Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Обломков, О разностных операторах на двумерных правильных решетках,
ТМФ, 2001, том 127, номер 1, 34–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 11:08:28

© 2001 г.

А. А. Обломков*

О РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРАХ НА ДВУМЕРНЫХ ПРАВИЛЬНЫХ РЕШЕТКАХ

Решены прямая и обратная спектральные задачи для двух классов разностных операторов. Приведены системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие изоспектральные деформации этих операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дубровин, Кричевер и Новиков [1] ввели важный класс двумерных операторов Шредингера, конечнозонных по отношению к одному уровню энергии. Блоховская собственная функция ψ определена на алгебраической кривой и мероморфна вне выделенных точек, в которых она имеет экспоненциальные особенности (так называемая функция Бейкера–Ахиезера). В последующих работах Веселов и Новиков [2]–[4] нашли достаточные условия на спектральную кривую и дивизор полюсов ψ , для которых соответствующий оператор чисто потенциален.

Исследование разностных аналогов этих задач было начато Кричевером [5], в работе [6] приведена конструкция для обратной задачи на одном уровне энергии для оператора на квадратной решетке в случае четного периода. В настоящей работе исследуются прямая и обратная задачи на одном уровне энергии для двух классов разностных периодических операторов на плоскости.

Спектральной кривой, отвечающей фиксированному уровню энергии E_0 , называется плоская кривая $C(L, E_0)$, задаваемая уравнением

$$\det(E_0 - L(\lambda_1, \lambda_2)) = 0,$$

где $L(\lambda_1, \lambda_2)$ – ограничение оператора L на пространство квазипериодических функций с множителями Флоке λ_1, λ_2 . При этом соответствующая собственная функция $L\psi = E_0\psi$ является мероморфной на $C(L, E_0)$, и если мы нормируем эту функцию условием $\psi(n_0) \equiv 1$, где n_0 – некоторый фиксированный узел решетки, то у этой функции появится дивизор особенностей $\mathcal{D}(L, E_0)$. Прямой спектральной задачей называется

*Московский государственный университет, Независимый Московский университет, Москва, Россия

задача описания спектральной кривой $C(L, E_0)$ и дивизора $\mathcal{D}(L, E_0)$, обратной спектральной задачей называется задача восстановления оператора L по кривой $C(L, E_0)$ и дивизору $\mathcal{D}(L, E_0)$.

В разделе 2 рассматривается класс самосопряженных операторов на квадратной решетке вида

$$(L\psi)(n) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \sum_{s=1}^2 a(\varepsilon; n; s) \psi(n + \varepsilon e_s), \quad a(\varepsilon; n; s) = a(-\varepsilon; n + \varepsilon e_s; s), \quad (1)$$

а также описаны основные понятия. В зависимости от условий периодичности имеются два подкласса таких операторов: четный и нечетный. В четном случае описание прямой и обратной задач дается теоремой 1, в нечетном случае – теоремой 2, а условие (12) является дискретным аналогом соотношения Веселова–Новикова [4].

В разделе 3 рассмотрен класс операторов, относящийся к правильной треугольной решетке на плоскости. Операторы такого типа впервые были рассмотрены Новиковым [7] (см. также приложение I в работе [4]) в связи с дискретными преобразованиями Лапласа. В терминах барицентрических координат $(x_i, i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, x_0 + x_1 + x_2 = 0)$ узлы правильной треугольной решетки – это точки с целочисленными координатами. Соединив каждый узел ребрами с ближайшими узлами (в смысле стандартной метрики $(x, x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$), мы получим замощение плоскости правильными треугольниками. Треугольники замощения удобно нумеровать их центрами масс. Центры масс треугольников имеют вид

$$-\varepsilon \Upsilon + \xi, \quad \xi \in \Lambda_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{Z}^3 \mid \zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 = \varepsilon\}, \quad \Upsilon = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Два типа центров масс соответствуют двум типам треугольников на плоскости, которые в работе [8] называются черными и белыми треугольниками, в этой работе введено определение симплициальной связности. Рассматриваемый нами оператор является частным случаем симплициальной связности, он действует на пространстве функции на треугольниках замощения и задается формулой

$$(L\psi)(-\varepsilon \Upsilon + \xi) = \sum_{s=0}^2 a(\varepsilon; \xi; s) \psi(-\varepsilon \Upsilon + \xi - \varepsilon \hat{e}_s), \quad (2)$$

где $a(\varepsilon; \xi; s) = a(-\varepsilon; -\varepsilon \Upsilon + \xi - \varepsilon \hat{e}_s; s)$, $\xi \in \Lambda_\varepsilon$, $e_0 = (1, 0, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1)$, $3\hat{e}_s = -2e_s + e_{s+1} + e_{s-1}$. Этот оператор естественно рассматривать как самосопряженный оператор на симплексах-треугольниках [8]. Поскольку в этом случае имеется естественное разбиение треугольников на черные и белые, то спектральная кривая распадается на две компоненты. Мы доказываем, что две компоненты изоморфны и ситуация аналогична четному случаю в первом рассматриваемом классе.

В разделе 4 рассматриваются изоспектральные деформации, которые строятся по аналогии с непрерывным случаем [4].

2. СЛУЧАЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

Рассмотрим оператор L , действующий на пространстве V функций на квадратной решетке $\mathbb{Z}^2$ по формуле (1). Этот оператор является самосопряженным относительно стандартной метрики на V . Нас будет интересовать периодический случай: $a(\varepsilon; n + \xi; s) = a(\varepsilon; n; s) \quad \forall \xi \in \Lambda$, где Λ – некоторая невырожденная подрешетка $\mathbb{Z}^2$, которую будем называть периодом оператора L . Мы будем изучать оператор L на нулевом уровне энергии.

В периодическом случае основным объектом изучения являются блоховские собственные функции, т.е. такие функции $\psi(n)$ из ядра оператора L , что при сдвиге на период они умножаются на некоторые фиксированные множители, называемые множителями Флоке. Свойство функции быть блоховской не зависит от выбранного базиса подрешетки, но при замене базиса подрешетки множители Флоке меняются. Фиксируем обозначения для пространства блоховских функций $V_q(B)(\lambda)$ и множителей Флоке λ , соответствующих некоторому базису B подрешетки Λ :

$$V_q(B)(\lambda) = \{\psi \in V \mid \psi(n + b_s) = \lambda_s \psi(n)\}.$$

Пусть теперь B – некоторый базис в Λ , множество $C^a = \{\lambda \in (\mathbb{C} \setminus 0)^2 \mid \ker L \cap V_q(B)(\lambda) \neq 0\}$ будем называть *аффинной частью спектральной кривой оператора L* . Это определение не зависит от выбора базиса в решетке. Неособую компактификацию этой кривой будем называть спектральной кривой оператора L и обозначим ее символом C . При исследовании геометрии кривой C следует разделять два существенно различных случая: решетка Λ либо четна, либо нечетна. Решетка Λ четна тогда и только тогда, когда для любого $\xi \in \Lambda$ выполнено $\xi_1 + \xi_2 = 0 \pmod{2}$.

2.1. Четный случай. В этом случае имеется естественное разложение

$$\mathbb{Z}^2 = \Gamma^0 \oplus \Gamma^1, \quad \Gamma^i = \{\xi \in \Lambda \mid \xi_1 + \xi_2 = i \pmod{2}\},$$

откуда имеем разложение

$$V_q = V_q^0 \oplus V_q^1, \quad V_q^i = \{\varphi \in V_q \mid \text{supp } \varphi \subset \Gamma^i\},$$

которое сохраняется при сдвиге на вектор периода. Таким образом, имеем $\psi = \psi^0 + \psi^1$, $\psi^i \in V_q^i$, $L|_{V_q} = L^0 + L^1$, $L^i: V_q^i \rightarrow V_q^{1-i}$, и система уравнений $L\psi = 0$ эквивалентна паре систем $L^i\psi^i = 0$, $i = 0, 1$. Следовательно, $C = C^0 \cup C^1$, $C^i = \overline{\{\lambda \mid V_q^i \cap \ker L^i \neq 0\}}$, и функция $\psi^i(n)/\psi^i(n')$, $n = (n_1, n_2)$, $n' = (n'_1, n'_2)$, $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2 = i \pmod{2}$, естественным образом определена на C^i и является мероморфной.

Теперь построим два специальных базиса $B^\varepsilon = \{b_1^\varepsilon, b_2^\varepsilon\}$, $\varepsilon = \pm 1$, решетки Λ такие, что в координатах $((n_1 + \varepsilon n_2)/2, (n_1 - \varepsilon n_2)/2)$ матрица базиса B^ε имеет следующие свойства: $b_{1,1}^\varepsilon, b_{2,2}^\varepsilon > 0$, $0 \leq -b_{1,2}^\varepsilon < b_{2,2}^\varepsilon$, $b_{2,1}^\varepsilon = 0$. Такой базис существует и единствен. Отвечающие этому базису множители Флоке будем обозначать $\lambda_\varepsilon = (\lambda_{\varepsilon;1}, \lambda_{\varepsilon;2})$, и пусть $\Delta = b_{1,1}^1 b_{2,2}^1$. Переход от множителей Флоке λ_ε к $\lambda_{-\varepsilon}$ является бирациональным преобразованием $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$.

Теперь выпишем некоторые удобные базисы в V_q^0, V_q^1 . Рассмотрим в $V_q^i(B^\varepsilon)$ базис из векторов $e_{\varepsilon;\alpha}^i$, $\alpha = 1, \dots, \Delta$, которые однозначно определяются условиями

$$e_{\varepsilon;1+l+m b_{2,2}^\varepsilon}^i(n) = \delta_l^{\frac{n_1-\varepsilon n_2+i}{2}} \delta_m^{\frac{n_1+\varepsilon n_2+i}{2}}$$

при $0 \leq l, (n_1 - \varepsilon n_2)/2 < b_{2,2}^\varepsilon, 0 \leq m, (n_1 + \varepsilon n_2)/2 < b_{1,1}^\varepsilon$. Пусть $M_\varepsilon^i(\lambda_\varepsilon)$ обозначает матрицу оператора L^i , записанную в базисах $\{e_{\varepsilon;\alpha}^i\}, \{e_{\varepsilon;\alpha}^{1-i}\}$. Построенные матрицы имеют блочно-двудиagonalный вид и $(M_\varepsilon^i(\lambda_\varepsilon))^t = M_\varepsilon^{1-i}(\lambda_\varepsilon^{-1}), \lambda_\varepsilon^{-1} = (\lambda_{\varepsilon;1}^{-1}, \lambda_{\varepsilon;2}^{-1})$. Пусть $R_\varepsilon^i(\lambda_\varepsilon) = \det M_\varepsilon^i(\lambda_\varepsilon)$,

$$A_j^{\varepsilon,s,\varepsilon_1} = \prod_{\substack{n_1+\varepsilon n_2=j \\ 0 \leq n_1-\varepsilon n_2 < b_{2,2}^\varepsilon}} (-a(\varepsilon_1; n_1, n_2; s)).$$

Непосредственным вычислением доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 1. Для любого оператора L верны следующие равенства:

$$R_\varepsilon^i(\lambda_\varepsilon) = R_\varepsilon^i(\lambda_\varepsilon(\lambda_{-\varepsilon})) = R_{-\varepsilon}^i(\lambda_{-\varepsilon}), \quad (3)$$

$$R_\varepsilon^1(\lambda_\varepsilon) = \sum_{l \in \Pi_\varepsilon} r_{\varepsilon;l_1,l_2} \lambda_{\varepsilon;1}^{l_1} \lambda_{\varepsilon;2}^{l_2}, \quad (4)$$

где $\Pi_\varepsilon \subset \mathbb{Z}^2$ — область внутри (включая границу) параллелограмма с вершинами $(0,0), (b_{2,2}^\varepsilon, -b_{1,2}^\varepsilon), (0, b_{1,1}^\varepsilon), (b_{2,2}^\varepsilon, b_{1,1}^\varepsilon - b_{1,2}^\varepsilon)$,

$$\sum_{l_1=b_{2,2}^\varepsilon, j} r_{\varepsilon;l_1,l_2} \lambda_{\varepsilon;2}^{l_2+b_{3-j}^\varepsilon} = \prod_{s=1}^{b_{1,1}^\varepsilon} (A_{2s}^{\varepsilon,j,-1+(\varepsilon+1)(j-1)} - \lambda_{\varepsilon;2} A_{2s}^{\varepsilon,3-j,1+(\varepsilon+1)(2-j)}). \quad (5)$$

Введем определение пары кривых, совместимых с четной решеткой Λ . Пусть дана пара гладких кривых C^0, C^1 рода $\Delta - b_{1,1}^{-1} - b_{1,1}^1 + 1$ с изоморфизмом $\tau: C^0 \rightarrow C^1$ и на этих кривых имеются наборы точек $P_{i,l}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $l \in \mathbb{Z}/b_{1,1}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\mathbb{Z}$, таких, что для

$$Q_{i;n^0}^n = \sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2=\pm 1} \left(\sum_{l=(\varepsilon_1 n_1^0 + \varepsilon_2 n_2^0 + i)/2}^{(\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + i)/2 - 1} P_{i,l}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} - \sum_{l=(\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + i)/2}^{(\varepsilon_1 n_1^0 + \varepsilon_2 n_2^0 + i)/2 - 1} P_{i,l}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \right), \quad (6)$$

$i = n_1 + n_2 \pmod{2} = n_1^0 + n_2^0 \pmod{2}$, выполнено $n - n^0 \in \Lambda \Rightarrow Q_{i;n^0}^n \sim 0$ и отображение τ действует на точках $P^{\pm 1, \pm 1}$ по следующему правилу: $\tau(P_{0,l}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = P_{1,-l}^{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2}$. Набор $\{C^0, C^1, P_l^{\pm 1, \pm 1}, \tau\}$ будем называть *парой кривых, совместимых с решеткой Λ* . Из леммы 1 и работы [9] следует, что при компактификации к $C^{a,i} = C^a \cap C^i$ будет добавлено $2(b_{1,1}^{-1} + b_{1,1}^1)$ точек $P^{\pm 1, \pm 1}$. Эти точки могут быть описаны следующим образом в координатах $\lambda_{\varepsilon_1;\varepsilon_2}$:

$$P_{i,k}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \left(0^{\varepsilon_1}, \frac{A_{2\varepsilon_1 k}^{\varepsilon_1\varepsilon_2, (3-\varepsilon_1)/2, (2i-1)(-1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1-1)/2)}}{A_{2\varepsilon_1 k}^{\varepsilon_1\varepsilon_2, (3+\varepsilon_1)/2, (2i-1)(1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+1)/2)}} \right),$$

причем если $C^{a,i}$ — гладкая кривая, то для этого набора выполнено соотношение (6), и набор $\{C^0, C^1, P^{\pm,1,\pm 1}, \tau\}$, где $\tau(\lambda_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon^{-1}$, является набором, совместимым с решеткой Λ . Открытое по Зарисскому множество операторов таких, что $C^{i,a}$ — гладкие кривые, будем обозначать U_{sm} , а открытое по Зарисскому множество операторов таких, что на кривой C^i выполнено условие

$$\begin{aligned} & \lambda_{\varepsilon;1}^{(1-\varepsilon_1)b_{1,2}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}+1} a(\varepsilon_2; n + \varepsilon_1 e_1; 2) \frac{\partial R_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^i(P_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial a(\varepsilon_2; n + \varepsilon_1 e_1; 2)} = \\ & = -\lambda_{\varepsilon;1}^{(1-\varepsilon_1)b_{1,2}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}+1} a(\varepsilon_1; n + \varepsilon_2 e_2; 1) \frac{\partial R_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^i(P_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})}{\partial a(\varepsilon_1; n + \varepsilon_2 e_2; 1)} \neq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$, будем обозначать символом U_R . Как уже отмечалось ранее, отношение значений функции ψ в двух узлах решетки Γ^i является корректно определенной функцией на C^i . Следующая лемма характеризует поведение этих функций в окрестности точек $P^{\pm 1, \pm 1}$. Но прежде чем сформулировать лемму, отметим необходимую для доказательства формулу: по построению матриц M имеем

$$\frac{\frac{\partial R_\varepsilon^i}{\partial a(\varepsilon_1; n; 1)}}{\frac{\partial R_\varepsilon^i}{\partial a(\varepsilon_1; n + \varepsilon_1 e_1; 2)}} = \frac{\psi(n)}{\psi(n + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2)}, \quad (8)$$

где $i = n_1 + n_2 \pmod{2}$.

ЛЕММА 2. *Для оператора $L \in U_{\text{sm}}$ и любых $i = 0, 1$, $l \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2 = \pm 1$ верно:*

- 1) $\varepsilon_1 \varepsilon'_1 \neq \varepsilon_2 \varepsilon'_2 \Rightarrow \text{ord}_{P_{i,l}^{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2}}(\psi(n_1 + \varepsilon_1, n_2 + \varepsilon_2) / \psi(n_1, n_2)) = 0$;
- 2) $\text{ord}_{P_{i,l}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}}(\psi(n_1 + \varepsilon_1, n_2 + \varepsilon_2) / \psi(n_1, n_2)) = \delta_{(\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + i)/2}^l \Leftrightarrow L \in U_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство пункта 1 для $\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 = i = 1$, $\varepsilon'_2 = -1$ (в остальных случаях доказательство проводится аналогично). Для этого перепишем формулу (8) с учетом (5) более подробно:

$$\begin{aligned} \frac{\psi(n + e_1 + e_2)}{\psi(n)} &= \frac{\frac{\partial R_{-1}^1}{\partial a(1; n + e_1; 2)}}{\frac{\partial R_{-1}^1}{\partial a(1; n; 1)}}, \\ \frac{\frac{\partial R_{-1}^1}{\partial a(1; n + e_1; 2)}}{\frac{\partial R_{-1}^1}{\partial a(1; n; 1)}}(0, \lambda_{-1; 2}) &= \lambda_{-1; 2} \frac{A_{(n_1 - n_2 + 1)/2}^{-1, 2, 1} a(1; n; 1)}{A_{(n_1 - n_2 + 1)/2}^{-1, 1, -1} a(1; n; 2)}. \end{aligned}$$

Утверждение пункта 1 является следствием этой формулы.

Теперь докажем пункт 2 для $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = i = 1$. Для этого опять перепишем подробнее формулу (8) при помощи (5):

$$\frac{\frac{\partial R_1^1}{\partial a(1; n + e_1; 2)}}{\frac{\partial R_1^1}{\partial a(1; n; 1)}} = \frac{a(1; n; 1) \lambda_{1;1} \lambda_{1;2} \left(\frac{\partial R_1^1(\lambda_{1;1}, \lambda_{1;2})}{\partial a(1; n + e_1; 2)} \lambda_{1;1}^{-1} \right)}{A_{n_1 + n_2 + 1}^{1, 1, -1} \prod_{s \neq (n_1 + n_2 + 1)/2} (A_{2s}^{1, 1, -1} - \lambda_{1;2} A_{2s}^{1, 2, -1}) + \lambda_{1;1} Q(\lambda_{1;1}, \lambda_{1;2})},$$

причем $(\partial R_1^1(\lambda_{1;1}, \lambda_{1;2})/\partial a(1; n+e_1; 2))\lambda_{1;1}^{-1}$, $Q(\lambda_{1;1}, \lambda_{1;2})$ – полиномы по $\lambda_{1;1}, \lambda_{1;2}$. Элементарный анализ последней формулы в окрестности точек $P_{1,k}^{1,1}$ дает утверждение пункта 2.

Из леммы 2 следует

ЛЕММА 3. Для оператора $L \in U_R \cap U_{\text{sm}}$ верна следующая формула:

$$\frac{\psi(n)}{\psi(n^0)} \in \mathcal{L}_{C^i}(\mathcal{D}_{i;n^0} + Q_{i;n^0}^n), \quad (9)$$

где $i = n_1 + n_2 \pmod{2} = n_1^0 + n_2^0 \pmod{2}$, $\mathcal{D}_{i;n^0} \geq 0$, $\text{supp } D_{k_1^0, k_2^0}^i \subset C^{a,i}$.

Здесь используются стандартные обозначения из теории алгебраических кривых: если C – гладкая алгебраическая кривая, то

$$\mathcal{L}_C(\mathcal{D}) = \{f \in \mathcal{M}_C \mid (f) + \mathcal{D} > 0\}.$$

Про линейные пространства подобного типа нам потребуется следующее утверждение, являющееся следствием теоремы Римана–Роха.

ЛЕММА 4. Пусть C – гладкая алгебраическая кривая рода g , а $\mathcal{D}$ – общий дивизор такой, что $|\mathcal{D}| = g$, тогда $\dim \mathcal{L}_C(\mathcal{D}) = 1$.

Будем считать, что дивизор $\mathcal{D}_{i;m_0,n_0}$ минимальный среди возможных (добавление лишних точек к дивизору не влияет на справедливость леммы 3). Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть K – матрица размера $\Delta \times \Delta$, тогда $\Delta_\varepsilon(K)(i_1, j_1; i_2, j_2)$ при $0 \leq i_k < b_{2,2}^\varepsilon$, $0 \leq j_k < b_{1,1}^\varepsilon$ является алгебраическим дополнением к элементу $K_{1+i_1+j_1 b_{2,2}^\varepsilon, 1+i_2+j_2 b_{2,2}^\varepsilon}$. Определим пару дивизоров:

$$D_i^{\text{jump}} = \sum_{P \in C^{a,i}} P \min_{\substack{k_1, l_1 \\ k_2, l_2}} (\text{ord}_P \Delta_\varepsilon(M_\varepsilon^i)(k_1, l_1; k_2, l_2)),$$

$i = 0, 1$. Очевидно, что определение дивизора $\mathcal{D}_i^{\text{jump}}$ не зависит от выбора ε и $\mathcal{D}_i^{\text{jump}} \geq 0$. Рассмотрим следующий дифференциал на C^i :

$$\Omega_{\varepsilon; n; s; \varepsilon'; j}^i = \frac{\partial R_{\varepsilon'}^i}{\partial a(\varepsilon; n; s)} \frac{d\lambda_{\varepsilon'; j}}{\lambda_{\varepsilon'; 1} \lambda_{\varepsilon'; 2} \frac{\partial R_{\varepsilon'}^i}{\partial \lambda_{\varepsilon'; 3-j}}},$$

где $i = n_1 + n_2 \pmod{2}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\Omega_{\varepsilon; n; s; \varepsilon'; j_1}^i = \text{const} \cdot \Omega_{\varepsilon; n; s; \varepsilon'; j_2}^i$, т.е. класс пропорциональности дифференциала не зависит от двух последних индексов, и мы будем опускать эти индексы, так как нас интересует класс пропорциональности дифференциала.

ЛЕММА 5. Пусть $L \in U_{\text{sm}} \cap U_R$, тогда

$$(\Omega_{\varepsilon;n;s}^i) \sim \sum_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon \\ \varepsilon_{3-s} = \pm 1}} P_{i,(\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2)/2}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \mathcal{D}_n^i + \tau(\mathcal{D}_{n+\varepsilon e_s}^{1-i}) + \mathcal{D}_i^{\text{jump}}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для случая $\varepsilon = i = s = 1$ (для остальных случаев доказательство проводится аналогично). Исследуем сначала поведение дифференциала $\Omega_{\varepsilon;n;s}^i$ в окрестности точек $P^{\pm 1, \pm 1}$. Прежде всего, заметим, что

$$\deg_{\lambda_{\varepsilon;1}} \frac{\partial R_{\varepsilon}^1}{\partial a(1; n; 1)} \leq b_{1,2}^{\varepsilon} - 1$$

и в силу $L \in U_R$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon}^1}{\partial a(1; n; 1)} \lambda_{\varepsilon;1}^{b_{1,2}^{\varepsilon} + 1} (P^{-1, \varepsilon}) \neq 0, \infty.$$

Тогда дифференциал

$$\Omega_{1;n;1}^1 = \left(\frac{\partial R_{\varepsilon}^1}{\partial a(1; n; 1)} \lambda_{\varepsilon;1}^{b_{1,2}^{\varepsilon} + 1} \right) \left(\frac{\lambda_{\varepsilon;1}^{-b_{1,2}^{\varepsilon}}}{\frac{\partial R_{\varepsilon}^1}{\partial \lambda_{\varepsilon;2}}} \right) \lambda_{\varepsilon;2}^{-1} d\lambda_{\varepsilon;1}^{-1}$$

голоморфен и не обращается в нуль при $\lambda_{\varepsilon;1}^{-1} \sim 0$ (т.е. в точках $P^{-1, -\varepsilon}$). Теперь заметим, что

$$\Omega_{1;n;1}^1 = \frac{d\lambda_{\varepsilon;1} (\prod_{s \neq (n_1 + \varepsilon n_2 + 1)/2} (A_{2s}^{\varepsilon, 1, -1} - \lambda_{\varepsilon;2} A_{2s}^{\varepsilon, 2, -\varepsilon}) + \lambda_{\varepsilon;1} Q(\lambda_{\varepsilon;1}, \lambda_{\varepsilon;2}))}{(A_{n_1 + \varepsilon n_2 + 1}^{\varepsilon, 1, -1})^{-1} a(1; n; 1) \lambda_{\varepsilon;1} \lambda_{\varepsilon;2} \frac{\partial R_{\varepsilon}^1}{\partial \lambda_{\varepsilon;2}}},$$

где коэффициент Q полиномиален по $\lambda_{\varepsilon;1}, \lambda_{\varepsilon;2}$. Таким образом, мы видим, что дифференциал $\Omega_{1;n;1}^1$ голоморфен, не обращается в нуль в точках $P_k^{1, \varepsilon}$, $k \neq (n_1 + \varepsilon n_2 + 1)/2$, и имеет полюс первого порядка в точках $P_{(n_1 + \varepsilon n_2 + 1)/2}^{1, \varepsilon}$.

Так как $L \in U_{\text{sm}}$, то дифференциал $\Omega_{1;n;1}^1$ голоморфен на $C^{a, 1}$, следовательно,

$$(\Omega_{1;n;1}^1) \sim \mathcal{D} - P_{(n_1 + n_2 + 1)/2}^{1, 1} - P_{(n_1 - n_2 + 1)/2}^{1, -1},$$

где $\mathcal{D} > 0$, $\text{supp } \mathcal{D} \subset C^{a, 1}$. В силу периодичности коэффициентов оператора L мы можем предполагать без ограничения общности, что $0 \leq (n_1 + n_2 + 1)/2 < b_{1,1}^{\varepsilon}$, $0 \leq (n_1 - n_2 + 1)/2 < b_{2,2}^{\varepsilon}$. Теперь воспользуемся свойствами матрицы M_1^1 для подсчета $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} - \mathcal{D}_n^1 - \mathcal{D}_{n+e_1}^0$:

$$\begin{aligned} \text{ord}_P \tilde{\mathcal{D}} &= \min_{n', n''} \text{ord}_P \left(\frac{\psi_{n'}}{\psi_n} \frac{\psi_{n''}}{\psi_n} \Delta_1(M_1^1)(n_+, n_-; n_+, n_-) \right) = \\ &= \min_{n', n''} \text{ord}_P \left(\frac{\Delta_1(M_1^1)(n_+', n_-'; n_+', n_-')}{\Delta_1(M_1^1)(n_+', n_-'; n_+', n_-')} \right) \left(\frac{\Delta_1(M_1^1)(n_+', n_-'; n_+', n_-)}{\Delta_1(M_1^1)(n_+', n_-'; n_+', n_-)} \right) + \\ &\quad + \text{ord}_P (\Delta_1(M_1^1)(n_+, n_-; n_+, n_-)) = \text{ord}_P \mathcal{D}_1^{\text{jump}}. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение $n_+ = (n_1 + n_2 + 1)/2$, $n_- = (n_1 - n_2 + 1)/2$. Таким образом, лемма доказана.

Набор $\{C^0, C^1, P_l^{\pm 1, \pm 1}, \tau, \mathcal{D}^0, \mathcal{D}^1\}$ из пары кривых C^0, C^1 , совместимых с четной решеткой Λ , и общих дивизоров $\mathcal{D}^i \subset C^i$, $\mathcal{D}^i > 0$, $|\mathcal{D}^i| = \Delta - b_{1,1}^1 - b_{1,1}^{-1} + 1$, будем называть набором спектральных данных Λ -периодической задачи. Теперь сформулируем основной результат данного раздела.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{C^i, C^{1-i}, P_l^{\pm 1, \pm 1}, \tau, \mathcal{D}_{n^0}^i, \mathcal{D}_{n^0 + \varepsilon e_s}^{1-i}\}$ – общий набор спектральных данных Λ -периодической задачи такой, что

$$\sum_{\substack{\varepsilon_s = \varepsilon \\ \varepsilon_{3-s} = \pm 1}} P_{i, (\varepsilon_1 n_1^0 + \varepsilon_2 n_2^0)/2}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} + \mathcal{D}_{n^0}^i + \tau(\mathcal{D}_{n^0 + \varepsilon e_s}^{1-i}) \sim \mathcal{K}, \quad (11)$$

где $n \in \mathbb{Z}^2$, $i, s, \varepsilon \in \mathbb{Z}$ фиксированы. Если выбрать ненулевые функции $\psi(n)$ квазипериодическим образом так, чтобы выполнялось условие (9), то существует единственный (при нормировке условием $a(\varepsilon; n^0; s) = 1$) периодический оператор $L\psi = 0$ с периодом Λ .

Верно и обратное: спектральная кривая общего оператора L распадается на пару кривых: $C = C^0 \cup C^1$, и на этих кривых имеются дивизоры $\mathcal{D}_{n^0}^i, \mathcal{D}_{n^0 + \varepsilon e_s}^{1-i} > 0$, точки $P^{\pm 1, \pm 1}$ и отображение τ , образующие спектральные данные Λ -периодической задачи такие, что для дивизоров выполнено условие (11), а для блоховской функции ψ , нормированной условием $\psi(n^0) = \psi(n^0 + \varepsilon e_s) = 1$, выполнено (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что множество спектральных данных Λ -периодической задачи непусто. Действительно, общая плоская кривая C^0 , многоугольник Ньютона которой является параллелограммом с вершинами $(0, 0)$, $(b_{2,2}^\varepsilon, -b_{1,2}^\varepsilon)$, $(0, b_{1,1}^\varepsilon)$, $(b_{2,2}^\varepsilon, b_{1,1}^\varepsilon - b_{1,2}^\varepsilon)$, и ее образ $\tau(C^0) = C^1$, как следует из результатов [9], являются парой кривых, совместимых с Λ . Рассмотрим общие спектральные данные Λ -периодической задачи и по кривой C^i и дивизору $\mathcal{D}_n^i$ с помощью стандартной техники обратной спектральной задачи [6] построим оператор L такой, что $L \in U_{\text{sm}} \cap U_R$ и при этом $|\mathcal{D}_n^i| = \Delta - b_{1,1}^1 - b_{1,1}^{-1} + 1$. Следовательно, для общего оператора L верно $L \in U_R \cap U_{\text{sm}}$ и $\mathcal{D}_i^{\text{jump}} = 0$. Тем самым прямое утверждение является следствием предшествующих лемм.

Докажем теперь обратное утверждение. Используя стандартную технику, развитую в работе [5], по половине спектральных данных (по кривой C^i и дивизору $\mathcal{D}_{n^0}^i$, точнее по функциям $\psi(n)$, $n_1 + n_2 = i \pmod{2}$) строим оператор L' . Согласно уже доказанному утверждению функции $\psi'(n)$, $n_1 + n_2 = 1 - i \pmod{2}$, такие, что $L'_{1-i}\psi' = 0$, удовлетворяют условию (9), а следовательно, согласно лемме 4 отличаются от выбранных нами функций $\psi(n)$ постоянным множителем. Откалибровав оператор L' этими константами, получим требуемый оператор L .

2.2. Нечетный случай. Пусть решетка Λ нечетна. В этом случае для общего оператора L спектральная кривая C неприводима. Существует единственная решетка $\Lambda' \subset \Lambda$ такая, что $[\Lambda : \Lambda'] = 2$ и Λ' четная. Подрешетка Λ' определяет на C естественную инволюцию σ . Действительно, возьмем вектор $b_1 \in \Lambda \setminus \Lambda'$ и дополним этот

вектор до базиса в Λ некоторым вектором $b_2 \in \Lambda'$. Тогда уравнение кривой C , выписанное в терминах множителей Флоке, отвечающих базису b_1, b_2 , будет иметь вид $R(\lambda_1^2, \lambda_2) = 0$, и отображение $\sigma: \lambda_1 \rightarrow -\lambda_1$ будет инволюцией; инволюция σ не зависит от выбора векторов b_1, b_2 . Отображение факторизации по этой инволюции обозначим символом π , а кривую $\pi(C)$ обозначим через C^m . Кривую C^m будем называть *модифицированной спектральной кривой оператора L* . Она является спектральной кривой оператора L , рассмотренного как оператор с четным периодом Λ' . В этом случае компоненты C^0, C^1 совпадают ($C^m = C^0 = C^1$) и отображение τ становится инволюцией на кривой C^m . При этом имеет место равенство $P_{1,k}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = P_{0, k+\varepsilon_1(\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + 1)/2}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, где $b = (b_1, b_2) \in \Lambda \setminus \Lambda'$. Пусть $P_{1,k}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = P_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, тогда отображение τ действует на этих точках следующим образом: $\tau(P_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = P_{k-\varepsilon_1(\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + 1)/2}^{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2}$. Все предыдущие рассуждения не зависят от выбора вектора b . Набор $\{C^m, P^{\pm 1, \pm 1}, \tau, \mathcal{D}\}$, где $\mathcal{D} \geq 0$, $\text{genus}(C) = |\mathcal{D}| = \Delta - b_{1,1}^1 - b_{1,1}^{-1} + 1$ ($\Delta, b_{1,1}^1, b_{1,1}^{-1}$ — соответствующие характеристики решетки Λ') и набор $\{C^m, P^{\pm 1, \pm 1}\}$ обладает вышеперечисленными свойствами, будем называть *спектральными данными Λ -периодической задачи*. Таким образом, в нечетном случае верна следующая, легко выводимая из теоремы 1, теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дан набор $\{C^m, P_l^{\pm 1, \pm 1}, \tau, \mathcal{D}_{n^0}\}$ спектральных данных Λ -периодической задачи такой, что

$$\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1} \left(\sum_{l=s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(n^0)}^{t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(n^0+b)-1} P_{-l}^{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2} - \sum_{l=s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(n^0)}^{t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(n^0+b)-(1+\varepsilon_1)/2} P_{l+(1+\varepsilon_1)/2}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \right) \sim \widehat{\mathcal{K}}_{n^0}, \quad (12)$$

где $\widehat{\mathcal{K}}_{n^0} \sim \mathcal{K} - \mathcal{D}_{n^0} - \tau(\mathcal{D}_{n^0})$, $n^0 \in \mathbb{Z}^2$, $n_1^0 + n_2^0 = 1 \pmod{2}$, $s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(m) = (\varepsilon_1 m_1 + \varepsilon_2 m_2 + 1)/2$, $t^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(m) = (\varepsilon_1 m_1 + \varepsilon_2 m_2)/2$, $b \in \Lambda \setminus \Lambda'$ фиксированы. Если выбрать ненулевые функции $\psi(n)$ квазипериодическим образом так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\psi(n)}{\psi(n^0)} \in \mathcal{L}_{C^m}(\mathcal{D}_{n^0} + S_{1;n^0}^n), \quad \frac{\psi(n')}{\psi(n^0+b)} \in \mathcal{L}_{C^m}(\mathcal{D}_{n^0} + S_{0;n^0}^n), \quad (13)$$

где $n_1 + n_2 = 1 \pmod{2}$, $n'_1 + n'_2 = 0 \pmod{2}$, а $S_{1;n^0}^n = Q_{1;n^0}^n$ дается формулой (6) (с учетом равенства $P_{1,k}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = P_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$) и

$$S_{0;n^0}^n = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1} \left(\sum_{l=s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(n-b)-1}^{l=s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(n^0)} P_{l+(1-\varepsilon_1)/2}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} - \sum_{l=s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(n-b)}^{l=s^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(k^0)-1} P_{l+(1-\varepsilon_1)/2}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \right),$$

то существует единственный с точностью до пропорциональности оператор $L\psi = 0$ с периодом Λ .

Верно и обратное: на модифицированной спектральной кривой C^m общего Λ -периодического оператора имеются инволюция τ , набор точек $P_l^{\pm 1, \pm 1}$ и дивизор $\mathcal{D}_{n^0} > 0$, образующие спектральные данные Λ -периодической задачи и удовлетворяющие условию (12) такие, что для бляховской функции $\varphi \in \mathcal{M}_C$ верна формула

$$\varphi(n) = \nu_b^{1-i} \pi^*(\psi(n)),$$

где $i = n_1 + n_2 \pmod{2}$, $\psi(n) \in \mathcal{M}_{C^m}$, и для них верно (13).

3. СЛУЧАЙ ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

Рассмотрим оператор, задаваемый формулой (2). Будем считать, что коэффициенты a оператора L периодичны относительно решетки $\Lambda \subset \Lambda_0$, т.е. $a(\varepsilon; n+\xi; s) = a(\varepsilon; n; s)$ для любого $\xi \in \Lambda$. Пусть $\Delta = [\Lambda_0 : \Lambda]$. В решетке Λ имеется подрешетка $\Lambda^i = \{\xi \in \Lambda \mid \xi_i = 0\}$, пусть $\delta_i = [\Lambda : \Lambda^i]$. Определения пространства квазипериодических функций, множителей Флоке и спектральной кривой для оператора L повторяют определения, приведенные для случая квадратной решетки. По тем же причинам, что и в случае четной квадратной решетки, спектральная кривая состоит из двух компонент, и по аналогии с четным случаем вводится определение спектральных данных Λ -периодической задачи.

Набор $\{C^{-1}, C^1, P_{\pm 1, k}^i, \tau, D^{-1}, D^1\}$, где $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}/\delta_i\mathbb{Z}$, $C^{\pm 1}$ — гладкие кривые, $P_{\pm 1, k}^i \in C^{\pm 1}$ — точки на этих кривых, $D^{\pm 1} \subset C^\varepsilon$, $D^{\pm 1} > 0$ — дивизоры, $\tau: C^1 \leftrightarrow C^{-1}$ — изоморфизм, является набором спектральных данных Λ -периодической задачи, если выполнены следующие условия. Во-первых, род $C^{\pm 1}$ равен $g = \Delta - \delta_0 - \delta_1 - \delta_2 + 1$ и $|D^{\pm 1}| = g$, во-вторых, $\tau(P_{\varepsilon, k}^i) = P_{-\varepsilon, k-\varepsilon}^i$ и, в-третьих, для

$$Q_{\varepsilon; n^0}^n = \sum_{i=0}^2 \left(\sum_{l=n_i^0}^{n_i-1} P_{\varepsilon, l}^i - \sum_{l=n_i}^{n_i^0-1} P_{\varepsilon, l}^i \right),$$

$n, n^0 \in \Lambda_\varepsilon$, выполнено $n - n^0 \in \Lambda \Rightarrow Q_{\varepsilon; n^0}^n \sim 0$. Сформулируем главную теорему данного раздела.

ТЕОРЕМА 3. Пусть дан набор $\{C^\varepsilon, C^{-\varepsilon}, P_{\pm 1, l}^i, \tau, \mathcal{D}_{\varepsilon; n^0}, \mathcal{D}_{-\varepsilon; n^0-\varepsilon(e_{s+1}+e_{s-1})}\}$ спектральных данных Λ -периодической задачи такой, что

$$-P_{n_{i+1}}^{\varepsilon, i+1} - P_{n_{i-1}}^{\varepsilon, i-1} + D_n^i + \tau(D_{n+\varepsilon e_s}^{1-i}) \sim \mathcal{K}, \quad (14)$$

где $n^0 \in \Lambda_\varepsilon$, $i, \varepsilon \in \mathbb{Z}$ фиксированы. Если выбрать ненулевые функции ψ квазипериодическим образом так, чтобы выполнялись условия

$$\psi(-\varepsilon \Upsilon + n) \in \mathcal{L}_{C^\varepsilon}(\mathcal{D}_{\varepsilon; n^0} + Q_{\varepsilon; n^0}^n), \quad (15)$$

$$\psi(\varepsilon \Upsilon + n') \in \mathcal{L}_{C^{-\varepsilon}}(\mathcal{D}_{n^0-\varepsilon(e_{s+1}+e_{s-1})}^{-\varepsilon} + Q_{-\varepsilon; n^0-\varepsilon(e_{s+1}+e_{s-1})}^{n'}), \quad (16)$$

где $n \in \Lambda_\varepsilon$, $n' \in \Lambda_{-\varepsilon}$, то существует единственный с точностью до пропорциональности оператор $L\psi = 0$ с периодом Λ .

Верно и обратное: спектральная кривая общего оператора L распадается на пару кривых: $C = C^{-1} \cup C^1$, и на этих кривых имеются дивизоры $\mathcal{D}_{\varepsilon; n^0}$, $\mathcal{D}_{-\varepsilon; n^0-\varepsilon(e_{s+1}+e_{s-1})}$, точки $P_{\pm 1, l}^i$ и отображение τ , образующие спектральные данные Λ -периодической задачи такие, что для дивизоров выполнено условие (14), а для бляховской функции ψ , нормированной условием $\psi(n^0) = \psi(n^0 - \varepsilon(e_{s+1} + e_{s-1})) = 1$, выполнены (15), (16).

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

4. ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим тройку операторов L, A^1, A^{-1} ,

$$(A^\varepsilon \psi)(n) = c(\varepsilon; n)\psi(n) + \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1} b(\varepsilon; n; \varepsilon_1, \varepsilon_2)\psi(n + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2),$$

операторы $A^{\pm 1}$ являются Λ -периодическими операторами. Следуя работе [10], будем изучать систему уравнений

$$\dot{L} = LA^{+1} - A^{-1}L, \quad (17)$$

которая эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a}(\varepsilon; n; s) = & \sum_{\varepsilon' = \pm 1} \varepsilon' \left(c \left(\varepsilon'; n + \frac{1 + \varepsilon'}{2} \varepsilon e_s \right) a(\varepsilon; n; s) + \right. \\ & \left. + \sum_{\varepsilon'' = \pm 1} a \left(\varepsilon' \varepsilon''; n + \frac{1 - \varepsilon'}{2} \varepsilon e_s; 3 - s \right) b \left(\varepsilon'; n + \frac{1 + \varepsilon'}{2} \varepsilon'' e_{3-s}; \varepsilon e_s - \varepsilon' \varepsilon'' e_{3-s} \right) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Условия совместности системы уравнений (17) имеют вид

$$\dot{a}(\varepsilon; n; s) = \dot{a}(-\varepsilon; n + \varepsilon e_s; s), \quad (19)$$

$$a(\varepsilon; n; s)b(1; n + \varepsilon e_s; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = a(\varepsilon; n + \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2; s)b(-1; n; \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad (20)$$

где в уравнении (20) $\varepsilon_s = \varepsilon$. Если добавить к уравнениям совместности уравнения

$$(X_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2})' = 0, \quad (21)$$

$$Q(\varepsilon; k_0) = g^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(t), \quad (22)$$

где

$$X_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \frac{A_{2\varepsilon_1 k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2, (3-\varepsilon_1)/2, -1+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1-1)/2}}{A_{2\varepsilon_1 k}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2, (3+\varepsilon_1)/2, 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+1)/2}},$$

$g^{\pm 1, \pm 1}$ — гладкие функции такие, что в нечетном случае $g^{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = -g^{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2}$,

$$Q(\varepsilon; k) = \frac{a(-\varepsilon_2; n; 2)}{a(\varepsilon_1; n; 1)}b(1; n - e_2; \varepsilon),$$

$k_0 \in \mathbb{Z}^2$ — некоторый фиксированный узел решетки, то коэффициенты b операторов $A^{\pm 1}$ будут однозначно определяться по коэффициентам оператора L . И несмотря на то что коэффициенты c операторов $A^{\pm 1}$ не определяются однозначно по коэффициентам оператора L , имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Система уравнений (18)–(22) совместна и определяет динамику на пространстве калибровочных инвариантов оператора L .

Калибровочные преобразования коэффициентов L имеют вид $a(\varepsilon; n; s) \rightarrow f(n) \times f(n + \varepsilon e_s) a(\varepsilon; n; s)$, где f – Λ -периодическая функция. Калибровочные инварианты L являются функциями от набора калибровочных инвариантов $X_k^{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$, $R(n) = a(1; n; 1) \times a(1; n + e_2) / a(1; n; 2) a(1; n + e_1; 2)$ (см., например, [8]). Теорема 4 доказывается непосредственной проверкой на этих инвариантах. В терминах калибровочных инвариантов уравнения (18)–(21) имеют вид

$$Q(\varepsilon; k) = Q(\varepsilon; k + \varepsilon e_1 - \varepsilon_2 e_2), \quad (23)$$

$$Q(\varepsilon; k) \mathcal{R}(\varepsilon; k) = Q(\varepsilon; k + \varepsilon) \mathcal{R}(\varepsilon; k + \varepsilon), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varepsilon; k) = \sum_{l=1}^{b_{2,2}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} R \left(k + l(\varepsilon_1 e_1 - \varepsilon_2) - \frac{\varepsilon_1 + 1}{2} e_1 + \frac{e_2 - 1}{2} e_2 \right) \times \\ \times \left(1 - R^{-1} \left(k + (l+1)(\varepsilon_1 e_1 - \varepsilon_2) - \frac{\varepsilon_1 + 1}{2} e_1 + \frac{e_2 - 1}{2} e_2 \right) \right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\ln R(n))' = \sum_{\substack{\varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1 \\ \varepsilon = 0, 1, s=1, 2}} \varepsilon' (3 - 2s) \left(Q(e_s - \varepsilon'' e_{3-s}; n + \varepsilon e_{3-s} + (s-1)(e_2 - \varepsilon'' e_1)) \times \right. \\ \times R \left(n + \varepsilon e_{3-s} + \frac{1 - \varepsilon'}{2} (e_s + \varepsilon'' e_{3-s}) + (s-1) \left(e_2 - \frac{\varepsilon'' + 1}{2} e_1 \right) + \right. \\ \left. + (s-2) \left(e_1 + \frac{\varepsilon'' + 1}{2} e_2 \right) \right) R^{s-1} \left(n - \frac{1 - \varepsilon''}{2} e_1 \right) + \\ + Q(-e_s - \varepsilon'' e_{3-s}; n + e_s + \varepsilon e_{3-s} + (s-1)(-e_2 + \varepsilon'' e_1)) \times \\ \times R \left(n + e_s + \varepsilon e_{3-s} + (s-1) \left(-2e_2 + \frac{3\varepsilon'' - 1}{2} e_1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1 - \varepsilon'}{2} (e_s + \varepsilon'' e_{3-s}) + (s-2) \frac{\varepsilon'' + 1}{2} e_2 \right) \times \\ \left. \times R^{s-1} \left(n - e_2 + \frac{\varepsilon'' - 1}{2} e_1 \right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Наиболее простой вид система (23)–(26) приобретает в случае, когда решетка Λ нечетна и $b_{1,1}^1 = b_{1,1}^{-1} = 1$. В этом случае из уравнений (22)–(24) следует $Q(\varepsilon; n) = Q(\varepsilon; n') = g^\varepsilon$ для любых n, n' . Если при этом g^ε – константы, то уравнение (26) будет иметь вид, сильно напоминающий одномерную систему Вольтерра, т.е. приведенная система, по всей видимости, является двумерным вариантом системы Вольтерра.

В случае треугольной решетки имеет место аналогичный результат: необходимо провести сходные рассуждения для тройки операторов L, A^{+1}, A^{-1} , где

$$(A^\varepsilon \psi)(-\varepsilon \Upsilon + \xi) = c(\xi) \psi(-\varepsilon \Upsilon + \xi) + \sum_{s_1 \neq s_2 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}} b(\varepsilon; \xi; s_1, s_2) \psi(-\varepsilon \Upsilon + \xi + e_{s_1} - e_{s_2}).$$

С помощью стандартной техники могут быть выписаны θ -функциональные формулы для собственной функции ψ и для коэффициентов операторов L , и дискретизацией формул из работы [4] могут быть получены θ -функциональные решения (которые в дискретном случае образуют всюду плотное множество в множестве всех решений) вышеприведенной системы уравнений.

Благодарности. В заключение я хотел бы поблагодарить профессора А. П. Веселова за постановку задачи и постоянное внимание к работе, А. В. Пенского за полезные обсуждения и рецензента, замечания которого позволили существенно улучшить изложение. Работа была поддержана грантами РФФИ № 98-01-01041 и INTAS № 96-0807.

Список литературы

- [1] А. Б. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1976. Т. 229. № 1. С. 15.
- [2] S. P. Novikov, A. P. Veselov. Physica D. 1986. V. 18. P. 267.
- [3] А. П. Веселов, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 784.
- [4] S. P. Novikov, A. P. Veselov. Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations. In: Solitons, Geometry, and Topology: On Crossroad. AMS Transl. Ser. 2. V. 179. Eds. V. M. Buchstaber et al. Providence, RI: AMS, 1997. P. 109.
- [5] И. М. Кричевер. ДАН СССР. 1985. Т. 285. № 1. С. 31.
- [6] A. P. Veselov, I. M. Krichever, S. P. Novikov. Two-dimensional periodic Schrödinger operators and Prym's θ -functions. In: Geometry of Today. Giornate di Geometria. Int. Conference (Rome, June 4–11, 1984). Progress in Math. V. 60. Eds. E. Arbarello, C. Procesi, E. Strickland. Boston: Birkhäuser, 1985. P. 283.
- [7] С. П. Новиков. УМН. 1997. Т. 52. № 1. С. 225.
- [8] С. П. Новиков, И. А. Дынный. УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 175.
- [9] А. Г. Хованский. Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 1. С. 51.
- [10] С. В. Манаков. УМН. 1977. Т. 32. № 6. С. 198.

Поступила в редакцию 10.X.2000 г.,
после доработки 13.XII.2000 г.