Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Вероятность образования пустоты в XXZ -цепочке Гейзенберга
спина $1/2$, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 1, 96–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf44>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:02:04

© 2004 г.

Н. А. Славнов*

ВЕРОЯТНОСТЬ ОБРАЗОВАНИЯ ПУСТОТЫ В XXZ -ЦЕПОЧКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА СПИНА $1/2$

Приведены некоторые явные результаты для вероятности образования пустоты в XXZ -цепочке Гейзенберга спина $1/2$. Ответы получены с помощью новых интегральных представлений для корреляционных функций.

Ключевые слова: интегрируемые системы, корреляционные функции, асимптотика.

1. ВВЕДЕНИЕ

XXZ -магнетик Гейзенберга описывает одномерную цепочку квантовых спиновых частиц с взаимодействием ближайших соседей. Гамильтониан модели спина $1/2$ имеет вид

$$H = \sum_{m=1}^M (\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y + \Delta (\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1)), \quad (1.1)$$

где Δ является параметром анизотропии, $\sigma_m^{x,y,z}$ – операторы спина $1/2$ (матрицы Паули), ассоциированные с m -м узлом цепочки. Граничные условия предполагаются периодическими: $\sigma_{M+1}^\alpha = \sigma_1^\alpha$, $\alpha = x, y, z$. Гамильтониан (1.1) является матрицей размера $2^M \times 2^M$, действующей в 2^M -мерном пространстве $\mathcal{H} = \bigotimes_{m=1}^M \mathcal{H}_m$, где $\mathcal{H}_m \sim \mathbb{C}^2$. Операторы σ_k^α действуют как соответствующие матрицы Паули в локальном пространстве $\mathcal{H}_k$ и как единица в остальных пространствах.

В настоящей статье приводятся некоторые точные результаты для корреляционной функции, получившей название *вероятность образования пустоты*. Эта корреляционная функция задается следующим матричным элементом:

$$\tau(m, \Delta) = \left\langle \psi_g \left| \prod_{j=k}^{k+m-1} \frac{1 - \sigma_j^z}{2} \right| \psi_g \right\rangle, \quad (1.2)$$

где $|\psi_g\rangle$ – основное состояние гамильтониана. Физический смысл этого коррелятора состоит в вероятности того, что спины всех частиц в узлах с номерами $k, k+1, \dots, k+m-1$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

направлены вниз. В силу трансляционной инвариантности мы в дальнейшем без ограничения общности будем полагать $k = 1$. Кроме того, ниже мы будем рассматривать лишь случай $|\Delta| < 1$ (безмассовая фаза) и термодинамический предел $M \rightarrow \infty$. Заметим, однако, что существующие методы позволяют вычислять корреляторы также в цепочках с конечным числом узлов и при произвольном значении Δ .

В работах [1] уже были получены интегральные представления, которые формально позволяют вычислять любые корреляционные функции в XXZ -модели. В частности, вероятность образования пустоты задается m -кратным интегралом следующего вида:

$$\begin{aligned} \tau(m, \Delta) = & (-1)^m \left(-\frac{\pi}{\zeta} \right)^{m(m+1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{2\pi} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_m}{2\pi} \prod_{a>b}^m \frac{\text{sh}[\pi(\lambda_a - \lambda_b)/\zeta]}{\text{sh}(\lambda_a - \lambda_b - i\zeta)} \times \\ & \times \prod_{j=1}^m \frac{\text{sh}^{j-1}(\lambda_j - i\zeta/2) \text{sh}^{m-j}(\lambda_j + i\zeta/2)}{\text{ch}^m(\pi\lambda_j/\zeta)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\cos \zeta = \Delta$. Несмотря на то что подынтегральное выражение в (1.3) явно задано и содержит только элементарные функции, вычисление этого интеграла представляет известные сложности. В первую очередь, это связано с тем, что в (1.3) входят функции с двумя различными периодами: $2i\pi$ и $2i\zeta$. Ясно, что если π/ζ иррационально, то при $m \geq 2$ интеграл (1.3) не выражается через известные специальные функции. Если же π/ζ рационально, то формально интеграл сводится к конечной сумме вычетов. Однако даже в простейшем случае $\Delta = 0$ ($\zeta = \pi/2$), когда модель описывает свободные фермионы, долгое время не удавалось воспроизвести известный результат [2], [3] исходя из представления (1.3).

В настоящей работе мы исследуем вероятность образования пустоты, используя новое интегральное представление, полученное в работе [4]. Рассматриваются случаи $\Delta = 0$ и $\Delta = 1/2$ при произвольном m , а также асимптотическое поведение $\tau(m, \Delta)$ при $m \rightarrow \infty$ в безмассовой фазе. Приведенные ниже результаты были получены в работах [5]–[7].

2. НОВАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Для того чтобы описать новое интегральное представление для вероятности образования пустоты, удобно вместо величины $\tau(m, \Delta)$ рассмотреть вспомогательную функцию $\tau(m, \Delta|\{\xi\})$, зависящую от набора комплексных параметров $\xi_1, \dots, \xi_m$. При этом

$$\tau(m, \Delta) = \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow -i\zeta/2} \tau(m, \Delta|\{\xi\}). \quad (2.1)$$

В промежуточных формулах переменные $\{\xi\}$ всегда могут считаться различными, но достаточно близкими к $-i\zeta/2$.

Функция $\tau(m, \Delta|\{\xi\})$ задается следующим m -кратным интегралом [4]:

$$\tau(m, \Delta|\{\xi\}) = \frac{1}{m!} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{Z_m(\{\lambda\}, \{\xi\})}{\prod_{a=1}^m \prod_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^m \text{sh}(\xi_a - \xi_b)} \det_m \left[\frac{i}{2\zeta \text{sh}[\pi(\lambda_j - \lambda_k)/\zeta]} \right] d^m \lambda, \quad (2.2)$$

где

$$Z_m(\{\lambda\}, \{\xi\}) = \prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^m \frac{\text{sh}(\lambda_a - \xi_b) \text{sh}(\lambda_a - \xi_b - i\zeta)}{\text{sh}(\lambda_a - \lambda_b - i\zeta)} \times \\ \times \det_m \left(\frac{-i \sin \zeta}{\text{sh}(\lambda_j - \xi_k) \text{sh}(\lambda_j - \xi_k - i\zeta)} \right). \quad (2.3)$$

Ниже мы рассматриваем некоторые частные случаи представления (2.2).

2.1. Свободные фермионы. Наиболее простым является случай $\Delta = 0$ [6], когда исходная модель описывает свободные фермионы. Полагая в (2.3) $\zeta = \pi/2$, получаем

$$Z_m(\{\lambda\}, \{\xi\}) = 2^{-m^2} \prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^m \frac{\text{sh} 2(\lambda_a - \xi_b)}{\text{ch}(\lambda_a - \lambda_b)} \prod_{a>b}^m \text{sh}^{-1}(\xi_a - \xi_b) \det_m \left(\frac{2}{\text{sh} 2(\lambda_j - \xi_k)} \right). \quad (2.4)$$

Таким образом, при $\zeta = \pi/2$ функция Z_m пропорциональна детерминанту Коши, который легко вычисляется по формуле

$$\det_n \left(\frac{1}{\text{sh}(x_j - y_k)} \right) = \frac{\prod_{j>k}^n \text{sh}(x_j - x_k) \text{sh}(y_k - y_j)}{\prod_{j,k=1}^n \text{sh}(x_j - y_k)}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4), (2.5) в представление (2.2) и вычисляя предел $\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow -i\zeta/2$, находим

$$\tau(m, 0) = \frac{2^{m^2}}{m!(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\prod_{a>b}^m \text{sh}^2(\lambda_a - \lambda_b)}{\prod_{a=1}^m \text{ch}^m(2\lambda_a)} d^m \lambda. \quad (2.6)$$

Кратный интеграл в формуле (2.6) легко может быть факторизован, если воспользоваться тождеством

$$\int_a^b \det_m \chi_1(\lambda_j, u_k) \det_m \chi_2(\lambda_j, v_k) d^m \lambda = m! \det_m \left(\int_a^b \chi_1(\lambda, u_j) \chi_2(\lambda, v_k) d\lambda \right). \quad (2.7)$$

Здесь $\chi_j(\lambda, x)$ суть функции, которые при некоторых фиксированных значениях параметра $x = u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ принадлежат $L_2([a, b])$. Тождество (2.7) можно применить непосредственно к интегралу (2.6), однако удобно сначала сделать замену переменных $\text{ch} 2\lambda_j = \cos^{-1} p_j$. После такой замены получаем

$$\tau(m, 0) = \frac{1}{m!(2\pi)^m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \det_m(e^{-ip_j(k-1)}) \det_m(e^{ip_j(k-1)}) d^m p, \quad (2.8)$$

что дает нам возможность использовать (2.7) и получить представление для вероятности образования пустоты в виде детерминанта матрицы Тёплица

$$\tau(m, 0) = \det_m \left(\frac{\sin[\pi(j-k)/2]}{\pi(j-k)} \right). \quad (2.9)$$

Диагональные элементы матрицы (2.9) доопределены по непрерывности. Впервые этот ответ был получен в работе [8] непосредственно из интегрального представления (1.3).

Формула (2.9) позволяет получить явные выражения для вероятности образования пустоты, по крайней мере, для не слишком больших m . При $m \rightarrow \infty$ асимптотическое поведение функции $\tau(m, 0)$ было вычислено в работе [9] с использованием представления в виде определителя Фредгольма [3]

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(m, 0)}{m^2} = -\frac{1}{2} \ln 2. \quad (2.10)$$

Тот же самый ответ был позднее воспроизведен в работе [8] с помощью теоремы Уидома [10] об асимптотическом поведении тейлоровых детерминантов, а также в работе [6] с помощью метода седловой точки, примененного непосредственно к представлению (2.6).

2.2. Случай $\Delta = 1/2$. В отличие от точки $\Delta = 0$, в которой модель описывает свободные фермионы, значение $\Delta = 1/2$ с физической точки зрения ничем не выделено. Тем не менее в этом случае также удастся явно вычислить вероятность образования пустоты. В работе [11] была высказана гипотеза о том, что справедливо равенство

$$\tau\left(m, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m^2} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{(3k+1)!}{(m+k)!}. \quad (2.11)$$

Представление (2.2) позволяет доказать эту гипотезу буквально в несколько строк [5]. Полагая в (2.2) $\zeta = \pi/3$ и пользуясь элементарными формулами для гиперболического синуса тройного аргумента, получаем

$$\begin{aligned} \tau\left(m, \frac{1}{2} \middle| \{\xi\}\right) &= \left(\frac{3i}{4\pi}\right)^m \frac{(-1)^{(m^2-m)/2}}{2^{m^2} m!} \prod_{a>b}^m \frac{\operatorname{sh} 3(\xi_b - \xi_a)}{\operatorname{sh}(\xi_b - \xi_a)} \prod_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^m \operatorname{sh}^{-1}(\xi_a - \xi_b) \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^m} d^m \lambda \det_m \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda_j - \xi_k + i\pi/3)} \right) \times \\ &\times \det_m \left(\frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda_j - \xi_k) \operatorname{sh}(\lambda_j - \xi_k - i\pi/3)} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Используя (2.7), мы вновь сводим многомерный интеграл к однократному и в итоге получаем

$$\begin{aligned} \tau\left(m, \frac{1}{2}\right) &= \frac{(-1)^{(m^2-m)/2} 3^{(m^2+m)/2}}{2^{m^2}} \times \\ &\times \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow -i\zeta/2} \frac{1}{\prod_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^m \operatorname{sh}(\xi_a - \xi_b)} \det_m \left(\frac{\operatorname{sh}[(\xi_j - \xi_k)/2]}{\operatorname{sh}[3(\xi_j - \xi_k)/2]} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Остается воспользоваться тождеством

$$\begin{aligned} &\lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow -i\zeta/2} \frac{1}{\prod_{\substack{a,b=1 \\ a \neq b}}^m \operatorname{sh}(\xi_a - \xi_b)} \det_m \left(\frac{\operatorname{sh}[(\xi_j - \xi_k)/2]}{\operatorname{sh}[3(\xi_j - \xi_k)/2]} \right) = \\ &= (-1)^{(m^2-m)/2} 3^{-(m+m^2)/2} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{(3k+1)!}{(m+k)!}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

доказанным в работе [12], и мы приходим к ответу (2.11).

2.3. Асимптотическое поведение $\tau(m, \Delta)$ при больших m . Рассмотрим теперь асимптотическое поведение $\tau(m, \Delta)$ при $m \rightarrow \infty$ и произвольном значении Δ в безмассовом режиме [7]. Прежде всего перепишем (2.2), (2.3) в следующем виде:

$$\tau(m, \Delta) = \left(\frac{i}{2\zeta \sin \zeta} \right)^m \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^{(m^2-m)/2} \int_{\mathcal{D}} d^m \lambda \cdot F(\{\lambda\}, m) \times \\ \times \prod_{a>b}^m \frac{\text{sh}[\pi(\lambda_a - \lambda_b)/\zeta]}{\text{sh}(\lambda_a - \lambda_b - i\zeta) \text{sh}(\lambda_a - \lambda_b + i\zeta)} \prod_{a=1}^m \left(\frac{\text{sh}(\lambda_a - i\zeta/2) \text{sh}(\lambda_a + i\zeta/2)}{\text{ch}(\pi\lambda_a/\zeta)} \right)^m, \quad (2.15)$$

где

$$F(\{\lambda\}, m) = \lim_{\xi_1, \dots, \xi_m \rightarrow -i\zeta/2} \frac{1}{\prod_{a>b}^m \text{sh}(\xi_a - \xi_b)} \times \\ \times \det_m \left(\frac{-i \sin \zeta}{\text{sh}(\lambda_j - \xi_k) \text{sh}(\lambda_j - \xi_k - i\zeta)} \right). \quad (2.16)$$

Интегрирование ведется по области $\mathcal{D}$: $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m < \infty$.

Следуя стандартным аргументам метода седловой точки, мы будем оценивать интеграл (2.15) по максимальному значению подынтегрального выражения [7]. Пусть $\{\lambda'\}$ суть координаты максимума. Тогда переменные $\{\lambda'\}$ являются решениями системы уравнений для седловой точки. Предположим, что при достаточно больших m их распределение задается некоторой равновесной плотностью $\rho(\lambda')$:

$$\rho(\lambda'_j) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m(\lambda'_{j+1} - \lambda'_j)}. \quad (2.17)$$

Это позволит нам в пределе больших m заменять суммы по параметрам $\{\lambda'\}$ на интегралы. Более точно, если функция $f(\lambda)$ интегрируема на вещественной оси, то при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(\lambda'_j) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \rho(\lambda) d\lambda, \\ \frac{1}{m} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \frac{f(\lambda'_j)}{\lambda'_j - \lambda'_k} \rightarrow \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda'_k} \rho(\lambda) d\lambda. \quad (2.18)$$

Из соотношений (2.18) видно, что в точке максимума произведения в формуле (2.15) ведут себя как e^{cm^2} . Более сложной задачей является оценка поведения функции $F(\{\lambda'\}, m)$. Для того чтобы получить такую оценку, мы воспользуемся тождеством

$$\frac{i}{\text{sh}[\pi(\lambda - \xi_k)/\zeta]} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\lambda - \mu) d\mu}{2\pi \text{sh}[\pi(\mu - \xi_k)/\zeta]} = \frac{\zeta \sin \zeta}{\pi \text{sh}(\lambda - \xi_k) \text{sh}(\lambda - \xi_k - i\zeta)}, \quad (2.19)$$

где

$$K(\lambda) = -i \frac{\sin 2\zeta}{\text{sh}(\lambda - i\zeta) \text{sh}(\lambda + i\zeta)}. \quad (2.20)$$

Тогда при достаточно больших m детерминант в формуле (2.16) может быть факторизован следующим образом:

$$\begin{aligned} \det_m \left(\frac{-i \sin \zeta}{\operatorname{sh}(\lambda'_j - \xi_k) \operatorname{sh}(\lambda'_j - \xi_k - i\zeta)} \right) &\longrightarrow \\ &\longrightarrow (-2\pi i)^m \det_m \left(\delta_{jk} - \frac{K(\lambda'_j - \lambda'_k)}{2\pi i m \rho(\lambda'_k)} \right) \det_m \left(\frac{i}{2\zeta \operatorname{sh}[\pi(\lambda'_j - \xi_k)/\zeta]} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для доказательства этого соотношения достаточно перемножить матрицы в его правой части и воспользоваться формулами (2.18), (2.19).

Один из полученных новых детерминантов является детерминантом Коши (2.5), следовательно,

$$F(\{\lambda'\}, m) = (-i)^m \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^{(m^2+m)/2} \frac{\prod_{a>b}^m \operatorname{sh}[\pi(\lambda'_a - \lambda'_b)/\zeta]}{\prod_{a=1}^m \operatorname{ch}^m(\pi\lambda'_a/\zeta)} \det_m \left(\delta_{jk} - \frac{K(\lambda'_j - \lambda'_k)}{2\pi i m \rho(\lambda'_k)} \right). \quad (2.22)$$

Что же касается оставшегося в (2.22) детерминанта, то его оценка может быть получена при помощи неравенства Адамара

$$|\det_n(a_{jk})| \leq M^n n^{n/2}, \quad M = \max |a_{jk}|. \quad (2.23)$$

В силу (2.23) легко видеть, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \ln \det_m \left(\delta_{jk} - \frac{K(\lambda'_j - \lambda'_k)}{2\pi i m \rho(\lambda'_k)} \right) = 0. \quad (2.24)$$

Последнее соотношение означает, что содержащийся в нем детерминант не дает вклада в главный член асимптотического поведения, поэтому он может быть исключен из дальнейшего рассмотрения.

Таким образом, при $m \rightarrow \infty$ вероятность образования пустоты ведет себя следующим образом:

$$\tau(m, \Delta) \longrightarrow \left(\frac{\pi}{\zeta} \right)^{m^2} e^{m^2 S_0 + o(m^2)}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} S_0 \equiv S(\{\lambda'\}) &= \frac{1}{m^2} \sum_{a>b}^m \ln \left(\frac{\operatorname{sh}^2[\pi(\lambda'_a - \lambda'_b)/\zeta]}{\operatorname{sh}(\lambda'_a - \lambda'_b - i\zeta) \operatorname{sh}(\lambda'_a - \lambda'_b + i\zeta)} \right) + \\ &+ \frac{1}{m} \sum_{a=1}^m \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda'_a - i\zeta/2) \operatorname{sh}(\lambda'_a + i\zeta/2)}{\operatorname{ch}^2(\pi\lambda'_a/\zeta)} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

При этом параметры $\{\lambda'\}$ являются решениями уравнений седловой точки

$$\frac{\partial S_0}{\partial \lambda'_j} = 0. \quad (2.27)$$

В нашем случае система (2.27) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\zeta} \operatorname{th} \frac{\pi \lambda'_j}{\zeta} - \operatorname{cth} \left(\lambda'_j - \frac{i\zeta}{2} \right) - \operatorname{cth} \left(\lambda'_j + \frac{i\zeta}{2} \right) = \\ = \frac{1}{m} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \left(\frac{2\pi}{\zeta} \operatorname{cth} \frac{\pi}{\zeta} (\lambda'_j - \lambda'_k) - \operatorname{cth}(\lambda'_j - \lambda'_k - i\zeta) - \operatorname{cth}(\lambda'_j - \lambda'_k + i\zeta) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

С помощью формул (2.18) набор дискретных уравнений (2.28) преобразуется к одному интегральному уравнению на плотность распределения $\rho(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\zeta} \operatorname{th} \frac{\pi \lambda}{\zeta} - \operatorname{cth} \left(\lambda - \frac{i\zeta}{2} \right) - \operatorname{cth} \left(\lambda + \frac{i\zeta}{2} \right) = \\ = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\zeta} \operatorname{cth} \frac{\pi}{\zeta} (\lambda - \mu) - \operatorname{cth}(\lambda - \mu - i\zeta) - \operatorname{cth}(\lambda - \mu + i\zeta) \right) \rho(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (2.29)$$

а функционал S_0 принимает вид

$$\begin{aligned} S_0 = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \rho(\lambda) \ln \left(\frac{\operatorname{sh}(\lambda - i\zeta/2) \operatorname{sh}(\lambda + i\zeta/2)}{\operatorname{ch}^2(\pi\lambda/\zeta)} \right) + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\lambda \rho(\lambda) \rho(\mu) \ln \left(\frac{\operatorname{sh}^2[\pi(\lambda - \mu)/\zeta]}{\operatorname{sh}(\lambda - \mu - i\zeta) \operatorname{sh}(\lambda - \mu + i\zeta)} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Поскольку ядро интегрального оператора в уравнении (2.29) зависит от разности аргументов, уравнение явно решается с помощью преобразования Фурье

$$\hat{\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\lambda} \rho(\lambda) d\lambda = \frac{\operatorname{ch}(\omega\zeta/2)}{\operatorname{ch}\omega\zeta}. \quad (2.31)$$

Совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$\rho(\lambda) = \frac{\operatorname{ch}[\pi\lambda/(2\zeta)]}{\zeta\sqrt{2} \operatorname{ch}(\pi\lambda/\zeta)}. \quad (2.32)$$

Остается подставить найденное решение в формулу (2.30), и мы приходим к окончательному ответу

$$S_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}-i0} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{sh}[\omega(\pi - \zeta)/2] \operatorname{ch}^2(\omega\zeta/2)}{\operatorname{sh}(\pi\omega/2) \operatorname{sh}(\omega\zeta/2) \operatorname{ch}(\omega\zeta)}. \quad (2.33)$$

Таким образом, при $m \rightarrow \infty$ вероятность образования пустоты ведет себя следующим образом:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(m, \Delta)}{m^2} = \ln \frac{\pi}{\zeta} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}-i0} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{sh}[\omega(\pi - \zeta)/2] \operatorname{ch}^2(\omega\zeta/2)}{\operatorname{sh}(\pi\omega/2) \operatorname{sh}(\omega\zeta/2) \operatorname{ch}(\omega\zeta)}. \quad (2.34)$$

Метод седловой точки также может быть применен и к XXX -цепочке ($\Delta = 1$). В этом случае в исходном интегральном представлении (2.15) прежде всего необходимо переопределить $\lambda_j \rightarrow \zeta\lambda_j$, $\xi_j \rightarrow \zeta\xi_j$, после чего перейти к пределу $\zeta \rightarrow 0$. Дальнейшие вычисления буквально повторяют описанные выше, поэтому здесь мы ограничимся тем, что приведем только окончательный ответ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(m)}{m^2} = \ln \left(\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4)} \right) \approx \ln(0.5991), \quad \Delta = 1. \quad (2.35)$$

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ № 02-01-00484, НШ-2052.2003.1 и программы “Нелинейная динамика и солитоны”.

Список литературы

- [1] *M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, A. Nakayashiki.* Phys. Lett. A. 1992. V. 168. P. 256; *M. Jimbo, T. Miwa.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 2923; Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models. Providence, RI: AMS, 1995; *N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 554. P. 647; math-ph/9807020; 2000. V. 567. P. 554; math-ph/9907019.
- [2] *E. Lieb, T. Shultz, D. Mattis.* Ann. Phys. 1961. V. 16. P. 407; 1963. V. 30. P. 1605; *B. M. McCoy.* Phys. Rev. 1968. V. 173. P. 531; *T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch.* Phys. Rev. 1976. V. 13. P. 316; *B. M. McCoy, C. A. Tracy, T. T. Wu.* Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 793; *M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo.* Publ. RIMS Kyoto Univ. 1978. V. 14. P. 223; 1979. V. 15. P. 201; P. 871; 1980. V. 16. P. 531.
- [3] *F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti.* ТМФ. 1993. Т. 94. С. 19.
- [4] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 641. P. 487; hep-th/0201045.
- [5] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. L385; hep-th/0201134.
- [6] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 642. P. 433; hep-th/0203169.
- [7] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. L753; hep-th/0210019.
- [8] *M. Shiroishi, M. Takahashi, Y. Nishiyama.* J. Phys. Soc. Japan. 2001. V. 70. P. 3535; cond-mat/0106062.
- [9] *P. Deift, A. Its, X. Zhou.* Long-time asymptotics for integrable nonlinear wave equations. In: Important Developments in Soliton Theory. Eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1993. P. 181.
- [10] *H. Widom.* Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. P. 277.
- [11] *A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 3185; cond-mat/0012141.
- [12] *G. Kuperberg.* Int. Math. Res. Notices. 1996. V. 3. P. 139; math.CO/9712207.