Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Губайдуллин, Х. Х. Муртазин, Некоторые свойства собственных функций оператора Шредингера в магнитном поле, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 3, 443–454

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:11:39

© 2001 г. М. Б. Губайдуллин*, Х. Х. Муртазин*

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Изучается вопрос о поведении собственных функций положительного точечного спектра оператора Шредингера с магнитным и электрическим потенциалами.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается оператор Шредингера в пространстве $L_2(R^n)$

$$H(a, V) = \sum_{k=1}^n (p_k + a_k)^2 + V, \quad (1)$$

где $p_k = -i\partial/\partial x_k$ – оператор импульса по k -й переменной, $V(x)$ – электрический потенциал, $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ – магнитный потенциал, $a_k(x) \in W_{2,\text{loc}}^2$, причем все потенциалы считаются вещественными. В теореме 1 при некоторых условиях доказывается отсутствие нетривиальных решений уравнения $H(a, V)U = \lambda U$, $\lambda \in R$, таких, что $e^{\delta|x|}U(x) \in L_2(R^n)$ для любого $\delta > 0$. В теореме 2 показывается, что собственная функция оператора (1), соответствующая положительному собственному значению, не может убывать на бесконечности быстрее любой степени. Отметим, что при $a(x) \equiv 0$ аналогичное утверждение было доказано в [2] и оно хорошо согласуется с известным примером Вигнера–фон Неймана.

2. О НЕВОЗМОЖНОСТИ СВЕРХЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО УБЫВАНИЯ СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Оператор (1) можно записать в виде

$$H(a, V) = -\Delta - 2ia \cdot \nabla + (a^2 - i\nabla a + V), \quad (2)$$

где

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

---

*Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

— лапласиан,

$$a \cdot \nabla = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad a^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad \nabla a = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_k}.$$

Вместо оператора $H(a, V)$ будем использовать унитарно эквивалентный ему оператор $e^{-i\mu} H(a, V) e^{i\mu}$, где $\mu(x)$ — произвольная, вещественная, всюду дифференцируемая функция, называемая калибровочной (см., например, [1], с. 531). Вид нового оператора находится непосредственно из вида оператора (2): $e^{-i\mu} H(a, V) e^{i\mu} = H(b, V)$, где $b = a + \nabla \mu$ — новый магнитный потенциал.

ЛЕММА 1. Если

$$\mu(x) = - \int_0^1 x \cdot a(sx) ds,$$

то

$$b_k(x) = \sum_{m=1}^n x_m \int_0^1 s [\partial_m a_k(sx) - \partial_k a_m(sx)] ds,$$

где

$$\partial_m a_k(sx) = \frac{\partial a_k(sx)}{\partial (sx)_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(x)}{\partial x_k} &= - \int_0^1 a_k(sx) ds - \sum_{m=1}^n x_m \int_0^1 s \partial_m a_k(sx) ds - \\ &\quad - \sum_{m=1}^n x_m \int_0^1 s [\partial_k a_m(sx) - \partial_m a_k(sx)] ds. \end{aligned}$$

Учитывая то, что во втором слагаемом

$$\sum_{m=1}^n x_m \partial_m a_k(sx) = \frac{\partial a_k(sx)}{\partial s},$$

и интегрируя его по частям, находим

$$\frac{\partial \mu(x)}{\partial x_k} = -a_k(x) - \sum_{m=1}^n x_m \int_0^1 s [\partial_k a_m(sx) - \partial_m a_k(sx)] ds.$$

Поскольку

$$b_k(x) = a_k(x) + \frac{\partial \mu(x)}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1, n},$$

получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ. $x \cdot b = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$x \cdot b = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n x_k x_m \int_0^1 s [\partial_m a_k(sx) - \partial_k a_m(sx)] ds.$$

Если в этой сумме поменять местами индексы суммирования, то сумма меняет знак, а это может быть только в том случае, когда $x \cdot b = 0$.

Пусть $a_{km}(x) = \partial_m a_k(x) - \partial_k a_m(x)$, $k, m = \overline{1, n}$,

$$\hat{b}_k(x) = \sum_{m=1}^n \omega_m a_{km}(x), \quad \omega_m = \frac{x_m}{|x|}, \quad k, m = \overline{1, n}, \quad (3)$$

тогда

$$b_k(x) = \sum_{m=1}^n x_m \int_0^1 s a_{km}(sx) ds = |x| \int_0^1 s \hat{b}_k(sx) ds, \quad k = \overline{1, n}, \quad (4)$$

и

$$\frac{\partial b_k(x)}{\partial |x|} = -\frac{b_k(x)}{|x|} + \hat{b}_k(x), \quad k = \overline{1, n}. \quad (5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H(a, V)U = \lambda U$, $\lambda \in R$, и $e^{\delta|x|}U(x) \in L_2(R^n)$ для любого $\delta > 0$, и пусть выполнены условия:

а) $\sup_{x \in R^n} (1 + |x|) |\hat{b}_k(x)| < \infty$ для всех $k = \overline{1, n}$;

б) $\sup_{x \in R^n} |\nabla b(x)| < \infty$;

в) при $n \leq 2$ оператор $\widetilde{W} = V \sqrt{(1 + |x|)}$ Δ -ограничен;

г) при $n \geq 3$ оператор $\widetilde{W}$ Δ -ограничен и $\lim_{z \rightarrow +\infty} z^{1/4} \|\widetilde{W}(-\Delta + z)^{-1}\| = 0$.

Тогда $U(x) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В дальнейшем через C будем обозначать любую подходящую положительную постоянную, точное значение которой несущественно.

Предварительно обсудим легко проверяемые достаточные условия на потенциалы, при которых условия “а”–“г” теоремы 1 выполняются. Из (3), (4) и “а”, “б” вытекает, что следует налагать условия только на компоненты так называемого магнитного тензора $a_{km}(x)$. Например, условия “а”, “б” выполнены, если

$$|a_{km}(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|}, \quad k, m = \overline{1, n},$$

$$\left| \frac{\partial a_{km}(x)}{\partial x_k} \right| \leq \frac{C}{1 + |x|}, \quad k, m = \overline{1, n}.$$

Налагать условия непосредственно на $a_k(x)$ нет необходимости ввиду их отсутствия в наших формулах в явном виде. Что касается электрического потенциала, то допускаются функции вида

$$V(x) = (1 + |x|)^{-\frac{1}{2}} \widetilde{W}(x),$$

где $\widetilde{W}(x)$ — произвольная (необязательно гладкая) функция такая, что

$$\sup_{x \in R^n} |\widetilde{W}(x)| \leq C.$$

Для таких потенциалов

$$\|\widetilde{W}(-\Delta + z)^{-1}\| \leq Cz^{-1},$$

так что условия “В”, “Г” выполнены.

Если $\widetilde{W}(x)$ не ограничена, то при $n \leq 3$ критерий Δ -ограниченности $\widetilde{W}$ хорошо известен и заключается в том, что

$$\sup_{x \in R^n} \int_{|x-y| \leq 1} |\widetilde{W}(y)|^2 dy < \infty.$$

В случае $n \geq 4$ соответствующий критерий неизвестен. Достаточные условия Δ -ограниченности $\widetilde{W}$ получены Штуммелем [4] (см. также [2], с. 6 и [3], с. 16).

Для проверки предельного условия “Г” можно воспользоваться оценками ядра $R_0(x, y, -z)$ оператора $(-\Delta + z)^{-1}$. При $n = 1$

$$R_0(x, y, -z) = (2\sqrt{z})^{-1} \exp(-\sqrt{z}|x - y|).$$

При $n = 2$

$$R_0(x, y, -z) \leq C(|x - y|\sqrt{z})^{-\frac{1}{2}} \exp(-\sqrt{z}|x - y|).$$

При $n \geq 3$

$$R_0(x, y, -z) \leq C|x - y|^{-n+2} \exp(-\sqrt{z}|x - y|).$$

При выполнении условия “В” отсюда следует, что при $n = 1$

$$\|\widetilde{W}(-\Delta + z)^{-1}\| \leq Cz^{-\frac{3}{4}}$$

и при $n = 2$

$$\|\widetilde{W}(-\Delta + z)^{-1}\| \leq Cz^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, условие “Г” автоматически выполнено при $n = 1, 2$. Легко проверить, что оно выполнено при $n \geq 3$, если

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{x \in R^n} \int_{|x-y| \leq \gamma} |x - y|^{-n+3} |\widetilde{W}(y)|^2 dy = 0.$$

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм. Далее положим $\Phi(x) = e^{\delta|x|}U(x) \in L_2(R^n)$ для любого $\delta > 0$.

ЛЕММА 2.

$$\|\nabla \Phi\|^2 + \delta^2 \|\Phi\|^2 \leq \frac{C\|\widetilde{W}\Phi\|^2}{\delta}, \quad (6)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L^2(R^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) следует, что $U(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta U - 2ib \cdot \nabla U + (b^2 - i\nabla b + V)U = \lambda U.$$

Учитывая следствие леммы 1, получим уравнение для $\Phi(x)$

$$-\Delta \Phi + 2\delta T\Phi - 2ib \cdot \nabla \Phi + (b^2 - i\nabla b + V)\Phi - (\lambda + \delta^2)\Phi = 0,$$

где

$$T = \frac{\partial}{\partial |x|} + \frac{n-1}{2|x|}.$$

Умножим это уравнение справа скалярно в $L_2(R^n)$ на $2|x|T\Phi$ и возьмем вещественную часть. Используя интегрирование по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} & \|\nabla \Phi\|^2 + 4\delta \|T\Phi\|_1^2 + (\lambda + \delta^2)\|\Phi\|^2 - (b^2\Phi, \Phi) - 2 \sum_{k=1}^n \left(|x|b_k \frac{\partial b_k}{\partial |x|} \Phi, \Phi \right) - \\ & - 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n \left(|x| \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \frac{\partial b_k}{\partial |x|} \Phi \right) + 2 \operatorname{Re}(\sqrt{|x|}V\Phi, \sqrt{|x|}T\Phi) = 0, \end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(R^n)$, а $\|\cdot\|_l = \| |x|^{l/2} \cdot \|$ — норма с весом.

Имеем $|\sqrt{|x|}V| \leq |\widetilde{W}|$, кроме того, из (4), (5) и условия “а” теоремы 1 следует, что

$$|b_k(x)| \leq C, \quad \left| \frac{\partial b_k(x)}{\partial |x|} \right| \leq \frac{C}{|x|}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Принимая во внимание эти промежуточные оценки, находим

$$\begin{aligned} & \|\nabla \Phi\|^2 + 4\delta \|T\Phi\|_1^2 + (\lambda + \delta^2)\|\Phi\|^2 \leq C \left(\|\Phi\|^2 + \sqrt{\varepsilon} \|\nabla \Phi\| \frac{\|\Phi\|}{\sqrt{\varepsilon}} + 2 \frac{\|\widetilde{W}\Phi\|^2}{\sqrt{2\delta}} \sqrt{2\delta} \|T\Phi\| \right) \leq \\ & \leq C \left(\|\Phi\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \Phi\|^2 + \frac{\|\Phi\|^2}{2\varepsilon} \right) + \frac{\|\widetilde{W}\Phi\|^2}{2\delta} + 2\delta \|T\Phi\|_1^2. \end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы $C\varepsilon/2 < 1$. Тогда получим

$$\|\nabla \Phi\|^2 + (\lambda + \delta^2 - C)\|\Phi\|^2 \leq \frac{C\|\widetilde{W}\Phi\|^2}{\delta},$$

откуда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3. При достаточно большом δ

$$\|\widetilde{W}\Phi\|^2 \leq C \|\widetilde{W}R_0(-\delta^2)\|^2 (\delta^4 \|\Phi\|^2 + \|\nabla \Phi\|^2), \quad (7)$$

$$zde R_0(-z) = (-\Delta + z)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) следует, что

$$U = R_0(-4\delta^2)((4\delta^2 + \lambda)U - (b^2 - i\nabla b + V)U + 2ib \cdot \nabla U).$$

Обозначим через E_δ оператор умножения на функцию $e^{\delta|x|}$. Тогда

$$\Phi = E_\delta R_0(-4\delta^2) \left((4\delta^2 + \lambda)E_\delta^{-1}\Phi + (b^2 - i\nabla b + V)E_\delta^{-1}\Phi + 2iE_\delta^{-1} \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right).$$

Из известной формулы для ядра оператора $R_0(-z)$ следует, что справедливо неравенство

$$R_0(-4\delta^2, x, y) \leq C e^{-\delta|x-y|} R_0(-\delta^2, x, y)$$

(см., например, [2], с. 35). Поскольку $e^{\delta(|x|-|x-y|-|y|)} \leq 1$, то

$$\|\widetilde{W}\Phi\| \leq C \|\widetilde{W}R_0(-\delta^2)\|^2 ((4\delta^2 + \lambda)^2 \|\Phi\|^2 + \|\widetilde{W}\Phi\|^2 + \|\nabla\Phi\|^2).$$

Выбором δ можно добиться того, что $C \|\widetilde{W}R_0(-\delta^2)\|^2 < 1$, отсюда следует (7).

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Применим соотношение (7) для оценки правой части (6):

$$\|\nabla\Phi\|^2 + \delta^2 \|\Phi\|^2 \leq C \|\widetilde{W}R_0(-\delta^2)\|^2 \left(\delta^3 \|\Phi\|^2 + \frac{\|\nabla\Phi\|^2}{\delta} \right).$$

Считая, что

$$\frac{C \|\widetilde{W}R_0(-\delta^2)\|}{\delta} < 1,$$

получим

$$\|\Phi\|^2 \leq C (\sqrt{\delta} \|\widetilde{W}R_0(-\delta^2)\|)^2 \|\Phi\|^2.$$

В силу условия “г” теоремы 1 множитель перед $\|\Phi\|^2$ можно сделать сколь угодно малым за счет выбора δ . Отсюда следует утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что аналогичная теорема ранее была доказана в [3] (см. теорему 4.18) при довольно жестких условиях:

- 1) $a \equiv 0$;
- 2) $V(x) = (1 + |x|)^{-1}W(x)$, где W Δ -ограничен;
- 3) $\partial V(x)/\partial|x|$ существует почти всюду и $|x|\partial V(x)/\partial|x|$ Δ -ограничен с верхней границей, меньшей 2. В нашей формулировке при $a(x) \equiv 0$ теорема 1 фактически доказана в [2] (см. лемму 3 на с. 34).

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

Известно, что существует пример электрического потенциала Вигнера–фон Неймана ($a(x) \equiv 0$), для которого оператор (1), несмотря на физические соображения, имеет положительное собственное значение, а его собственная функция убывает на бесконечности степенным образом. Следующая теорема показывает, что и в более общем случае не следует ожидать от собственной функции, соответствующей положительному собственному значению оператора (1) (если таковое имеется), какого-либо иного поведения на бесконечности, кроме как степенного.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $H(a, V)U = \lambda U$, $\lambda > 0$ и $|x|^\delta U(x) \in L_2(R^n)$ для любого $\delta \geq 0$, и пусть выполнены условия:

- а) $|\hat{b}_k(x)| = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $|x| \rightarrow \infty$, $\sup_{x \in R^n} |\hat{b}_k(x)| < \infty$, $k = \overline{1, n}$;
- б) $\sup_{x \in R^n} |\nabla b(x)| < \infty$;
- в) при $n \leq 3$ оператор $W = V(1 + |x|)$ Δ -ограничен;
- г) при $n > 3$ оператор W Δ -ограничен и

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \|W(-\Delta + z)^{-1}\| = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} z^{\frac{1}{4}} \|(1 + |x|)^{-\frac{1}{2}} W(-\Delta + z)^{-1}\| = 0.$$

Тогда $U(x) \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Принимая во внимание все сказанное выше в разделе 2, сформулируем достаточные условия на соответствующие величины, обеспечивающие справедливость теоремы 2. Если

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| a_{km}(x) = 0, \quad \sup_{x \in R^n} |a_{km}(x)| < \infty, \quad k, m = \overline{1, n},$$

$$\left| \frac{\partial a_{km}(x)}{\partial x_k} \right| \leq \frac{C}{1 + |x|}, \quad k, m = \overline{1, n},$$

то условия “а”, “б” выполнены. В качестве электрических потенциалов допускаются негладкие потенциалы $V(x) = (1 + |x|)^{-1} W(x)$, где $W(x)$ удовлетворяет условиям, обсужденным в разделе 2. Отметим лишь, что при $n = 3$ из “в” автоматически следует “г” (см. [2], с. 31).

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм. Определим пространства $L_2(R_+, G)$, $G = L_2(S_{n-1}; d\omega)$, где S_{n-1} — единичная сфера, $\omega = x/|x|$, $|x| = r$. Пусть $\|\cdot\|_G$ — норма в G . Между элементами $L_2(R^n)$ и $L_2(R_+, G)$ можно установить взаимно однозначное соответствие F , сохраняющее норму:

$$f \rightarrow r^{\frac{n-1}{2}} f = \tilde{f} \in L_2(R_+, G), \quad \|f\|_{L_2(R^n)} = \|\tilde{f}\|_{L_2(R_+, G)}.$$

В дальнейшем мы будем работать в основном в $L_2(R_+, G)$ и под символами $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_l$ будет пониматься скалярное произведение, норма и норма с весом в этом пространстве, где $\|\cdot\|_l = \|r^{l/2} \cdot\|$.

ЛЕММА 4.

$$\tilde{H}(b, V) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{n-1}{2r^2} + \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n D_k^2 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n [D_k b_k + b_k D_k] + b^2 + V, \quad (8)$$

где $\tilde{H}(b, V)$ – оператор в $L_2(R_+, G)$, соответствующий оператору $H(b, V)$ в $L_2(R^n)$, D_k , $k = \overline{1, n}$, – симметрический оператор в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\begin{aligned} \tilde{H}(b, V) &= F H(b, V) F^{-1} = \sum_{k=1}^n (\tilde{p}_k + b_k)^2 + V = \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k^2 + \sum_{k=1}^n [\tilde{p}_k b_k + b_k \tilde{p}_k] + b^2 + V, \\ \tilde{p}_k &= F p_k F^{-1} = p_k + i \frac{(n-1)\omega_k}{2r}, \quad k = \overline{1, n}, \\ p_k &= -i\omega_k \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{A_k}{r}, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где A_k , $k = \overline{1, n}$, – дифференциальный оператор первого порядка, действующий только на переменные ω . Обозначим $D_k = -iA_k + i(n-1)\omega_k/2$, $k = \overline{1, n}$, – оператор в G , тогда

$$\tilde{p}_k = -i\omega_k \frac{\partial}{\partial r} + \frac{D_k}{r}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Поскольку операторы $\tilde{p}_k$ и $i\omega_k \partial / \partial r$ являются симметрическими, то и D_k , $k = \overline{1, n}$, – симметрический. Известно, что

$$\tilde{\Delta} = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} - \frac{B}{r^2},$$

где B – оператор Лапласа–Бельтрами. С другой стороны,

$$\tilde{\Delta} = \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k^2 = \sum_{k=1}^n \left(-i\omega_k \frac{\partial}{\partial r} + \frac{D_k}{r} \right)^2.$$

Приравняем выражения для $\tilde{\Delta}$, а затем, действуя на пробные функции, зависящие только от r или только от ω , установим, что

$$\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{2r^2} - \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n D_k^2.$$

Подставим в $\sum_{k=1}^n [\tilde{p}_k b_k + b_k \tilde{p}_k]$ выражение для $\tilde{p}_k$. Принимая во внимание следствие леммы 1, получим

$$\sum_{k=1}^n [\tilde{p}_k b_k + b_k \tilde{p}_k] = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n [D_k b_k + b_k D_k],$$

отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $Q = \Theta \tilde{U}$, $\tilde{U} = r^{\frac{n-1}{2}} U$,

$$\Theta = \begin{cases} 0, & r < N, \\ f(r), & N \leq r \leq N + C, \\ 1, & r > N + C, \end{cases}$$

где $f(r)$ такова, что $\Theta(r) \in C^2(R_+)$. Поскольку $\tilde{U}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{H}(b, V) \tilde{U} = \lambda \tilde{U},$$

то Q будет удовлетворять уравнению

$$\tilde{H}(b, V) Q - \lambda Q = h,$$

где $h = -\Theta'' \tilde{U}' - 2\Theta' \tilde{U}'$ (здесь и в дальнейшем $(\cdot)' = \partial/\partial r$). Очевидно, что h финитна. Пусть $Q_m = r^{m/2} Q \in L_2(R_+, G)$, $\forall m \geq 0$, $g_m = r^{m/2} h$.

ЛЕММА 5.

$$\sum_{k=1}^n \|D_k Q_m\|_{-2} \leq C \left(m \|Q_m\|_{-2} + \frac{\|W Q_m\|}{\sqrt{m}} + \frac{\|r g_m\|}{\sqrt{m}} \right). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) и уравнения для Q получим уравнение для Q_m

$$\begin{aligned} -Q_m'' - \frac{n-1}{2r^2} Q_m + \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n D_k^2 Q_m + \frac{m}{r} Q_m' - \frac{m(m+2)}{4r^2} Q_m + \\ + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n [D_k b_k + b_k D_k] Q_m + b^2 Q_m + V Q_m - \lambda Q_m - g_m = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим это уравнение на $2rQ_m'$ справа скалярно в $L_2(R_+, G)$ и возьмем вещественную часть. При этом будем пользоваться симметричностью D_k , известным соотношением

$$\operatorname{Re}(S, S') = \frac{1}{2} (\|S\|_G^2)'$$

и интегрированием по частям. Тогда

$$\begin{aligned} (2m+1) \|Q_m'\|^2 + \sum_{k=1}^n \|D_k Q_m\|_{-2}^2 + (b^2 Q_m, Q_m) + \lambda \|Q_m\|^2 = \\ = \left(\frac{n-1}{2} + \frac{m(m+2)}{4} \right) \|Q_m\|_{-2}^2 + \sum_{k=1}^n ([D_k b_k' + b_k' D_k] Q_m, Q_m) + \\ + 2 \sum_{k=1}^n (r b_k \hat{b}_k Q_m, Q_m) - 2 \operatorname{Re}(r V Q_m, Q_m') + 2 \operatorname{Re}(r g_m, Q_m'). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (4), (5) и условия “а” следует, что

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |rb'_k| = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |b_k| = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

поэтому

$$\begin{aligned} (2m+1)\|Q'_m\|^2 + \sum_{k=1}^n \|D_k Q_m\|_{-2}^2 + \lambda \|Q_m\|^2 &\leq \\ &\leq C \left(m^2 \|Q_m\|_{-2}^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^n \|D_k Q_m\|_{-2}^2 + \varepsilon \|Q_m\|^2 \right) + \\ &+ \frac{2}{m} \|W Q_m\|^2 + \frac{m}{2} \|Q'_m\|^2 + \frac{2}{m} \|r g_m\|^2 + \frac{m}{2} \|Q'_m\|^2. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $\varepsilon > 0$ – некоторая величина, которая может быть сделана меньше любого наперед заданного числа путем увеличения N в определении функции Θ . В данном случае для доказательства леммы достаточно выбрать $\varepsilon < \min[1/C, 1/\lambda]$.

ЛЕММА 6. *При достаточно большом $m > 0$ верно неравенство*

$$m\|Q'_m\|^2 + \|Q_m\|^2 \leq C \left(\varepsilon m^2 \|Q_m\|_{-2}^2 + \frac{\|W Q_m\|^2}{m} + \frac{\|r g_m\|^2}{m} + \frac{\|g_m\|^2}{\varepsilon} \right). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (10) на Q_m справа скалярно в $L_2(R_+, G)$ и возьмем вещественную часть:

$$\begin{aligned} \|Q'_m\|^2 - \left(\frac{n-1}{2} + \frac{m(m+2)}{4} \right) \|Q_m\|_{-2}^2 + \sum_{k=1}^n \|D_k Q_m\|_{-2}^2 + \\ + \frac{m}{2} \|Q_m\|_{-2}^2 + (b^2 Q_m, Q_m) + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n ([D_k b_k + b_k D_k] Q_m, Q_m) - \\ - \lambda \|Q_m\|^2 + (V Q_m, Q_m) + \operatorname{Re}(g_m, Q_m) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Вычтем из (11) равенство (13), получим

$$\begin{aligned} 2m\|Q'_m\|^2 + 2\lambda\|Q_m\|^2 = \frac{m}{2} \|Q_m\|_{-2}^2 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^n ([D_k b_k + b_k D_k] Q_m, Q_m) + \\ + \sum_{k=1}^n ([D_k b'_k + b'_k D_k] Q_m, Q_m) + 2 \sum_{k=1}^n (r b_k \hat{b}_k Q_m, Q_m) - 2 \operatorname{Re}(r V Q_m, Q'_m) + \\ + 2 \operatorname{Re}(r g_m, Q'_m) + (V Q_m, Q_m) - \operatorname{Re}(g_m, Q_m). \end{aligned}$$

Оценивая правую часть сверху, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} 2m\|Q'_m\|^2 + 2\lambda\|Q_m\|^2 \leq \frac{m}{2} \|Q_m\|_{-2}^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^n \|D_k Q_m\|_{-2} \|Q_m\| + \\ + \varepsilon \|Q_m\|^2 + 2\|W Q_m\| \|Q'_m\| + 2\|r g_m\| \|Q'_m\| + \\ + \|W Q_m\| \|Q'_m\|_{-2} + 2 \frac{\|g_m\|}{2\sqrt{\varepsilon}} \|Q_m\| \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для дальнейшей оценки правой части (14) используем (9). Тогда

$$\begin{aligned} 2m\|Q'_m\|^2 + 2\lambda\|Q_m\|^2 &\leq \frac{m}{2}\|Q_m\|_{-2}^2 + \varepsilon \left(m\|Q_m\|_{-2} + \frac{\|WQ_m\|}{\sqrt{m}} + \frac{\|rg_m\|}{\sqrt{m}} \right) \|Q_m\| + \\ &+ \varepsilon\|Q_m\|^2 + \frac{2}{m}\|WQ_m\|^2 + \frac{m}{2}\|Q'_m\|^2 + \frac{2}{m}\|rg_m\|^2 + \frac{m}{2}\|Q'_m\|^2 + \frac{1}{2m}\|WQ_m\|^2 + \\ &+ \frac{m}{2}\|Q_m\|_{-2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|g_m\|^2 + \varepsilon\|Q_m\|^2, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2m\|Q'_m\|^2 + 2\lambda\|Q_m\|^2 &\leq m\|Q_m\|_{-2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left(m^2\|Q_m\|_{-2}^2 + \frac{\|WQ_m\|^2}{m} + 3\|Q_m\|^2 \right) + \\ &+ 2\varepsilon\|Q_m\|^2 + \frac{5}{2m}\|WQ_m\|^2 + m\|Q'_m\|^2 + \frac{2}{m}\|rg_m\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|g_m\|^2. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует утверждение леммы.

ЛЕММА 7. Для любого $\delta > 0$ $e^{\delta r}Q \in L_2(R_+, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$d_m = \frac{(2\delta)^m}{m!} \|Q_m\|^2.$$

Тогда формально

$$\|e^{\delta r}Q\|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} d_m$$

и достаточно доказать сходимость этого ряда. Пусть $R_0(-z) = (-\Delta + z)^{-1}$, $R(-z) = (H(b, V) + z)^{-1}$ — операторы в $L_2(R^n)$, тогда $\tilde{R}(-z)$ — оператор в $L_2(R_+, G)$, соответствующий $R(-z)$. Из теории возмущений и (2) следует, что

$$R_0(-z) = \left(I + R_0(-z) \left(-2i \sum_{k=1}^n b_k p_k + b^2 - i\nabla b + V \right) \right) R(-z).$$

Поскольку норму оператора

$$R_0(-z) \left(-2i \sum_{k=1}^n b_k p_k + b^2 - i\nabla b + V \right)$$

для достаточно больших $z > 0$ можно оценить сверху единицей, то

$$WR(-z) = W \sum_{k=0}^{\infty} \left(-R_0(-z) \left(-2i \sum_{k=1}^n b_k p_k + b^2 - i\nabla b + V \right) \right)^k R_0(-z).$$

Следовательно, оператор $WR(-z)$ существует и ограничен в $L_2(R^n)$ и

$$\|WR(-z)\|_{L_2(R^n)} = \|W\tilde{R}(-z)\| < \infty$$

для достаточно больших $z > 0$. Из (10) получим

$$\|WQ_m\| \leq \|W\tilde{R}(-z)\| \left((\lambda + z)\|Q_m\| + m\|Q'_m\|_{-2} + \frac{m(m+2)}{4}\|Q_m\|_{-4} + \|g_m\| \right).$$

Используем эту оценку для правой части (12):

$$\begin{aligned} m\|Q'_m\|^2 + \|Q_m\|^2 \leq C \left(\varepsilon m^2\|Q_m\|_{-2}^2 + \frac{\|Q_m\|^2}{m} + m\|Q'_m\|_{-2}^2 + m^3\|Q_m\|_{-4}^2 + \right. \\ \left. + \frac{\|g_m\|^2}{m} + \frac{\|rg_m\|^2}{m} + \frac{\|g_m\|^2}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\|Q'_m\|_{-2}^2 \leq \frac{\|Q'_m\|^2}{N^2}$$

при $N > \max[1, \sqrt{C}]$, следовательно, при достаточно больших $m > 0$ верно неравенство

$$\|Q_m\|^2 \leq C \left(\varepsilon m^2\|Q_m\|_{-2}^2 + m^3\|Q_m\|_{-4}^2 + \frac{\|rg_m\|^2}{m} + \frac{\|g_m\|^2}{\varepsilon} \right).$$

Отсюда следует, что

$$d_m \leq C \left(\frac{4\delta^2\varepsilon m}{m-1}d_{m-2} + \frac{16\delta^4m^2}{(m-1)(m-2)(m-3)}d_{m-4} + \frac{(2\delta)^m}{m!} \left(\frac{\|rg_m\|^2}{m} + \frac{\|g_m\|^2}{\varepsilon} \right) \right)$$

и

$$\sum_{m=k}^{\infty} d_m \leq C \left(\delta^2\varepsilon + \frac{\delta^4}{k} \right) \left(1 + \sum_{m=k}^{\infty} d_m \right) + \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(2\delta)^m}{m!} \left(\frac{\|rg_m\|^2}{m} + \frac{\|g_m\|^2}{\varepsilon} \right).$$

Возьмем k настолько большим, чтобы выполнялись все предыдущие оценки. Очевидно, что для любого $\delta > 0$ можно взять числа ε и k такими, что $C(\delta^2\varepsilon + \delta^4/k) < 1$. Так как $\|g_m\|^2 \leq C(N+C)^m$, то остаток ряда, стоящего в правой части неравенства, сходится. Поэтому ряд $\sum_{m=0}^{\infty} d_m$ также сходится. Лемма доказана.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. Мы доказали, что $\|e^{\delta r}Q\| < \infty$ для любого $\delta > 0$, но поскольку $Q = \Theta r^{\frac{n-1}{2}}U$, то $\|\Theta e^{\delta|x|}U\|_{L_2(R^n)} < \infty$, а следовательно, и $\|e^{\delta|x|}U\|_{L_2(R^n)} < \infty$ для любого $\delta > 0$. Так как каждое условие теоремы 2 не слабее соответствующего условия теоремы 1, то мы оказываемся в рамках действия теоремы 1. Таким образом, $U(x) \equiv 0$.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Т. 3. М.: Наука, 1989.
- [2] Х. Х. Муртазин, В. А. Садовничий. Спектральный анализ многочастичного оператора Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [3] Х. Цикон, Р. Фрзе, В. Кириш, Б. Саймон. Операторы Шредингера с приложениями в квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
- [4] F. Stummel. Math. Ann. 1956. Bd. 132. S. 150–176.

Поступила в редакцию 26.VII.2000 г.,
после доработки 21.XI.2000 г.