l^{2\mu}(z), \end{aligned} \quad (43)$$

справедливые при условии, что $l + 1$ – натуральное число.

В электрическом поле $E(r) = a/r$ с $a > 0$ (полагаем, как и выше, $\mu > 0$) существуют только состояния непрерывного спектра. Точные решения системы (30) с “положительными” частотами выражаются через функции Бесселя $J_\nu(z)$ и функции Неймана $N_\nu(z)$ индекса

$$\nu = \mu a - s(l + 1) \mp \frac{1}{2}$$

следующим образом:

$$f_s = \sqrt{r} (A J_{|\nu|}(\kappa r) + C N_{|\nu|}(\kappa r)), \quad g_s = \sqrt{r} (B J_{|\nu|}(\kappa r) + D N_{|\nu|}(\kappa r)),$$

где

$$\kappa = \sqrt{\mathcal{E}^2 - m^2}$$

и верхний знак в выражении для ν относится к функции f_s , а нижний знак – к функции g_s . Для конечности функций при $r = 0$ необходимо, чтобы $C = D = 0$. Отметим, что плоская конфигурация электрического поля $E = a/r$ соответствует полю, в котором наблюдался эффект Ааронова–Кашера, но конфигурация поля в эксперименте [12] скорее соответствовала аксиальной (а не центральной) симметрии.

4.3. Спектр энергий античастиц. Отрицательные собственные значения одночастичного гамильтониана Дирака–Паули нужно знать (уже в рамках одночастичной задачи) в случае пересечения уровней энергии, принадлежащих в отсутствие поля ветвям $\mathcal{E} \geq m$ и $\mathcal{E} \leq -m$. Решения уравнения Дирака–Паули с “отрицательными” частотами влияют на определение вакуумного состояния вторично квантованной теории. Поэтому обсудим кратко спектр “отрицательных” энергий одночастичного уравнения Дирака–Паули.

Обозначим нормированные (соответствующим образом) собственные функции уравнения Дирака–Паули, относящиеся к положительным ($\mathcal{E}_n^+ > 0$) и отрицательным ($\mathcal{E}_n^- < 0$) собственным значениям одночастичного гамильтониана Дирака–Паули во внешнем поле, $\psi_n^+(x)$ и $\psi_n^-(x)$, соответственно. Отрицательно-частотные решения уравнения Дирака–Паули, описывающие античастицу, можно получить из найденных выше положительно-частотных собственных функций с помощью преобразования зарядового сопряжения. Этим преобразованием решение уравнения Дирака–Паули с положительной энергией и проекцией спина s переводится в решение с отрицательной энергией и проекцией спина $-s$. Для получения же спектра “отрицательных” энергий в найденных выше формулах (38) и (42) нужно просто заменить s на $-s$. Дискретные уровни энергии, принадлежащие положительно- и отрицательно-частотным состояниям в электрическом поле, имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{nl s} &= \pm \left[m^2 + (\mu a)^2 \frac{(n+l+1)^2 - (l+1)^2}{(n+l+1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1 \pm s}{2}, \\ \mathcal{E}_{nl s} &= \pm \sqrt{m^2 + |\mu e| [4n + (2l+3)(1 \pm s)]}, \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (44)$$

Спектры и отрицательно-частотные решения уравнения Дирака–Паули в присутствии магнитного поля можно найти точно так же.

Спектры “положительных” (частиц) и “отрицательных” (античастиц) энергий гамильтониана Дирака–Паули для нейтрального фермиона в центрально-симметричном электрическом поле принципиально отличаются от аналогичных спектров гамильтониана Дирака для заряженного фермиона в центральном электрическом поле. В частности, спектры энергий уравнения Дирака–Паули симметричны относительно уровня Ферми $E_F = 0$, причем все дискретные уровни связанных состояний лежат выше m , так что минимальная ширина “щели” между дискретными уровнями, принадлежащими положительно- и отрицательно-частотным состояниям, равна $2m$. Спектры энергий уравнения Дирака для заряженного фермиона не симметричны относительно уровня $E_F = 0$.

В самом деле, спектр “положительных” энергий уравнения Дирака для электрона в кулоновском поле положительно заряженного ядра дискретен в области $m > \mathcal{E} \geq 0$ и непрерывен в области $\mathcal{E} > m$, но в том же поле ядра в области $0 > \mathcal{E} > -m$ нет ни одного отрицательно-частотного (позитронного) состояния. При этом минимальная ширина “щели” между уровнями, принадлежащими положительно- и отрицательно-частотным состояниям, меньше $2m$.

5. НУЛЕВЫЕ МОДЫ

Найденные выше решения и спектр энергий уравнения Дирака–Паули для нейтрального фермиона с АММ в присутствии внешних электрических полей допускают переход к безмассовому пределу $m = 0$. Заметим, что с точки зрения вторично квантованной теории в такой модели элементарный фермион имеет “затравочную” массу $m = 0$, но только по отношению к вакууму в отсутствие внешнего электрического поля; по отношению же к вакууму в присутствии внешнего электрического поля фермион имеет не-

нулевую массу за счет взаимодействия АММ с внешним полем (см. формулу (44)). Интересно, что в обсуждаемой модели с нулевой “затравочной” массой $m = 0$ существуют фермионные состояния с нулевой энергией. Решения с нулевой энергией называют нулевыми модами.

Теоретически фермионные состояния с нулевой энергией впервые были обнаружены Джакивом и Ребби [23] в квантовой теории размерности $1 + 1$, описывающей безмассовое дираковское поле, взаимодействующее с внешним топологическим солитонным полем (кинком). Эта теория симметрична относительно преобразования зарядового сопряжения (т.е. зарядово-самосопряжена). В этой модели существование невырожденного нормируемого зарядово-самосопряженного решения уравнения Дирака, описывающего фермионное состояние с нулевой энергией, является определяющим и приводит к тому, что у безмассового дираковского поля появляются состояния с полуцелым фермионным числом $\pm 1/2$; появление таких состояний оказывается тесно связанным со спектральной симметрией модели. Джакив [24] также показал, что вакуум солитонного сектора в модели безмассовых фермионов, взаимодействующих с топологическим солитонным полем, и известная аксиальная аномалия, обнаруженная в [25], [26], могут быть интерпретированы как явления, возникающие из-за перестройки ветвей спектров положительных и отрицательных энергетических состояний соответствующих моделей. Отметим, что состояния с электронным числом $1/2$ открыты в полимерах (в полиацетилене) [27].

Дискретные уровни энергии связанных состояний (кинематически) безмассовых нейтральных фермионов с АММ в центрально-симметричных электрических полях определяются формулами (44), в которых нужно положить $m = 0$. Тогда, низший уровень энергии, принадлежащий положительно-частотным состояниям с $s = -1$, есть $\mathcal{E}_{0l s} = 0$. За исключением его, для каждого ненулевого собственного значения $\mathcal{E}_{nl s}$ имеем пару собственных значений гамильтониана Дирака–Паули в соответствии с приведенными выше соображениями, основанными на зарядовом сопряжении. Тот факт, что непрерывный спектр начинается с $\mathcal{E} = \mu a$, согласуется с тем обстоятельством, что фермион (с $m = 0$) имеет массу μa .

При $\mathcal{E} = 0$ и $m = 0$ функции f_s и g_s в системе (30) оказываются независимыми друг от друга и их можно также найти прямо из (30); эти функции, конечно, можно получить из найденных выше решений, полагая в них $\mathcal{E} = 0$ и $m = 0$. Найдем изолированные решения с нулевой энергией уравнения Дирака–Паули во внешних центрально-симметричных электрических полях для общего случая $E(r) = dV(r)/dr$. Выше было показано, что низший уровень энергии связанного состояния массивного нейтрального фермиона есть $\mathcal{E} = m = 0$. Для этого случая решение системы (30) легко находится в квадратурах и имеет вид

$$\begin{aligned} f_s &= A r^{-s(l+1)} \exp \left[-\mu \int dV(r) \right], \\ g_s &= B r^{s(l+1)} \exp \left[\mu \int dV(r) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

а коэффициенты A и B определяются из условия нормировки и ограниченности решений.

Найдем сначала нулевые моды в явном виде в рассмотренных выше электрических полях. Нормированные ограниченные при $r = 0$ решения в радиально-постоянном поле $E = a$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_{-1}(\mu a > 0) &= A r^{l+1} e^{-\mu a r}, \quad f_1 = g_s = 0, \quad A = \frac{(2\mu a)^{l+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(l+1)!}}, \\ g_1(\mu a < 0) &= f_{-1}(\mu a > 0), \quad g_{-1} = f_s = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Нормированные ограниченные при $r = 0$ нулевые моды в поле $E = ar$ нетрудно получить в виде

$$\begin{aligned} f_{-1}(\mu a > 0) &= A r^{l+1} e^{-\frac{\mu a r^2}{2}}, \quad f_1 = g_s = 0, \quad A = \frac{2^{\frac{3}{4}} (\mu a)^{\frac{l}{2}+\frac{3}{4}}}{\sqrt{\Gamma(l+\frac{3}{2})}}, \\ g_1(\mu a < 0) &= f_{-1}(\mu a > 0), \quad g_{-1} = f_s = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Найдем также решения для случая кулоновского поля $E(r) = -a/r^2$, $V(r) = a/r$, $a > 0$. В этом поле нормированные ограниченные при $r = 0$ решения с нулевой энергией можно найти в виде

$$\begin{aligned} f_1(\mu a > 0) &= A r^{-l-1} e^{-\frac{\mu a}{r}}, \quad f_{-1} = g_s = 0, \quad A = \frac{(\mu a)^{l+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2l!}}, \\ g_{-1}(\mu a < 0) &= f_1(\mu a > 0), \quad g_1 = f_s = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Решения (46)–(48) являются изолированными.

Мы видим, что если “масса” нейтрального фермиона полностью генерируется электрическим полем, то существует счетное бесчисленное множество пар изолированных зарядово-сопряженных решений уравнения Дирака–Паули для нейтрального фермиона с АММ во внешних центрально-симметричных электрических полях. Найденные нами пары решений с нулевой энергией вырождены и не являются зарядово-самосопряженными решениями (при преобразовании зарядового сопряжения получается решение с другим знаком проекции спина фермиона), поэтому полужелые фермионные заряды вакуума не будут фигурировать во вторично квантованной теории.

Итак, дискретный спектр энергий массивного нейтрального фермиона с АММ в аксиально-симметричном магнитном поле (6) лежит в области $\mathcal{E} \leq m$ (при $p = 0$), а в центрально-симметричных электрических полях – в области $\mathcal{E} \geq m$. Для электрона имеет место обратная картина: квазидискретный спектр энергий электрона в магнитном поле лежит в области $\mathcal{E} \geq m$, а в центрально-симметричных электрических полях – в области $\mathcal{E} \leq m$. Дискретные уровни энергий нейтрального фермиона с АММ в аксиально-симметричном магнитном поле (6) (при $p = 0$), принадлежащие областям $m \geq \mathcal{E} > 0$ и $0 > \mathcal{E} \geq -m$, симметричны относительно уровня $E_F = 0$ лишь при $b = 0$. Поэтому пересечение уровней энергии из этих областей может иметь место в точке

$\mathcal{E} = 0$ при $b = 0$, если $\mu a = 1/2$. Низший уровень энергии ($\mathcal{E} = m$) массивного нейтрального фермиона с АММ в центрально-симметричных электрических полях вырожден с бесконечной кратностью, а спин фермиона ориентирован против сохраняющегося вектора момента $\mathbf{J}$.

Интересен вопрос о поведении квантово-механической системы, содержащей большое число нейтральных фермионов с АММ, в таких полях. Чтобы снять громадное вырождение в системе, необходимо учесть взаимодействие между фермионами, которое, очевидно, может быть обусловлено прежде всего магнитным взаимодействием спиновых магнитных дипольных моментов фермионов. Для системы, содержащей два фермиона, это взаимодействие должно приводить к связи спинов частиц и, следовательно, имеет вид

$$V = JS_1 \cdot S_2. \quad (49)$$

Известно [28], что член вида (49) может появиться и за счет обменного взаимодействия, явно не зависящего от спина, при учете принципа Паули. Это взаимодействие, определяемое обменным интегралом J , зависит от того, насколько сильно перекрываются волновые функции двух фермионов.

Квантово-механическая система большого числа массивных нейтральных фермионов с АММ в сферически-симметричных электрических полях в основном состоянии при учете взаимодействия вида (49) с $J < 0$ в пределе бесконечного числа частиц имеет сходство с гейзенберговским ферромагнетиком. Гейзенберговский ферромагнетик, как известно [29], дает пример модели, в которой спонтанное нарушение симметрии приводит к возникновению спонтанной намагниченности, что представляется чрезвычайно интересным, если мы вспомним, что центральные области нейтронных звезд, как предполагается [30], характеризуются сверхвысокими плотностями нейтронов и протонов (протоны могут создать центрально-симметричное электрическое поле) и “вмороженным” (в звезду) магнитным полем. Впрочем, вопрос о возможности применения рассмотренных здесь квантово-механических систем для моделирования физических процессов, которые, по-видимому, могут протекать в центральной области нейтронной звезды, должен быть изучен отдельно.

Благодарности. Мне приятно поблагодарить А. В. Борисова, О. Ф. Дорофеева и Б. А. Лысова за плодотворные дискуссии.

Список литературы

- [1] *W. Pauli.* Rev. Mod. Phys. 1941. V. 13. P. 203.
- [2] *Л. Д. Ландау.* ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 405.
- [3] *J. Schwinger.* Particles, Sources, and Fields. Don Mills, Ontario: Addison-Wesley, 1970.
- [4] *И. М. Тернов, В. Г. Багров, Ю. И. Клименко.* Изв. вузов. Физика. 1968. № 2. С. 50.
- [5] *Ю. И. Клименко, В. В. Кулиш, А. И. Худомясов.* Изв. вузов. Физика. 1974. № 10. С. 142.
- [6] *П. М. Лавров.* Изв. вузов. Физика. 1977. № 12. С. 68.
- [7] *И. М. Тернов, В. Г. Багров.* ЯФ. 1966. Т. 4. С. 797; ДАН СССР. 1966. Т. 168. С. 1298.
- [8] *Ю. И. Клименко.* ЯФ. 1978. Т. 27. С. 1677.
- [9] *В. Г. Багров, В. Е. Степанов.* Изв. вузов. Физика. 1967. № 1. С. 142.
- [10] *И. М. Тернов, В. Г. Багров, П. В. Бозриков.* Изв. вузов. Физика. 1971. № 11. С. 39.

- [11] *Y. Aharonov, A. Casher.* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 319; *A. S. Goldhaber.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 482.
- [12] *C. Cimmino, G. I. Opat, A. G. Klein, H. Kaiser, S. A. Werner, M. Arif, R. Clothier.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 380.
- [13] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 407.
- [14] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
- [15] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
- [16] *V. R. Khalilov, C. L. Ho.* Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 615; *C. L. Ho, V. R. Khalilov.* Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 032104.
- [17] *П. А. М. Дирак.* Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979.
- [18] *В. Г. Базров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Шаповалов.* Точные решения релятивистских волновых уравнений. Новосибирск: Наука, 1982.
- [19] *Q.-G. Lin.* Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 022101.
- [20] *К. Ицксон, Ж.-Б. Зюбер.* Квантовая теория поля. Т. 1. М.: Мир, 1984.
- [21] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963.
- [22] *Н. Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
- [23] *R. Jackiw, C. Rebbi.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 3398.
- [24] *R. Jackiw.* Effect of Dirac's negative energy sea on quantum numbers. hep-th/9903255.
- [25] *S. Adler.* Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 2496.
- [26] *J. S. Bell, R. Jackiw.* Nuovo Cimento A. 1969. V. 60. P. 47.
- [27] *W. P. Su, J. R. Schrieffer, A. J. Heeger.* Phys. Rev. Lett. 1979. V. 2. P. 1698.
- [28] *Р. Фейнман.* Статистическая механика. М.: Мир, 1975.
- [29] *К. Ицксон, Ж.-Б. Зюбер.* Квантовая теория поля. Т. 2. М.: Мир, 1984.
- [30] *С. Вейнберг.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 5.VII.2000 г.