Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Ташпулатов, О спектрах и локализованных примесных состояниях одномагнитных систем в изотропной примесной ферромагнитной модели Гейзенберга, *ТМФ*, 2001, том 126, номер 3, 482–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:21:11

О СПЕКТРАХ И ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПРИМЕСНЫХ СОСТОЯНИЯХ ОДНОМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ИЗОТРОПНОЙ ПРИМЕСНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассматривается одномагнонная система в изотропной примесной модели Гейзенберга. Исследуются спектр и локализованные примесные состояния этой системы на ν -мерной целочисленной решетке Z^ν . Показано, что система имеет не более трех локализованных примесных состояний (без учета кратности вырождений их энергии). Найдены области существования этих состояний и вычислены кратности вырождений их энергии.

Интенсивное развитие физики пленочного состояния, а также применение пленок в различных областях физики и техники обуславливают значительный интерес к изучению локализованных примесных состояний (ЛПС) магнетиков.

ЛПС в ферромагнетике Гейзенберга с ферромагнитной или антиферромагнитной примесью изучались в работах [1]–[6], где подробно рассматривались случаи линейной или кубической решетки. Было показано, что в линейном случае существует два типа ЛПС, а в случае кубической решетки – три. Насколько нам известно, случай плоской решетки подробно не исследован.

В данной работе изучается одномагнонная система в примесной модели Гейзенберга на ν -мерной решетке Z^ν . Исследуются спектр и ЛПС этой системы. Рассматривается как случай ферромагнетика с ферромагнитной примесью, так и случай ферромагнетика с антиферромагнитной примесью. Показывается, что в ν -мерном случае система имеет не более трех (без учета кратности вырождений их энергии) ЛПС, и находятся условия существования этих состояний. Определяется местоположение их энергии относительно непрерывного спектра системы.

Результаты работ [1]–[6] могут быть получены из наших как частные случаи.

Отметим, что применяемые далее методы исследования отличаются от методов работ [1]–[6] простотой и полнотой полученных результатов. В отличие от [1]–[6] явно показано, что при изменении значений параметров билинейного обменного взаимодействия меняется количество ЛПС системы.

*Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, пос. Улугбек, Республика Узбекистан

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = J \sum_{m, \tau} (S_m S_{m+\tau}) + (J_0 - J) \sum_{\tau} (S_0 S_{\tau}), \quad (1)$$

где J и J_0 – параметры билинейного обменного взаимодействия между атомами и между атомами и примесями, соответственно, $S_m = (S_m^x; S_m^y; S_m^z)$ – оператор атомного спина величины $s = 1/2$ в узле m , а по τ ведется суммирование по ближайшим соседям. Положим $S_m^{\pm} = S_m^x \pm iS_m^y$, где S_m^+ и S_m^- – соответственно операторы рождения и уничтожения магнона в узле m .

Гамильтониан (1) действует в симметрическом фокковском пространстве $\mathcal{H}$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = \varphi_0/2$, где $\|\varphi_0\| = 1$. Вектор $S_m^- \varphi_0$ описывает состояние системы одного магнона, находящегося в узле m , со значением спина $s = 1/2$. Векторы $\{S_m^- \varphi_0\}$ образуют ортонормальную систему. Пространство, натянутое на эти векторы, обозначим через $\mathcal{H}_1$. Это пространство евклидово относительно естественного скалярного произведения. Замыкание этого пространства обозначим через $\overline{\mathcal{H}}_1$. Оно называется пространством одномагнонных состояний.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно оператора H . Оператор $H_1 = H|_{\mathcal{H}_1}$ является ограниченным самосопряженным оператором, который порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_1$, действующий в пространстве $l_2(Z^\nu)$ по формуле*

$$\begin{aligned} (\overline{H}_1 f)(p) = & \sum_{\tau} \left[-J f(p) + \frac{J}{2} (f(p+\tau) + f(p-\tau)) \right] + \\ & + (J_0 - J) \sum_{\tau} [(-\delta_{p,0} - \delta_{p,\tau}) f(p) + (\delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau))], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера. Сам оператор H_1 действует на вектор $\Psi \in \mathcal{H}_1$ по формуле

$$H_1 \Psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) S_p^- \varphi_0. \quad (3)$$

Предложение 1 доказывается с использованием известных коммутационных соотношений между операторами S_m^+ , S_p^- и S_q^z .

Используя критерий Вейля [7], можно доказать, что спектры операторов H_1 и $\overline{H}_1$ совпадают.

Наша цель состоит в изучении спектра оператора H_1 . Это удобно сделать в квазиимпульсном представлении. Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F}: l_2(Z^\nu) \rightarrow L_2(T^\nu).$$

Здесь T^ν – ν -мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$: $\lambda(T^\nu) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{F}: \mathcal{H}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_1 \equiv L_2(T^\nu)$ – преобразование Фурье. Оператор $\overline{H}_1$ переходит в оператор $\tilde{H}_1 = \mathcal{F}\overline{H}_1\mathcal{F}^{-1}$, который действует в пространстве $L_2(T^\nu)$ по формуле

$$(\tilde{H}_1 f)(x) = h(x)f(x) + \int_{T^\nu} h_1(x; t)f(t) dt, \quad (4)$$

где

$$h(x) = -2J\nu + 2J \sum_{i=1}^{\nu} \cos x_i, \\ h_1(x; t) = -2\varepsilon \left\{ \nu + \sum_{i=1}^{\nu} [\cos(x_i - t_i) - \cos x_i - \cos t_i] \right\},$$

здесь $\varepsilon = J_0 - J$; $x, t \in T^\nu$.

Доказательство предложения 2 проводится непосредственно с использованием преобразования Фурье.

Известно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_1$ не зависит от функции $h_1(x; t)$ и заполняет весь отрезок $[m_\nu, \mathcal{M}_\nu]$, где $m_\nu = \min_{x \in T^\nu} h(x)$, $\mathcal{M}_\nu = \max_{x \in T^\nu} h(x)$.

Собственная функция $\varphi \in L_2(T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_1$, отвечающая собственному значению z , называется ЛПС оператора $\tilde{H}_1$, а величина z – энергией этого состояния.

Рассмотрим оператор $K_\nu(z)$, действующий в пространстве $\tilde{H}_1$ по формуле

$$(K_\nu(z)f)(x) = \int_{T^\nu} \frac{h_1(x; t)}{h(t) - z} f(t) dt, \quad x, t \in T^\nu.$$

Он является компактным оператором в пространстве $L_2(T^\nu)$ для значений $z \notin [m_\nu, \mathcal{M}_\nu]$. Обозначим через $\Delta_\nu(z)$ определитель Фредгольма оператора $E + K_\nu(z)$, где E – единичный оператор в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_1$.

ЛЕММА 1. Определитель Фредгольма $\Delta_\nu(z)$ оператора $E + K_\nu(z)$ имеет вид

$$\Delta_\nu(z) = (1 - 2\varepsilon J_{\nu 1}(z))(1 - 2\varepsilon J_{\nu 2}(z))^\nu (1 - \varepsilon J_{\nu 3}(z))^{\nu-1}, \quad (5)$$

где

$$J_{\nu 1}(z) = \int_{T^\nu} \frac{(1 - \cos s_1)(\nu - \sum_{i=1}^{\nu} \cos s_i) ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}, \\ J_{\nu 2}(z) = \int_{T^\nu} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}, \\ J_{\nu 3}(z) = \int_{T^\nu} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 \dots ds_\nu}{h(s_1; s_2; \dots; s_\nu) - z}.$$

Доказательство леммы 1 получается непосредственно с использованием вида функций $h(x)$ и $h_1(x; t)$.

ЛЕММА 2. Число $z = z_0 \notin [m_\nu, M_\nu]$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_\nu(z)$, т.е. $\Delta_\nu(z) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = z_0$ — собственное значение оператора $\tilde{H}_1$. Это означает, что число $\mu = -1$ является собственным значением оператора $K_\nu(z_0)$, т.е. однородное уравнение

$$f(x) + \int_{T^\nu} \frac{h_1(x; t)}{h(t) - z} f(t) dt = 0$$

имеет нетривиальное решение. Следовательно, в точке $z = z_0$ функция $\Delta_\nu(z)$ равна нулю, $\Delta_\nu(z_0) = 0$.

Пусть теперь точка $z = z_0$ является нулем функции $\Delta_\nu(z)$: $\Delta_\nu(z_0) = 0$. Тогда указанное однородное уравнение также имеет нетривиальное решение. Отсюда следует, что число $z = z_0$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_1$.

Обозначим через P пару $(J; \varepsilon)$: $P = (J; \varepsilon)$ и при $\nu = 1$ введем следующие множества значений этих пар:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{P: J < 0, 0 < \varepsilon \leq -J\}, & G_2 &= \{P: J > 0, -J \leq \varepsilon < 0\}, \\ G_3 &= \{P: J > 0, 0 < \varepsilon \leq J\}, & G_4 &= \{P: J < 0, J \leq \varepsilon < 0\}, \\ G_5 &= \{P: J > 0, \varepsilon > J\}, & G_6 &= \{P: J < 0, \varepsilon > -J\}, \\ G_7 &= \{P: J > 0, \varepsilon < -J\}, & G_8 &= \{P: J < 0, \varepsilon < J\}. \end{aligned}$$

Положим $z_1 = (J + \varepsilon)(J - 2\varepsilon - \sqrt{D})/(2\varepsilon)$, $z_2 = -(J + \varepsilon)^2/\varepsilon$, $z_3 = (J + \varepsilon)(J - 3\varepsilon + \sqrt{D})/(2\varepsilon)$, где $D = (J + \varepsilon)(J + 9\varepsilon)$.

Следующая теорема описывает изменение энергетического спектра оператора $\tilde{H}_1$ в одномерном случае.

ТЕОРЕМА 1. А. Если $P \in G_1 \cup G_2$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет ЛПС.

Б. Если $P \in G_3$ ($P \in G_4$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное ЛПС φ со значением энергии $z = z_1$ ($z = z_3$). Кроме того, $z_1 < m_1$ ($z_3 > M_1$) и ЛПС невырожденно.

В. Если $P \in G_5 \cup G_6$ ($P \in G_7 \cup G_8$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два ЛПС φ_1 и φ_2 со значениями энергий, соответственно равными $z = z_1$ и $z = z_2$ ($z = z_2$ и $z = z_3$). Причем $z_1 < z_2$ ($z_2 < z_3$) и $z_i < m_1$, $i = 1, 2$ ($z_j > M_1$, $j = 2, 3$), и уровни этих энергий невырождены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (5) при $\nu = 1$ следует, что интегралы $J_{1k}(z)$, $k = 1, 2$, вычисляются в квадратурах, а третья скобка в (5) равна единице. Вычисляя значения этих интегралов для значений $z \notin [m_1, M_1]$, из уравнения $\Delta_1(z) = 0$ для определения z получаем следующие уравнения:

а) при $z < m_1$:

$$B(J, \varepsilon, z) = K(J, \varepsilon, z), \quad (6)$$

$$C(J, \varepsilon, z) = N(J, \varepsilon, z); \quad (7)$$

б) при $z > \mathcal{M}_1$:

$$B(J, \varepsilon, z) = -K(J, \varepsilon, z), \quad (8)$$

$$C(J, \varepsilon, z) = -N(J, \varepsilon, z), \quad (9)$$

где

$$B(J, \varepsilon, z) = \varepsilon(2J + z) + 2J^2,$$

$$K(J, \varepsilon, z) = -\varepsilon\sqrt{(-2J - z)^2 - 4J^2},$$

$$N(J, \varepsilon, z) = \varepsilon z^2,$$

$$C(J, \varepsilon, z) = -(\varepsilon z + 2J\varepsilon + 2J^2)\sqrt{(-2J - z)^2 - 4J^2}.$$

Решения уравнений (6) и (7) (уравнений (8) и (9)) удовлетворяют требованиям теоремы 1.

В случае размерности $\nu = 2$ введем следующие множества значений пар P :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{P: J < 0, 0 < \varepsilon \leq -J\}, & Q_2 &= \left\{P: J < 0, -J < \varepsilon \leq -\frac{100}{27}J\right\}, \\ Q_3 &= \left\{P: J < 0, -\frac{100}{27}J < \varepsilon \leq -\frac{25}{9}J\right\}, & Q_4 &= \left\{P: J < 0, \varepsilon > -\frac{25}{9}J\right\}, \\ Q_5 &= \left\{P: J < 0, \frac{25}{9}J < \varepsilon < 0\right\}, & Q_6 &= \left\{P: J < 0, \frac{100}{27}J < \varepsilon \leq \frac{25}{9}J\right\}, \\ Q_7 &= \left\{P: J < 0, \varepsilon \leq \frac{100}{27}J\right\}, & Q_8 &= \left\{P: J > 0, 0 < \varepsilon \leq \frac{25}{9}J\right\}, \\ Q_9 &= \left\{P: J > 0, \frac{25}{9}J < \varepsilon \leq \frac{100}{27}J\right\}, & Q_{10} &= \left\{P: J > 0, \varepsilon > \frac{100}{27}J\right\}, \\ Q_{11} &= \{P: J > 0, -J \leq \varepsilon < 0\}, & Q_{12} &= \left\{P: J > 0, -\frac{25}{9}J \leq \varepsilon < -J\right\}, \\ Q_{13} &= \left\{P: J > 0, -\frac{100}{27}J \leq \varepsilon < -\frac{25}{9}J\right\}, & Q_{14} &= \left\{P: J > 0, \varepsilon < -\frac{100}{27}J\right\}. \end{aligned}$$

Следующая теорема описывает изменение энергетического спектра оператора $\tilde{H}_1$ в двумерном случае.

ТЕОРЕМА 2. А. Если $P \in Q_1 \cup Q_{11}$, то оператор $\tilde{H}_1$ не имеет ЛПС.

Б. Если $P \in Q_2 \cup Q_8$ ($P \in Q_5 \cup Q_{12}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное ЛПС φ со значением энергии z_1 (z_2), причем $z_1 < m_2$ ($z_2 > \mathcal{M}_2$). Уровень этой энергии невырожден.

В. Если $P \in Q_3 \cup Q_9$ ($P \in Q_6 \cup Q_{13}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два ЛПС φ_1 и φ_2 со значениями энергии z_1 и z_2 , $z_i < m_2$, $i = 1, 2$ (z_3 и z_4 , $z_j > \mathcal{M}_2$, $j = 3, 4$), и уровни этих энергий невырождены.

Г. Если $P \in Q_4 \cup Q_{10}$ ($P \in Q_7 \cup Q_{14}$), то оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно три ЛПС φ_1, φ_2 и φ_3 со значениями энергии, соответственно равными z_1, z_2, z_3 (z_4, z_5, z_6), причем $z_i < m_2$, $i = 1, 2, 3$ ($z_j > \mathcal{M}_2$, $j = 4, 5, 6$). Состояния z_1 и z_3 (z_4 и z_6) невырождены, а состояние z_2 (z_5) двукратно вырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $J_{2k}(z)$, $k = 1, 2, 3$, при $z \notin [m_2, \mathcal{M}_2]$ являются монотонными. При $z < m_2$ и $J < 0$ функция $J_{21}(z)$ возрастает от 0 до $-(1/2J)$, функция $J_{22}(z)$ возрастает от 0 до $-(9/50J)$, а функция $J_{23}(z)$ возрастает от 0 до $-(27/100J)$. А при $z > \mathcal{M}_2$ и $J < 0$ эти функции возрастают соответственно от $-\infty$ до 0, от $9/50J$ до 0 и от $27/100J$ до 0. В этом легко можно убедиться, вычисляя значения интегралов $J_{2k}(m_2)$ и $J_{2k}(\mathcal{M}_2)$, $k = 1, 2, 3$. Учитывая, что в рассматриваемом случае мера нормированная, получаем значения интегралов $J_{2k}(m_2)$ и $J_{2k}(\mathcal{M}_2)$, $k = 1, 2, 3$. В случае $J > 0$ и $z < m_2$ функции $J_{2k}(z)$, $k = 1, 2, 3$, возрастают от 0 до ∞ , от 0 до $9/50J$ и от 0 до $27/100J$, соответственно. При $J > 0$ и $z > \mathcal{M}_2$ эти функции становятся опять возрастающими. Они возрастают от $-(1/2J)$ до 0, от $-(9/50J)$ до 0 и от $-(27/100J)$ до 0, соответственно. Теперь исследуя уравнение $\Delta_2(z) = 0$, немедленно получаем доказательство теоремы 2.

В случае $\nu = 3$ введем следующие обозначения:

$$a = \int_{T^3} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3} = \int_{T^3} \frac{\sin^2 s_1 ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3},$$

$$b = \int_{T^3} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_3} = \int_{T^3} \frac{(\cos s_1 - \cos s_2)^2 ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3}.$$

Ясно, что $0 < a < b < 1$ и $2a < b$. Теперь введем следующие множества пар P :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{P: J < 0, 0 < \varepsilon < -J\}, & Q_2 &= \left\{P: \frac{J}{3} < \varepsilon < 0, J < 0\right\}, \\ Q_3 &= \left\{P: J > 0, 0 < \varepsilon < \frac{J}{3}\right\}, & Q_4 &= \{P: J > 0, -J < \varepsilon < 0\}, \\ Q_5 &= \left\{P: J < 0, -J \leq \varepsilon < -\frac{2J}{b}\right\}, & Q_6 &= \left\{P: J > 0, \frac{J}{3} \leq \varepsilon < \frac{2J}{b}\right\}, \\ Q_7 &= \left\{P: J < 0, \frac{2J}{b} < \varepsilon \leq \frac{J}{3}\right\}, & Q_8 &= \left\{P: J > 0, -\frac{2J}{b} < \varepsilon \leq -\frac{J}{a}\right\}, \\ Q_9 &= \left\{P: J < 0, -\frac{2J}{b} \leq \varepsilon < -\frac{J}{a}\right\}, & Q_{10} &= \left\{P: J > 0, -\frac{2J}{b} \leq \varepsilon < \frac{J}{a}\right\}, \\ Q_{11} &= \left\{P: J < 0, \frac{J}{a} < \varepsilon \leq \frac{2J}{b}\right\}, & Q_{12} &= \left\{P: J > 0, -\frac{J}{a} < \varepsilon \leq -\frac{2J}{b}\right\}, \\ Q_{13} &= \left\{P: J < 0, \varepsilon \geq -\frac{J}{a}\right\}, & Q_{14} &= \left\{P: J > 0, \varepsilon \geq \frac{J}{a}\right\}, \\ Q_{15} &= \left\{P: J < 0, \varepsilon \leq \frac{J}{a}\right\}, & Q_{16} &= \left\{P: J > 0, \varepsilon \leq -\frac{J}{a}\right\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. А. Пусть $P \in Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$. Тогда оператор $\tilde{H}_1$ не имеет ЛПС.

Б. Пусть $P \in Q_5 \cup Q_6$ ($P \in Q_7 \cup Q_8$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет единственное ЛПС со значением энергии $z < m_3$ ($z > \mathcal{M}_3$). Уровень этой энергии невырожден.

В. Пусть $P \in Q_9 \cup Q_{10}$ ($P \in Q_{11} \cup Q_{12}$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно два ЛПС φ_1 и φ_2 со значениями энергии, соответственно равными z_1 и z_2 (z_3 и z_4), причем $z_i < m_3$, $i = 1, 2$ ($z_j > M_3$, $j = 3, 4$). Кроме того, состояние z_1 (z_3) невырожденно, а состояние z_2 (z_4) двукратно вырожденно.

Г. Пусть $P \in Q_{13} \cup Q_{14}$ ($P \in Q_{15} \cup Q_{16}$). Тогда оператор $\tilde{H}_1$ имеет ровно три ЛПС φ_1 , φ_2 и φ_3 со значениями энергии, соответственно равными z_1 , z_2 , z_3 (z_4 , z_5 , z_6). Причем $z_i < m_3$, $i = 1, 2, 3$ ($z_j > M_3$; $j = 4, 5, 6$). Кроме того, состояние z_1 невырожденно, z_2 двукратно вырожденно, а z_3 трехкратно вырожденно.

Теорема 3 доказывается так же, как и теорема 2. При доказательстве используются монотонность функций $J_{3k}(z)$, $k = 1, 2, 3$, при $z \notin [m_3, M_3]$ и значения интеграла Ватсона [8]. При этом учтено, что в рассматриваемом случае мера нормированная.

Аналогично можно доказать, что в ν -мерном случае система имеет не более трех ЛПС (без учета кратности вырождений их энергий) со значениями энергий $z_i \notin [m_\nu, M_\nu]$, $i = 1, 2, 3$. Кроме того, уровень этих энергий соответственно невырожден, ν - и $(\nu - 1)$ -кратно вырожден. Так же можно определить области существования ЛПС. Следовательно, в системе могут существовать не более трех видов ЛПС.

Список литературы

- [1] Ю. А. Изюмов, М. В. Медведев. ЖЭТФ. 1965. Т. 48. № 2. С. 574–586.
- [2] В. В. Ганн, Л. Г. Зазунов. ФТТ. 1973. Т. 15. № 12. С. 3535–3569.
- [3] Yung-Li Wang, H. Callen. Phys. Rev. 1967. V. 160. № 2. P. 358–363.
- [4] T. Oguchi, I. Ono. J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. № 1. P. 32–42.
- [5] T. Wolfram, J. Callaway. Phys. Rev. 1963. V. 130. № 6. P. 2207–2217.
- [6] I. Ono, Y. Endo. Phys. Rev. Lett. A. 1972. V. 41. № 5. P. 440–442.
- [7] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [8] В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, О. П. Петраковский. ФТТ. 1988. Т. 30. № 10. С. 3044–3047.

Поступила в редакцию 28.VI.2000 г.,
после доработки 30.X.2000 г.