Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Резонансное рассеяние на бесконечных листах, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 1, 21–33

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:40:08

© 2001 г.

А. А. Арсеньев*

РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ НА БЕСКОНЕЧНЫХ ЛИСТАХ

Исследуется рассеяние блоховской волны в кристалле с примесями, расположенными на двух параллельных плоскостях, которые перпендикулярны направлению распространения волны. Доказано, что приведенная матрица рассеяния имеет полюс с малой мнимой частью и коэффициент прохождения испытывает резкий скачок вблизи действительной части полюса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о рассеянии блоховской волны в кристалле исследовалась многими авторами. В наиболее близкой к нашей постановке эта задача рассмотрена Девисом [1], который ввел термин “рассеяние на листах”, и в работах [2], [3].

Мы доказываем, что в рассматриваемой нами ситуации приведенная матрица рассеяния имеет полюс с малой мнимой частью и вблизи действительной части этого полюса коэффициент прохождения испытывает скачок. Это есть основной результат нашей работы, он сформулирован в теореме 1. Мы приведем пример “физического” резонанса, т.е. скачка амплитуды рассеяния.

Обозначим через $x, y, \dots$ точки d -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ и символом $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$. Аналогично d -мерное произведение целых чисел $Z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ обозначим $\mathbb{Z}^d$. Если мы рассматриваем пространство $\mathbb{R}^d$ как декартово произведение $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$, то точки пространства $\mathbb{R}^d$ мы обозначаем $x \times y$, $x \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$, полагая, что из контекста ясно, когда знак “ $\times$ ” используется для обозначения не декартова произведения, а обычного умножения.

В трехмерном случае функцию, которая зависит только от координаты x_3 точки $x = (x_1, x_2, x_3)$, мы помечаем индексом $\parallel$, т.е. пишем $f^\parallel(x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$, если f не зависит от x_1, x_2 .

Символом $L(A \rightarrow B)$ обозначено банахово пространство линейных непрерывных операторов из банахова пространства A в банахово пространство B .

*Московский государственный университет, Москва, Россия

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Приступим к описанию рассматриваемой модели. Пусть

$$q_0: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$$

– непрерывная по Гёльдеру неотрицательная периодическая функция:

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \forall m \in \mathbb{Z}^3: \quad q_0(x + m) = q_0(x).$$

Предположим, что функция q_0 удовлетворяет следующим условиям, которые в дальнейшем мы будем называть условиями симметрии:

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in (0, 1), \forall x_3 \in \mathbb{R}^1: \\ q_0(1 - x_1, 1 - x_2, x_3) &= q_0(x_1, x_2, x_3), \\ q_0(x_1, x_2, -x_3) &= q_0(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $q_n^{\text{int}}(x)$ – монотонно возрастающая последовательность

$$q_{n+1}^{\text{int}} \geq q_n^{\text{int}} \geq q_0^{\text{int}} \equiv 0$$

непрерывных по Гёльдеру функций, которые удовлетворяют условиям симметрии (1) и периодичны по двум первым аргументам:

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall m \in \mathbb{Z}^2, \forall z \in \mathbb{R}^1: \quad q_n^{\text{int}}((x + m) \times z) = q_n^{\text{int}}(x \times z).$$

Предположим, что функция

$$q_\infty^{\text{int}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^{\text{int}}(x)$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} q_\infty^{\text{int}}(x \times z) &< \exp(-bz^2), \quad |z| > c, \\ q_\infty^{\text{int}}(x \times z) &= \infty, \quad 0 < l \leq |z| \leq l + d < \infty, \end{aligned} \tag{2}$$

где b, c, l, d – некоторые положительные константы. Мы предполагаем также, что функция $q_\infty^{\text{int}}(x \times z)$, $x \times z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$, непрерывна по Гёльдеру при $|z| \notin [l, l + d]$. В дальнейшем для простоты положим

$$q_n^{\text{int}}(x) = \min(n, q_\infty^{\text{int}}(x)).$$

Определим функцию

$$q_n(x) = q_0(x) + q_n^{\text{int}}(x)$$

и на $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ определим оператор

$$L_n = -\Delta + q_n, \tag{3}$$

где Δ – оператор Лапласа, а q_n – оператор умножения на функцию $q_n(x)$. Тем же символом L_n мы будем обозначать самосопряженное расширение оператора (3) в $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$.

Мы будем изучать задачу рассеяния для пары L_n, L_0 при $n \rightarrow \infty$.

3. ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Определим функции $\forall x \times z \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$

$$q_n^\parallel(z) = \inf_x q_n^{\text{int}}(x \times z), \quad n < \infty,$$

$$q_\infty^\parallel(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^\parallel(z)$$

и оператор в $L^2(\mathbb{R}^1, dz)$

$$L_n^\parallel = -\partial_{zz}^2 + q_n^\parallel.$$

При изучении задачи рассеяния для пары L_n, L_0 , $n \rightarrow \infty$, мы воспользуемся принципом инвариантности для волновых операторов [4] и заменим эту задачу задачей рассеяния для пары $\exp(-tL_n)$, $\exp(-tL_0)$. Для задачи рассеяния в кристалле этот прием был использован в работе [5].

Для $n < \infty$ определим операторы

$$G_n(t): L^2(\mathbb{R}^3, dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, dx), \quad G_n(t) = \exp(-tL_n),$$

$$G_n^\parallel(t): L^2(\mathbb{R}^1, dz) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^1, dz), \quad G_n^\parallel(t) = \exp(-tL_n^\parallel),$$

и положим

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, t > 0: \quad W_d(x, y, t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right).$$

В пространствах $L^2(\mathbb{R}^3, dx)$, $L^2(\mathbb{R}^1, dz)$ операторы $G_n(t)$, $G_n^\parallel(t)$ действуют как интегральные операторы, ядра которых суть функции Грина $G_n(x, y, t)$, $G_n^\parallel(z', z'', t)$. В дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки функций Грина уравнения теплопроводности. Эти оценки являются частным случаем хорошо известных оценок, при выводе которых обычно используют оценки констант Гёльдера, поэтому формально коэффициенты в оценках зависят от этих констант. Однако нам нужны оценки, которые не зависят от констант Гёльдера, и такие оценки проще получить из представления функций Грина через математическое ожидание от процесса броуновского движения.

ЛЕММА 1. *Функция Грина $G_n(x, y, t)$ может быть вычислена по формуле*

$$G_n(x, y, t) = W_3(x, y, t) E \left\{ \exp \left(-t \int_0^1 q_n(\vartheta(x, y, t | \tau, \zeta(\tau))) d\tau \right) \right\}, \quad (4)$$

где $\zeta(\tau)$ – броуновская траектория,

$$\zeta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \zeta(0) = 0,$$

$$\vartheta(x, y, t | \tau, \zeta(\tau)) = 2\sqrt{t}(\zeta(\tau) - \tau\zeta(1)) + x + \tau(y - x),$$

а символ $E\{\dots\}$ обозначает интеграл Винера по $\zeta(\tau)$. Аналогично

$$G_n^\parallel(z', z'', t) = W_1(z', z'', t) E \left\{ \exp \left(-t \int_0^1 q_n^\parallel(\vartheta(z', z'', t | \tau, \zeta(\tau))) d\tau \right) \right\}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (4), (5) являются версией хорошо известной формулы (см. [6]).

ЛЕММА 2. *Поточечно существуют пределы*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x, y, t) = G_\infty(x, y, t), \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^\parallel(z', z'', t) = G_\infty^\parallel(z', z'', t). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4), (5) следует, что левые части этих равенств образуют последовательность монотонно убывающих неотрицательных функций.

В дальнейшем мы считаем, что функции $G_\infty, G_\infty^\parallel$ определены равенствами (6), (7).

ЛЕММА 3. *Равномерно по всем переменным справедливы следующие оценки:*

$$0 \leq G_n(x, y, t) \leq W_3(x, y, t), \quad (8)$$

$$0 \leq G_n^\parallel(z', z'', t) \leq G_0^\parallel(z', z'', t) = W_1(z', z'', t), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 0 \leq G_0(x \times z', y \times z'', t) - G_n(x \times z', y \times z'', t) \leq \\ \leq W_2(x, y, t)(G_0^\parallel(z', z'', t) - G_n^\parallel(z', z'', t)). \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве нуждается только последняя оценка. Используя лемму 1, мы получаем

$$\begin{aligned} 0 \leq G_0(x \times z', y \times z'', t) - G_n(x \times z', y \times z'', t) = \\ = W_2(x, y, t)W_1(z', z'', t)E \left\{ \exp \left(-t \int_0^1 q_0(\vartheta(x \times z', y \times z'', t|\tau, \zeta(\tau))) d\tau \right) \times \right. \\ \times \left. \left[1 - \exp \left(-t \int_0^1 q_n^{\text{int}}(\vartheta(x \times z', y \times z'', t|\tau, \zeta(\tau))) d\tau \right) \right] \right\} \leq W_2(x, y, t) \times \\ \times W_1(z', z'', t)E \left\{ 1 - \exp \left(-t \int_0^1 q_n^{\text{int}}(\vartheta(x \times z', y \times z'', t|\tau, \zeta(\tau))) d\tau \right) \right\} = \\ = W_2(x, y, t)(G_0^\parallel(z', z'', t) - G_n^\parallel(z', z'', t)). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. *Справедлива оценка*

$$0 \leq G_0^\parallel(z', z'', t) - G_n^\parallel(z', z'', t) \leq a \exp(-b((z')^2 + (z'')^2)), \quad (11)$$

в которой константы зависят только от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение есть следствие принципа максимума для уравнения теплопроводности.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ

Ниже мы будем использовать некоторые хорошо известные конструкции теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [7].

Пусть K – единичный квадрат в $\mathbb{R}^2$:

$$K = \{x; x = (x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Пусть $H = L^2(K \times \mathbb{R}^1, d\xi \times dz)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций на $K \times \mathbb{R}^1$. Норму в пространстве H мы обозначим $\|\cdot\|$. Пусть $B = L^2(K \rightarrow H, d\theta)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций на K со значениями в H . Норма функции $K \ni \theta \rightarrow f(\cdot | \theta) \in H$ дается формулой

$$\|f\|_B^2 = \int_K \|f(\cdot | \theta)\|^2 d\theta.$$

Соотношение

$$F_1(f)(\xi \times z | \theta) = \sum_m \exp(-2\pi i(m, \theta)) f((\xi + m) \times z), \quad (12)$$

где $\xi \in K$, $m \in \mathbb{Z}^2$, $\theta \in K$, $(m, \theta) = m_1\theta_1 + m_2\theta_2$, определяет унитарное отображение

$$F_1: L^2(\mathbb{R}^3, dx) \rightarrow B.$$

Обратное отображение дается формулой

$$f((\xi + m) \times z) = \int_K \exp(2\pi i(m, \theta)) F_1(f)(\xi \times z | \theta) d\theta,$$

где $\xi \in K$, $m \in \mathbb{Z}^2$, $z \in \mathbb{R}^1$.

ЛЕММА 5. *Отображение*

$$B \rightarrow B: f(\cdot | \theta) \rightarrow F_1 G_n(t) F_1^{-1} f(\cdot | \theta), \quad n < \infty,$$

определяет на K приводимую отображением F_1 операторную функцию $G_n(t | \theta)$:

$$G_n(t | \theta) F_1(f)(\cdot | \theta) = F_1(G_n(t) f)(\cdot | \theta), \quad n \leq \infty, \quad \theta \in K. \quad (13)$$

Оператор $G_n(t | \theta)$ – это интегральный оператор в $L^2(K \times \mathbb{R}^1, d\xi \times dz)$ с ядром

$$G_n(\xi \times z; \xi' \times z', t | \theta) = \sum_m \exp(2\pi i(m, \theta)) G_n(\xi \times z, (\xi' + m) \times z', t | \theta), \quad (14)$$

где $\xi, \xi' \in K$, $z, z' \in \mathbb{R}^1$, $m \in \mathbb{Z}^2$, $\theta \in K$, $n \leq \infty$. Справедливо равенство

$$G_n(1 - \xi_1, 1 - \xi_2, -z; \xi'_1, \xi'_2, z', t | \theta) = \overline{G_n(\xi_1, \xi_2, z; 1 - \xi'_1, 1 - \xi'_2, -z', t | \theta)}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением с учетом периодичности функции q_n . Для вывода равенства (15) мы используем условия симметрии (1).

ЛЕММА 6. *Справедлива оценка*

$$|G_n(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta)| \leq \text{const} \cdot W_1(z, z', t), \quad (16)$$

где $\xi, \xi' \in K$, $z, z' \in \mathbb{R}^1$, $n \leq \infty$ и константа зависит только от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно подставить оценку (8) в (14).

ЛЕММА 7. 1. Функция $\theta \rightarrow G_n(t|\theta) \in L(H \rightarrow H)$ аналитична в комплексной окрестности K .

2. При фиксированном $\theta \in K$ функция $[0, \infty) \ni t \rightarrow G_n(t|\theta) \in L(H \rightarrow H)$ есть полугруппа самосопряженных операторов в H , которая при $n < \infty$ принадлежит классу C_0 .

3. Пространства

$$\begin{aligned} L^2(K \times (-\infty, -(l+d)), d\xi \times dz), \\ L^2(K \times [-l, l], d\xi \times dz), \\ L^2(K \times [(l+d), \infty) d\xi \times dz) \end{aligned} \quad (17)$$

приводят полугруппу $G_\infty(t|\theta)$, которая на этих пространствах принадлежит классу C_0 .

4. На пространстве $L^2(K \times [-l, l], d\xi \times dz)$ оператор $G_\infty(t|\theta)$ вполне непрерывен при $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти утверждения тривиально следуют из явной формулы для интегрального ядра оператора $G_\infty(t|\theta)$ (или принципа максимума для уравнения теплопроводности).

Из леммы 7 и общей теории полугрупп самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве следует

ЛЕММА 8. 1. Оператор

$$L_n(\theta) = -\partial_t G_n(t|\theta)|_{t=0} \quad (18)$$

самосопряжен в пространстве H при $n < \infty$.

2. Оператор $L_\infty(\theta)$ самосопряжен в каждом из пространств (17), приводит каждое из этих пространств к самосопряжен в их прямой сумме.

3. Ограничение оператора $L_\infty(\theta)$ на пространство $L^2(K \times [-l, l], d\xi \times dz)$ имеет дискретный спектр:

$$\sigma(L(\theta) \downarrow L^2(K \times [-l, l], d\xi \times dz)) = \{\mu_j\}. \quad (19)$$

Определим функцию

$$V_n(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta) = G_0(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta) - G_n(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta), \quad (20)$$

где $\xi, \xi' \in K$, $z, z' \in \mathbb{R}^1$, $\theta \in K$.

ЛЕММА 9. 1. *Справедлива оценка*

$$|V_n(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta)| < a \exp(-b(z^2 + (z')^2)), \quad (21)$$

где константы зависят только от t .

2. *Существует поточечно предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta) = V_\infty(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta). \quad (22)$$

3. *Справедливо равенство*

$$V_n(1 - \xi_1, 1 - \xi_2, -z; \xi'_1, \xi'_2, z', t|\theta) = \overline{V_n(\xi_1, \xi_2, z; 1 - \xi'_1, 1 - \xi'_2, -z', t|\theta)}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (10), (11) и формулы (14) следует, что

$$\begin{aligned} |V_n(\xi \times z, \xi' \times z', t|\theta)| &\leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} W_2(\xi, \xi' + m, t)(G_0^\parallel(z', z'', t) - G_n^\parallel(z', z'', t)) < \\ &< a \exp(-b(z^2 + (z')^2)). \end{aligned}$$

5. СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть $J(\lambda)$ – функция, которая удовлетворяет следующим условиям: она аналитична в окрестности полуоси $[0, \infty)$, принимает на этой полуоси положительные значения и имеет положительную производную. Нам нужно вычислить спектральную функцию оператора $J(L_0(\theta))$. Используем известный прием [7]: сведем задачу к задаче в единичной ячейке и после этого возьмем прямой интеграл.

Пусть $B_1 = L^2([0, 1] \rightarrow L^2(K \times [0, 1]), d\phi)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций на отрезке $[0, 1]$ со значениями в $L^2(K \times [0, 1])$. Определим унитарное отображение $F_2: H \rightarrow B_1$ формулой

$$F_2(f)(\xi \times z | \phi) = \sum_m \exp(-2\pi i m \phi) f(\xi \times (z + m)), \quad (24)$$

где $\xi \times z \in K \times [0, 1]$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \phi \leq 1$. В силу периодичности функции $z \rightarrow q_0(\xi \times z)$ отображение F_2 приводит оператор $G_0(t|\theta)$. Пусть $G_0(t|\phi|\theta)$ – оператор в слое. Как и выше, на основе явной формулы для интегрального ядра оператора $G_0(t|\phi|\theta)$ (или используя известные оценки функции Грина оператора теплопроводности) можно доказать, что операторная функция

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow G_0(t|\phi|\theta) \in L(L^2(K \times [0, 1]) \rightarrow L^2(K \times [0, 1]))$$

есть полугруппа класса C_0 самосопряженных вполне непрерывных при $t > 0$ операторов, которые аналитичны по ϕ в окрестности сегмента $[0, 1]$.

Пусть $\{\exp(-\lambda_k(\phi)t), u_k(\xi \times z|\phi)\}$ – собственные значения и собственные функции задачи

$$\exp(-\lambda_k(\phi)t)u_k(\cdot|\phi) = G_0(t|\phi|\theta)u_k(\cdot|\phi), \quad 1 \leq k < \infty. \quad (25)$$

Без ограничения общности мы можем предполагать, что для каждой функции

$$\phi \rightarrow \lambda_k(\phi) \quad (26)$$

существует такое конечное разбиение сегмента $[0, 1]$, что функция (26) аналитична внутри каждого сегмента разбиения и имеет лишь алгебраические особенности в точках деления (мы не предполагаем, что функция (26) алгебраическая на отрезке $[0, 1]$).

Из условий симметрии (1) и леммы 5 следует

ЛЕММА 10. *Если функция $u_k(\xi \times z|\phi)$ есть собственная функция задачи (25), то функция $u_k(1 - \xi_1, 1 - \xi_2, 1 - z|\phi)$ есть собственная функция задачи (25), отвечающая тому же собственному значению $\exp(-\lambda_k(\phi)t)$.*

Пусть $\lambda_k([0, 1])$ – образ сегмента $[0, 1]$ при отображении (26). Следующее утверждение есть переформулировка для рассматриваемого нами случая известного результата [7].

ЛЕММА 11. *Множество*

$$\sigma(L_0(\theta)) = \bigcup_k \overline{\lambda_k([0, 1])}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

есть спектр оператора $L_0(\theta)$ в пространстве H , и при $\lambda \notin \sigma(J(L_0(\theta)))$ резольвента оператора $J(L_0(\theta))$ дается формулой

$$\begin{aligned} R(\lambda, J(L_0(\theta)))f(\xi \times (z + n)) = \\ = \sum_{k,p} \int_0^1 \exp(2\pi i(n-p)\phi)(\lambda - J(\lambda_k(\phi)))^{-1} \times \\ \times \left[\int_{K \times [0,1]} \overline{u_k(\xi' \times z'|\phi)} f(\xi' \times (z' + p)) d\xi' dz' \right] u_k(\xi \times z|\phi) d\phi, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\xi \in K$, $z \in [0, 1]$, $n, p \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Мы собираемся диагонализировать оператор $J(L_0(\theta))$, т.е. построить такое пространство с мерой $\{\Omega, d\omega\}$ и унитарное отображение

$$U: H \rightarrow h = L^2([0, \infty) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega), d\lambda), \quad \langle f, g \rangle = \langle Uf, Ug \rangle_h, \quad (28)$$

что в пространстве h оператор $UJ(L\theta)U^{-1}$ есть оператор умножения на λ . Такое построение, конечно, не единственно. Мы используем формулу (27) для резольвенты. Ниже для простоты предполагаем, что

$$\sigma(L_0(\theta)) = \bigcup_j [\alpha_j, \beta_j], \quad \alpha_j < \beta_j < \alpha_{j+1}. \quad (29)$$

Представим сегмент $[0, 1]$ как конечное объединение таких сегментов $[\eta_i, \eta_{i+1}]$, $1 \leq i \leq i(k)$, что знак производной $d\lambda_k(\phi)/d\phi$ постоянен на каждом интервале (η_i, η_{i+1}) . Пусть сегмент $[a_{k,i}, a_{k,i+1}]$ есть образ сегмента $[\eta_i, \eta_{i+1}]$ при отображении

$$\phi \rightarrow J(\lambda_k(\phi)). \quad (30)$$

На интервале $(a_{k,i}, a_{k,i+1})$ мы определим функцию $\lambda \rightarrow \phi_{k,i}(\lambda)$ как решение уравнения

$$\lambda = J(\lambda_k(\phi_{k,i}(\lambda))).$$

Перенумеруем все интервалы $(a_{k,i}, a_{k,i+1})$ индексом $j \in \mathbb{Z}_+$ и положим

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in (a_{k,i}, a_{k,i+1})_j : f_j(\lambda) &= \sum_p \exp(-2\pi i \phi_{k,i}(\lambda)p) \left| J'(\lambda) \frac{d\lambda_k(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_{k,i}(\lambda)}^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\int_{K \times [0,1]} \bar{u}_k(\xi \times z | \phi_{k,i}(\lambda)) f(\xi \times (z+p)) d\xi dz \right], \quad (31) \\ \forall \lambda \notin (a_{k,i}, a_{k,i+1})_j : f_j(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть Ω — это множество $\mathbb{Z}_+$ с дискретной топологией и компактификацией Александрова. Определим меру $d\omega$ на Ω , приписывая меру 2^{-j} точке $j \in \mathbb{Z}_+$. Определим в $L^2(\Omega, d\omega)$ скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_j 2^{-j} \bar{f}_j g_j$$

и определим отображение (28) формулой

$$Uf(\lambda, j) = 2^{\frac{j}{2}} f_j(\lambda). \quad (32)$$

В окрестности каждой точки $\lambda \in [0, \infty)$ только конечное число компонент функции $\lambda \rightarrow Uf(\lambda, j)$ отлично от нуля. Преобразование (32) диагонализует оператор $J(L_0(\theta))$ и является унитарным, так как оператор $L_0(\theta)$ есть инфинитезимальный оператор полу-группы класса C_0 и его система обобщенных собственных функций полна. Обратное преобразование U^{-1} в пространстве $\Omega \times [0, \infty)$ с мерой $d\omega d\lambda$ есть интегральный оператор с ядром

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in (a_{k,i}, a_{k,i+1})_j : U^{-1}(\lambda, j | \xi \times (z+n)) &= 2^{\frac{j}{2}} \exp(2\pi i n \phi_{k,i}(\lambda)) \times \\ &\times \left| J'(\lambda) \frac{d\lambda_k(\phi)}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_{k,i}(\lambda)}^{-\frac{1}{2}} u_k(\xi, z | \phi_{k,i}(\lambda)), \quad (33) \\ \forall \lambda \notin (a_{k,i}, a_{k,i+1})_j : U^{-1}(\lambda, j | \xi \times (z+n)) &= 0. \end{aligned}$$

6. СВЕДЕНИЕ К ОБЩЕЙ МОДЕЛИ

Покажем, что в рассматриваемой нами ситуации выполнены все условия предложенной в работе [8] модели образования резонансов.

Положим

$$J(\lambda) = 1 - \exp(-t\lambda).$$

Пусть точка μ_∞ есть простое собственное значение сужения оператора $L_\infty(\theta)$ на пространство $L^2(K \times [-l, l])$:

$$L_\infty(\theta)\psi_\infty = \mu_\infty\psi_\infty, \quad \text{supp } \psi_\infty \subset K \times [-l, l], \quad (34)$$

и пусть $\lambda_\infty = J(\mu_\infty)$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что при некотором $\delta > 0$ интервал $(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta)$ пересекается лишь с конечным числом интервалов $(a_{k,i}, a_{k,i+1})_j$ и для этих интервалов выполнено включение $(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta) \subset (a_{k,i}, a_{k,i+1})_j$. Число δ в дальнейшем мы считаем достаточно малым. Определим гильбертовы пространства

$$H_\pm = L^2(K \times \mathbb{R}^1, \exp(\mp|z|) d\xi \times dz).$$

Норму в пространстве $H_\pm$ мы обозначим $\|\cdot\|_\pm$.

ЛЕММА 12. 1. *Функция*

$$(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta) \ni \lambda \rightarrow R(\lambda, J(L_0(\theta))) \in L(H_- \rightarrow H_+)$$

аналитична в окрестности интервала $(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta)$.

2. *При $f \in H_-$ функция*

$$\lambda \rightarrow Uf(\lambda, \cdot) \in C(\Omega)$$

аналитична в окрестности интервала $(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого утверждения мы должны оценить только те слагаемые в (27), для которых пересечение $(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta) \cap (a_{k,i}, a_{k,i+1})_j$ не пусто. В этих слагаемых мы сдвигаем контур интегрирования $\int_0^1 d\phi$ в нижнюю полуплоскость так, чтобы круг $|\lambda - \lambda_\infty| \leq \delta$ лежал выше образа пути интегрирования при отображении (30). После этого для каждого такого слагаемого мы получаем оценку

$$|\dots| \leq \text{const} \cdot \exp\left(\epsilon(\delta)|n-p| - \left|\frac{p}{2}\right|\right) \|f\|_-, \quad |\lambda - \lambda_\infty| \leq \delta,$$

где $\epsilon(\delta) \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ и константа не зависит от n, p . Эта оценка доказывает первое утверждение леммы. Второе утверждение очевидно.

Пусть V_n — интегральный оператор с ядром (20).

- ЛЕММА 13. 1. Оператор V_n ядерный в пространствах $L(H \rightarrow H)$, $L(H_+ \rightarrow H_+)$.
 2. Оператор V_n вполне непрерывен в пространстве $L(H_+ \rightarrow H_-)$.
 3. Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V_\infty$$

существует в ядерной топологии пространств $L(H \rightarrow H)$, $L(H_+ \rightarrow H_+)$ и в равномерной топологии пространства $L(H_+ \rightarrow H_-)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти утверждения, очевидно, следуют из оценки (21). В несколько другой ситуации ядерность доказана в работе [5].

Определим отображение $l: H_+ \rightarrow H_+$ формулой

$$lf(\xi_1, \xi_2, z) = \bar{f}(1 - \xi_1, 1 - \xi_2, -z), \quad \xi_1, \xi_2 \in K, \quad z \in \mathbb{R}^1. \quad (35)$$

Прямым вычислением доказывается

ЛЕММА 14. Справедливо равенство

$$lR(\lambda, L_0(\theta))V_n = R(\bar{\lambda}, L_0(\theta))V_n l. \quad (36)$$

Определим отображение

$$p: \Omega \rightarrow \Omega, \quad p(\omega) = \omega. \quad (37)$$

Из лемм 12–14 следует, что операторы

$$A_n = J(L_n(\theta)), \quad V_n = G_0 - G_n, \quad \Gamma_n = R(\lambda, J(L_0(\theta)))V_n$$

удовлетворяют условиям предложенной в работе [8] (см. также [9]) модели образования резонансов амплитуды рассеяния.

7. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Так как оператор $V_n = J(L_n(\theta)) - J(L_0(\theta))$ ядерный в пространстве H , то оператор рассеяния $S(J(L_n(\theta)), J(L_0(\theta)))$ существует и в силу принципа инвариантности волновых операторов Бирмана справедливо равенство

$$S(J(L_n(\theta)), J(L_0(\theta))) = S(L_n(\theta), L_0(\theta)).$$

Ниже мы будем обозначать матрицу рассеяния символом $S(\lambda)$.

Рассматривая оператор $\Gamma_n^+(\lambda)$ в пространстве H_+ , введем определитель

$$D_n(\lambda) = \det(E - \Gamma_n^+(\lambda)).$$

Из лемм 12 и 13 следует, что определитель $D_n(\lambda)$ существует, аналитичен по λ в окрестности точки λ_∞ и непрерывен по n в окрестности точки $n = \infty$. В точке λ_∞ определитель $D_\infty(\lambda)$ имеет нуль. Следовательно, при достаточно большом n определитель

$D_n(\lambda)$ в окрестности точки λ_∞ имеет нуль λ_n . Как известно [4], нуль определителя $D_n(\lambda)$ есть полюс матрицы рассеяния. Вычет матрицы рассеяния в полюсе изучался в работе [10], а в работах [8], [9] мы исследовали поведение вычета в полюсе матрицы рассеяния при стремлении мнимой части полюса к нулю. В силу принципа инвариантности волновых операторов Бирмана (см., например, [4]) справедливо равенство

$$S(J(L_n(\theta), J(L_0(\theta)))(1 - \exp(-t\mu)) = S(L_n(\theta), L_0(\theta))(\mu).$$

Положим

$$S(L_n(\theta), L_0(\theta))(\mu) = \text{id} + 2\pi i t_n^+(\mu),$$

где id – единичный оператор в $L^2(\Omega, d\omega)$, а $t_n^+(\mu)$ – интегральный оператор в $L^2(\Omega, d\omega)$ с ядром $t^+(\omega, \omega', \mu)$. Из теоремы 1 работы [8] (см. также [11]) следует, что справедлива

ТЕОРЕМА. Пусть μ_∞ – простое собственное значение оператора $L_\infty(\theta)$. Тогда:

1. Существует такое $n_0 < \infty$, что при $n > n_0$ в круге $|\mu_\infty - \mu| < \delta$ существует полюс μ_n матрицы рассеяния $S(L_n(\theta), L_0(\theta))(\mu)$ и этот полюс удовлетворяет соотношениям

$$\Im \mu_n < 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu_\infty.$$

2. При $\mu \neq \mu_\infty$ равномерно по $\omega \in \Omega$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^+(\omega, \omega, \mu) = 0.$$

3. Если ν_n – такая последовательность действительных чисел, что $|\nu_n - \Re \mu_n| = O(|\Im \mu_n|^{1+\epsilon})$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \left| t_n^+(\omega, \omega, \nu_n) - \frac{1}{2\pi i} \right| d\omega = \frac{1}{\pi}. \quad (38)$$

В рассматриваемом нами случае интеграл в (38) – это конечная сумма по зонам.

Мы не можем утверждать, что все собственные значения оператора $L_\infty(\theta)$ простые, и в этом смысле результат теоремы имеет условный характер.

Обратим внимание на то, что в рамках рассматриваемой модели скачок амплитуды рассеяния не зависит от деталей поведения потенциала, а при доказательстве существенно использовались свойства симметрии потенциала. Как известно, в одномерном случае ситуация аналогична.

Отметим, что рассмотренная нами задача может иметь методический интерес в связи с рассуждениями, обычно используемыми для объяснения принципа работы туннельного диода [12].

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Ясно, что все глобальные требования, накладываемые на строение спектра оператора $L_0(\theta)$ и свойства диагонализующего преобразования U , можно заменить локальными требованиями без изменения формулировки результатов. Мы не стали делать этого для упрощения изложения. Функция

$$\theta \rightarrow S(L_n(\theta), L_0(\theta))$$

аналитична, и оператор

$$S_{\oplus}(L_n, L_0) \stackrel{\text{def}}{=} \oplus \int_K S(L_n(\theta), L_0(\theta)) d\theta$$

существует. Однако не ясно, в каком смысле оператор $S_{\oplus}(L_n, L_0)$ можно рассматривать как оператор рассеяния и как связаны особенности матрицы этого оператора с рассмотренными выше полюсами.

Благодарности. Работа была выполнена во время пребывания автора в Чалмерше (Department of Mathematics Chalmers University of Technology Göteborg University). Автор благодарен руководству университета за предоставленные условия для работы и профессорам Лейфу Аркериду и Алексею Гейнцу за гостеприимство. Первоначальный вариант работы опубликован в [9].

Список литературы

- [1] *E. B. Davies.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 1977. V. 82. № 2. P. 327–334.
- [2] *E. B. Davies, B. Simon.* Commun. Math. Phys. 1978. V. 63. P. 277–301.
- [3] *Ю. П. Чубурин.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 2. С. 277–290.
- [4] *Д. Р. Яфаев.* Математическая теория рассеяния. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1994.
- [5] *G. M. Troianiello.* Math. Phys. 1974. V. 15. № 12. P. 2048–2052.
- [6] *А. А. Арсеньев.* ЖВМиМФ. 1967. Т. 7. № 6. С. 1298–1319.
- [7] *М. Руд, Б. Саймон.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [8] *А. А. Арсеньев.* ТМФ. 1996. Т. 106. № 1. С. 16–23; 1997. Т. 111. № 1. С. 159.
- [9] *A. A. Arsen'ev.* Model of Resonance Scattering. Preprint № 2000:15 Department of Mathematics Chalmers University of Technology Göteborg University. Göteborg, Sweden, 2000.
- [10] *S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn.* J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 101. P. 491–513.
- [11] *A. A. Arsen'ev.* Resonances in Scattering from Infinite Sheets. Preprint № 2000:24. Department of Mathematics Chalmers University of Technology Göteborg University. Göteborg, Sweden, 2000.
- [12] *L. Esaki.* IEE J. Quant. Electron. 1986. V. QE-22. № 9. P. 1611–1624.

Поступила в редакцию 29.XI.2000 г.,
после доработки 22.XII.2000 г.