Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Завьялов, О нелинейных представлениях группы Лоренца в квантовой теории поля, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 1, 75–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:05:34

© 2001 г.

О. И. Завьялов*

О НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Формулы для нелинейного представления группы Лоренца обобщены на случай волновых функций вигнеровских частиц, траектории которых начинаются в точках фазового пространства с ненулевой координатой.

1. ВВЕДЕНИЕ

В нашей работе [1] показано, что требование, чтобы функция Вигнера, обобщенная на случай свободных частиц с “релятивистским” гамильтонианом $H(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, преобразовывалась при лоренцевых преобразованиях как истинная плотность распределения вигнеровских псевдочастиц в фазовом пространстве, приводит к нелинейному закону преобразования (если он существует) для “релятивистских” волновых функций. В двумерном пространстве-времени инфинитезимально (т.е. при бесконечно малых двумерных “бустах”) упомянутая нелинейность связана с тем обстоятельством, что при двумерном “бустировании” особым образом меняется на массовом гиперboloиде импульсная переменная γ для вигнеровских псевдочастиц, даже в том случае, когда соответствующая траектория исходит из точки с нулевой координатой $q = 0$, каковое условие, естественно, сохраняется и в результате “бустирования”. Именно такое специально редуцированное условие лоренц-инвариантности было использовано в [1]. В настоящей работе мы обобщаем формулу для нелинейных инфинитезимальных преобразований волновых функций на случай, когда траектория начинается в точке фазового пространства с ненулевой координатой q , т.е. когда q также меняется при двумерных “бустах”. Таким образом, утверждается, во-первых, что такие преобразования действительно существуют, а во-вторых, что новый закон преобразования учитывает теперь полную информацию о лоренц-инвариантности соответствующей функции Вигнера. Общий вид таких нелинейных инфинитезимальных преобразований (хотя и в несколько неявной форме) будет описан в нашей другой заметке. Чтобы испытать примененную технику на простом примере, мы сначала рассмотрим вопрос о правилах преобразования нерелятивистской волновой функции по отношению к группе Галилея.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Кроме того, мы приведем здесь новое координатное представление для нерелятивистской функции Вигнера и на этой основе передокажем главные свойства галилеевой версии $W_{\text{нер}}$ функции Вигнера. Будут построены глобальные преобразования волновых функций относительно этой группы. Мы обсудим также соответствующую программу действий применительно к группе Лоренца.

В статье [2] была построена функция $W(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t)$, которая, по-видимому, играет в “релятивистской” квантовой механике свободных частиц, т.е. частиц с гамильтонианом

$$H(\mathbf{p}) = \omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

ту же роль, что и известная функция Вигнера (см. [3] и [4]) для нерелятивистских свободных частиц, в которую она, собственно, и переходит при малых скоростях. Имеем

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \psi^*(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p} - (\mathbf{p}_1 \dot{+} \mathbf{p}_2)) \times \\ \times \exp\left(i(\omega(\mathbf{p}_1) - \omega(\mathbf{p}_2))t + i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\mathbf{q}\right), \quad (1)$$

где символ “ $\dot{+}$ ” обозначает специальную сумму на массовом гиперboloиде:

$$\mathbf{p}_1 \dot{+} \mathbf{p}_2 = m \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{\sqrt{2(m^2 + \omega(\mathbf{p}_1)\omega(\mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)}}, \quad (2)$$

$\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция частицы в импульсном представлении в нулевой момент времени.

Особо следует отметить, что координаты $\mathbf{q}$ входят в функцию Вигнера $W(\mathbf{p}, \mathbf{q}; 0)$, заданную формулой (1), только через стандартный фазовый множитель

$$E = \exp(i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\mathbf{q})$$

(мы будем называть его экспоненциальным координатным множителем), т.е., казалось бы, совершенно независимо от квантовой характеристики частицы – ее волновой функции. Мы увидим, однако, что квантовое описание и эта, так сказать, классическая трактовка функции Вигнера оказываются удивительным образом согласованными.

В пределе малых импульсов $\mathbf{p}_{1,2}$ мы приходим к знакомому нерелятивистскому выражению для функции Вигнера:

$$W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \psi^*(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) \delta\left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}\right) \times \\ \times \exp\left\{i\left(\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m}\right)t + i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)\mathbf{q}\right\}. \quad (3)$$

Эта величина может быть интерпретирована (см. обзор [5]) как “псевдоплотность” вероятностного распределения в шестимерном фазовом пространстве $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ для ансамбля свободных классических нерелятивистских частиц, соответствующих гамильтониану

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}.$$

Легко проверить, что средние значения $\overline{f(\mathbf{q})}$ и $\overline{\varphi(\mathbf{p})}$ функций $f(\mathbf{q})$ и $\varphi(\mathbf{p})$ по этому классическому ансамблю совпадают с соответствующими квантовыми матричными элементами:

$$\begin{aligned}\overline{f(\mathbf{q})} &= \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) f(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{q} \tilde{\psi}^*(\mathbf{q}, t) f(\hat{\mathbf{q}}) \tilde{\psi}(\mathbf{q}, t), \\ \overline{\varphi(\mathbf{p})} &= \int d\mathbf{p} d\mathbf{q} W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) \varphi(\mathbf{p}) = \int d\mathbf{p} \psi^*(\mathbf{p}, t) \varphi(\hat{\mathbf{p}}) \psi(\mathbf{p}, t),\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\psi}(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{q}} \psi(\mathbf{p}, t) \quad (4)$$

и

$$\psi(\mathbf{p}, t) = e^{-i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t} \psi(\mathbf{p}) \quad (5)$$

— волновые функции соответственно в координатном и импульсном представлениях в момент времени t . Более того, среднее значение функции $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ по этому классическому ансамблю совпадает с матричным элементом $\langle \hat{F}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}) \rangle$, где $\hat{F}$ — вейлевское квантование классической функции F .

Привлекательность вигнеровского подхода состоит, таким образом, именно в том, что квантовая эволюция и эволюция классического ансамбля тождественны. Однако эту тождественность не следует понимать слишком буквально: функция Вигнера не обязательно положительна. Это, собственно, мы и имели в виду, употребляя слово “псевдоплотность” вместо слова “плотность”.

Перечислим теперь главные свойства нерелятивистской функции Вигнера (3):

- 1) она билинейна по волновой функции $\psi(\mathbf{p})$;
- 2) после интегрирования функции $W_{\text{нер}}$ по координате $\mathbf{q}$ получается плотность вероятности в импульсном пространстве:

$$\psi^*(\mathbf{p}, t) \psi(\mathbf{p}, t) = \int d\mathbf{q} W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t); \quad (6)$$

- 3) после интегрирования функции $W_{\text{нер}}$ по импульсу $\mathbf{p}$ получается плотность вероятности в координатном пространстве:

$$\tilde{\psi}^*(\mathbf{q}, t) \tilde{\psi}(\mathbf{q}, t) = \int d\mathbf{p} W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t); \quad (7)$$

- 4) функция Вигнера допускает классический закон эволюции, имитирующий закон эволюции вероятностной плотности распределения свободных частиц в фазовом пространстве:

$$W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t + \tau) = W_{\text{нер}}\left(\mathbf{p}, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}}{m}\tau; t\right). \quad (8)$$

В работе [2] были доказаны аналоги этих равенств и для упомянутого релятивистского обобщения функции Вигнера. В следующем разделе мы передокажем эти свойства

в нерелятивистском случае на новой основе так называемого координатного представления для функции $W_{\text{нер}}$. Что касается уравнения (8), то его релятивистский аналог (см. [2]) имеет форму

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{x}; t + \tau) = W\left(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{\omega(\mathbf{p})}\tau; t\right). \quad (9)$$

Разумеется, ситуация с физической интерпретацией релятивистской функции W несколько не лучше, чем в нерелятивистском случае. Эта функция также может быть отрицательной. Далее, средние значения по классическому ансамблю для “смешанных” функций (зависящих одновременно от координат и импульсов) не имеют ничего общего с квантовыми матричными элементами, по крайней мере в рамках вейлевского квантования. Таким образом, если считать, что квантовая механика – это именно вейлевское квантование, то приходится признать, что подход, базирующийся на функции Вигнера (1), не имеет прямого отношения к релятивистской квантовой механике. С другой стороны, можно предполагать, что само усреднение по классическому ансамблю с (псевдо)вероятностью (1) определяет некий (вообще говоря, не обязательно вейлевский, но совпадающий с вейлевским на функциях, зависящих только от $\hat{\mathbf{p}}$ или только от $\hat{\mathbf{q}}$) способ упорядочения операторов $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{q}}$ в алгебре наблюдаемых, заданной этими образующими, так что рассматриваемая схема окажется просто одним из допустимых вариантов квантовой механики. Укажем здесь еще раз (см. [2]), что общие принципы классической механики требуют таких трансформационных свойств функции $W(\mathbf{p}, \mathbf{x}; t)$ по отношению к преобразованиям Лоренца, которые никоим образом не вытекают из общепринятого закона преобразования волновых функций. Это показывает также, что даже для случая свободных частиц несовместимость принципов квантовой механики со специальной теорией относительности, возможно, является более глубокой, чем обычно принято думать.

В настоящей работе мы попытаемся, однако, встать на противоположную точку зрения: мы попробуем найти такие преобразования волновых функций, которые приводят к “несофистицированным” “ожидаемым” трансформационным свойствам функции Вигнера (1). Мы, конечно, увидим опять, что такие преобразования с необходимостью являются нелинейными (они все-таки существуют), по крайней мере в двумерном пространстве-времени. Независимо от того, можно ли комбинацию функций (1) считать релятивистской функцией Вигнера, эта точка зрения кажется нам интересной по следующим причинам. Комбинация волновых функций (1) задает семейство траекторий воображаемых вигнеровских частиц, причем это совершенно не связано с наивной “псевдовероятностной” интерпретацией величины $W(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t)$. Каждая из этих траекторий порождает непрерывную последовательность каких-то (сейчас несущественно, каких именно) реальных событий в четырехмерном пространстве-времени. Четырехмерные координаты этих событий в любом случае должны меняться при изменении системы отсчета по стандартным законам Эйнштейна вне зависимости от того, имеет ли какой-нибудь смысл “простая” вигнеровская интерпретация (если только в теории свободных частиц вообще имеет смысл понятие “релятивистская волновая функция” и комбинацию $W(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t)$ в принципе можно измерить экспериментально). Если и впрямь

в упомянутых нелинейных преобразованиях есть какой-то физический смысл и они конкурентоспособны по отношению к обычным линейным преобразованиям, то они могут сыграть неожиданную и, вернее всего, разрушительную роль для стандартной квантовой теории поля. В частности, операторы $a^+(\mathbf{p})$ и $a(\mathbf{p})$ рождения и уничтожения частиц с импульсом $\mathbf{p}$, входящие в выражение для обычного поля

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega(\mathbf{k})} [a^+(\mathbf{k})e^{i\omega(\mathbf{k})x^0 - i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a(\mathbf{k})e^{-i\omega(\mathbf{k})x^0 + i\mathbf{k}\mathbf{x}}], \quad (10)$$

в рамках этой схемы изменят (непонятным пока образом) свои трансформационные свойства. Останется ли при этом $\varphi(x)$ скалярным полем? Если нет, то какой объект получит роль скалярного поля? Эти и другие “диссидентские” вопросы мы собираемся обсудить в последующих публикациях. Ниже мы ограничимся рассмотрением только двумерной модели пространства-времени. Нет никакого сомнения, однако, что наши выводы в общих чертах сохранятся и для четырехмерной теории, которой мы надеемся посвятить отдельную статью.

Скажем здесь еще раз, что, как известно, последовательная формулировка релятивистской квантовой механики возможна только для свободного гамильтониана (по существу, в свое время это и послужило главной причиной создания квантовой теории поля). Тем не менее именно свободные частицы играют в квантовой теории ключевую роль, определяя асимптотические in- и out-состояния. Поэтому вопрос об альтернативных подходах к структуре асимптотических свободных полей не является, быть может, для квантовой теории поля праздным.

2. ГРУППА ГАЛИЛЕЯ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В начале этого раздела выразим галилееву функцию Вигнера $W_{\text{нер}}$ через волновую функцию $\tilde{\psi}(\mathbf{q}, t)$ частицы в координатном представлении (4) и (5). С помощью преобразования Фурье, обратного к (4), выразим импульсные волновые функции через координатные и подставим соответствующие выражения в исходную формулу (3) для $W_{\text{нер}}$. После этого внутренние интегралы по $d\mathbf{p}_1$ и $d\mathbf{p}_2$ легко вычисляются. В результате останется лишь интеграл по координатным переменным. После простых замен получим в итоге

$$W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\boldsymbol{\rho} \tilde{\psi}^*\left(\mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, t\right) \tilde{\psi}\left(\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, t\right) e^{i\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}}. \quad (11)$$

В случае, когда пространство-время двумерно (т.е. его пространственная компонента одномерна), в формуле (11) изменится лишь численный множитель, а именно

$$W_{\text{нер}}(p, q; t) = \frac{1}{2\pi} \int d\rho \tilde{\psi}^*\left(q + \frac{\rho}{2}, t\right) \tilde{\psi}\left(q - \frac{\rho}{2}, t\right) e^{i p \rho}.$$

Формулу (11) мы будем называть координатным представлением функции Вигнера. Оно очень удобно для доказательства базовых свойств 1–4 нерелятивистской функции Вигнера.

Передокажем сначала формулу (7). В соответствии с (11) находим

$$\int d\mathbf{p} W_{\text{нер}} = \int d\boldsymbol{\rho} \delta(\boldsymbol{\rho}) \tilde{\psi}^* \left(\mathbf{q} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, t \right) \tilde{\psi} \left(\mathbf{q} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, t \right), \quad (12)$$

откуда и вытекает соотношение (7).

Что касается равенства (6), то находим

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{q} W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{q} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \psi^*(\mathbf{p}_1) \exp(-i\mathbf{p}_1 \mathbf{q} + i\mathbf{p}_2 \mathbf{q}) \psi(\mathbf{p}_2) \times \\ &\quad \times \exp \left(i \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} t - i \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} t - i\mathbf{p}_1 \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} - i\mathbf{p}_2 \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} + i\mathbf{p} \boldsymbol{\rho} \right) d\boldsymbol{\rho} = \\ &= \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \delta \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2} \right) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \exp \left(-i \frac{\mathbf{p}_1^2 - \mathbf{p}_2^2}{2} t \right) = \\ &= \psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрирование по $d\mathbf{q}$ и $d\boldsymbol{\rho}$ дает две δ -функции $\delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ и $\delta(\mathbf{p} - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2)$, которые и воспроизводят ожидаемый ответ $\psi^*(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p})$ (эта величина не зависит от времени t).

Наконец, убедимся, что функция $W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t)$ зависит только от комбинации $\mathbf{q} - \mathbf{p}t/m$. В самом деле, согласно равенству (11) и выражению координатных волновых функций через импульсные получаем

$$\begin{aligned} W_{\text{нер}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; t) &= \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\boldsymbol{\rho} \frac{1}{(2\pi)^6} \psi^*(\mathbf{p}_1) \psi(\mathbf{p}_2) \exp \left(i\mathbf{p}_2 \mathbf{q} - i\mathbf{p}_2 \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(-i\mathbf{p}_1 \mathbf{q} - i\mathbf{p}_1 \frac{\boldsymbol{\rho}}{2} \right) \exp(i\boldsymbol{\rho} \mathbf{p}) \exp \left\{ it \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1)}{2m} \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \delta \left(\mathbf{p} - \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left\{ i \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)t}{2m} \right\} \exp \left\{ i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \mathbf{q} \right\} = \\ &= W_{\text{нер}} \left(\mathbf{p}, \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p}}{m} t \right), \end{aligned} \quad (14)$$

что мы и хотели показать.

Группа Галилея в двумерном пространстве включает следующие преобразования: а) сдвиги по времени на величину τ , т.е. замены каждого события с временной и пространственной координатами (t, q) событием с координатами $(t + \tau, q)$; б) пространственные трансляции на вектор a , т.е. замены каждого события с координатами (t, q) событием с координатами $(t, q + a)$; в) переходы в подвижную систему отсчета, движущуюся в исходной с относительной скоростью $-v$, т.е. замены каждого события (t, q) событием $(t, q + vt)$; г) комбинации перечисленных преобразований. Поскольку с точки зрения классического ансамбля вигнеровских псевдочастиц состояние физической системы полностью задается ее начальным положением, то в качестве представителя такого может быть выбрана сама функция Вигнера в любой фиксированный момент времени (стандартно мы будем считать, что для этого используется нулевое время $t = 0$).

При любых преобразованиях симметрии величина $W_{\text{нер}}(p, q; 0)$ меняется по некоторому определенному закону

$$W_{\text{нер}}(p, q; 0) \rightarrow \widehat{W}_{\text{нер}}(p, q; 0), \quad (15)$$

в котором может быть, например, сохранена идея, что $W_{\text{нер}}$ — это псевдоплотность распределения псевдочастиц по фазовому пространству. Наша задача будет, таким образом, заключаться каждый раз в том, чтобы подобрать такое правило преобразования волновой функции, входящей в W , которое обеспечивало бы соотношение (15).

При временных трансляциях функция Вигнера меняется по правилу

$$W_{\text{нер}}(p, q; 0) \rightarrow W_{\text{нер}}^{\tau}(p, q; 0) = W_{\text{нер}}(p, q; \tau),$$

а при пространственных — по правилу

$$W_{\text{нер}}(p, q; 0) \rightarrow W_{\text{нер}}^a(p, q; 0) = W_{\text{нер}}(p, q + a; 0).$$

Как мы уже отмечали, и время, и координата входят в функцию Вигнера только через упомянутый выше координатный фазовый множитель, включенный в функцию Вигнера. Поэтому понятно, что при временных трансляциях на величину τ закон преобразования волновой функции ψ можно выбрать в виде

$$\psi(p) \rightarrow \psi^{\tau}(p) = \psi(p) \exp\left(-i \frac{p^2}{2m} \tau\right),$$

а при пространственных трансляциях на вектор a — в виде

$$\psi(p) \rightarrow \psi^a(p) = \psi(p) \exp(ipa).$$

Чтобы рассмотреть трансформационные свойства волновой функции по отношению к галилеевым бустам (т.е. к переходам к бесконечно медленным подвижным системам отсчета), введем преобразования Фурье фигурирующих здесь функций:

$$\widetilde{W}(\xi) = \int dp W(p) e^{ip\xi}, \quad (16)$$

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \int dp \psi(p) e^{ip\xi}. \quad (17)$$

В терминах этих фурье-преобразований и применительно к случаю двумерного пространства-времени наше базовое соотношение означает, что

$$\widetilde{W}(2\xi) = \frac{1}{2\pi} \widetilde{\psi}^*(-\xi) \widetilde{\psi}(\xi). \quad (18)$$

Это уравнение показывает, что при анализе его возможных решений существенную роль должна играть следующая инволюция $\hat{I}$ комплексных функций переменной ξ :

$$\hat{I}\psi(\xi) = \psi^*(-\xi).$$

Всякая комплексная функция $\psi(\xi)$ может быть однозначно разложена на симметричную (по отношению к этой инволюции) и антисимметричную части:

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2}[\psi(\xi) + \psi^*(-\xi)] + \frac{1}{2}[\psi(\xi) - \psi^*(-\xi)].$$

Симметричную часть функции мы будем называть квазивещественной, а антисимметричную – квазимнимой. Эта терминология кажется естественной, поскольку каждую квазивещественную функцию можно рассматривать как преобразование Фурье некоторой вещественной функции, а каждую квазимнимую функцию – как преобразование Фурье чисто мнимой. Всякую комплексную функцию $\psi(\xi)$ можно представить в виде “полярного разложения”

$$\psi(\xi) = \rho(\xi)e^{\phi(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) = \sqrt{\psi(\xi)\psi^*(-\xi)}$$

– это (квазивещественный) *квазимодуль*, а $\phi(\xi)$ – это (квазимнимая) *квазифаза* этой функции:

$$\phi(\xi) = \operatorname{arcth} \frac{\psi(\xi) - \psi^*(-\xi)}{\psi(\xi) + \psi^*(-\xi)}.$$

Если $\tilde{\psi}(\xi)$ – это некоторое решение уравнения (18), то величина

$$\tilde{\psi}_\phi(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)e^{\phi(\xi)}$$

тоже оказывается решением при любой квазифазе $\phi(\xi)$. Понятно, что этим и исчерпывается произвол в определении $\tilde{\psi}(\xi)$ через $\tilde{W}(\xi)$. Чтобы подготовить соответствующие выкладки, касающиеся группы Лоренца, рассмотрим трансформационные свойства волновой функции по отношению к переходам в подвижную систему отсчета в инфинитезимальной форме.

При галилеевом бусте, заданном (бесконечно малой) относительной скоростью $-v$, функция Вигнера меняется по правилу

$$W_{\text{нер}}(p, q; 0) \rightarrow W_{\text{нер}}^v(p, q; 0) = W_{\text{нер}}(p + mv, q; 0) \quad (19)$$

(в этом равенстве, разумеется, для нас существенны сейчас только члены порядка не выше первого по v). Для преобразования Фурье $\tilde{W}_{\text{нер}}$ функции Вигнера это означает, что

$$\tilde{W}_{\text{нер}}(\xi) \rightarrow \tilde{W}_{\text{нер}}^v(\xi) = \tilde{W}_{\text{нер}}(\xi)e^{-imv\xi}. \quad (20)$$

Уравнение (18) показывает, что соотношение (20) будет выполнено, если предположить, что при галилеевом бусте волновая функция $\tilde{\psi}$ претерпевает изменение

$$\tilde{\psi}(\xi) \rightarrow \tilde{\psi}^v(\xi) = \tilde{\psi}(\xi)[1 - i\xi mv] \quad (21)$$

(опять же с точностью только до младших порядков по v).

Действительно, с помощью (21) запишем аналогичное условие инвариантности еще и для величины $\tilde{\psi}^*(-\xi)$:

$$\tilde{\psi}^*(-\xi) \rightarrow \tilde{\psi}^{v*}(-\xi) = \tilde{\psi}^*(-\xi)[1 - i\xi m v]. \quad (22)$$

Теперь перемножим равенства (21) и (22), умножим результат на $1/2\pi$ и удержим в нем только члены нулевого и первого порядков по v . Получим

$$\widetilde{W}(2\xi) \rightarrow \widetilde{W}^v(2\xi) = \widetilde{W}(2\xi)[1 - 2i\xi m v]. \quad (23)$$

В нужном приближении этот ответ согласуется с условием (21) галилеевой инвариантности функции Вигнера. Получая его, мы не использовали упомянутый ранее произвол, связанный с возможным инфинитезимальным изменением квазифазы в волновой функции при галилеевом бусте. Иными словами, мы предположили, что любая квазивещественная волновая функция остается при “бустировании” квазивещественной. Как видно, такой выбор является самосогласованным, а сам ответ совпадает с общепринятым. Впрочем, для нас этот вывод полезен лишь тем, что позднее мы используем близкую технику для анализа трансформационных свойств волновой функции по отношению к группе Лоренца.

Чтобы восстановить глобальную формулу для преобразования волновой функции $\tilde{\psi}(\xi)$ при переходе в подвижную систему отсчета, движущуюся с конечной скоростью $-v$, обозначим результат такого преобразования $\tilde{\psi}(\xi|v)$. В силу условия (21) величина $\tilde{\psi}(\xi|v)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\tilde{\psi}(\xi|v)}{dv} = -i\xi m \tilde{\psi}(\xi|v).$$

Решение этого уравнения, отвечающее начальному условию

$$\tilde{\psi}(\xi|v) = \tilde{\psi}(\xi)$$

при $v = 0$, задается формулой

$$\tilde{\psi}(\xi|v) = \tilde{\psi}(\xi) \exp\{-im\xi v\}.$$

Возвращаясь с помощью обратного преобразования Фурье к исходной функции

$$\psi(p|v) = \frac{1}{2\pi} \int d\xi e^{-ip\xi} \tilde{\psi}(\xi|v),$$

получаем

$$\psi(p) \rightarrow \psi(p|v) = \psi(p + mv). \quad (24)$$

Конечно же, этот ответ также был вполне предвидим.

3. ФУНКЦИЯ ВИГНЕРА $W(p, q; t)$ В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ И МАЛЫЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ПОВОРОТЫ (БУСТЫ)

В следующем разделе мы попытаемся извлечь информацию о законе преобразования релятивистской волновой функции исходя из априорных “естественных” правил преобразования функции Вигнера при лоренцевых “бустах”. Сейчас же мы подробнее поговорим о том, какой закон преобразования $W(p, q, 0) \rightarrow \widehat{W}(p, q; 0)$ мы считаем “естественным”. Мы хотим здесь думать, что этот закон должен обеспечивать лоренц-инвариантность эволюции ансамбля вигнеровских частиц при его “бустировании” (т.е. замене его таким ансамблем, который с точки зрения исходной системы отсчета выглядит так же, как исходный ансамбль выглядит из системы отсчета, “повернутой” на соответствующий “обратный” бесконечно малый гиперболический угол). Пусть любое событие (t, x) , имеющее в исходной системе отсчета временную координату t и пространственную координату x , при “бустировании” превращается в событие $(\hat{t}, \hat{x})$, где

$$\hat{t} = t + q\nu, \quad \hat{x} = x + t\nu, \quad (25)$$

причем величина ν играет роль (релятивистской, хотя и бесконечно малой) скорости “бустирования”.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для лоренц-инвариантности динамической картины эволюции ансамбля вигнеровских псевдочастиц нужно, чтобы “бустированный” ансамбль описывался функцией Вигнера $\widehat{W}(p, q; 0)$:*

$$W(p, q; 0) \rightarrow \widehat{W}(p, q; 0) = W(\hat{p}, \hat{q}; 0), \quad (26)$$

где

$$\hat{p} = p + \omega(p)\nu, \quad \hat{q} = q \left[1 - \frac{p}{\omega(p)}\nu \right]. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы понять, как преобразуется функция Вигнера, следует сначала разобраться, каким способом в результате “бустирования” изменяются в фазовой плоскости при $t = 0$ координаты p и q , задающие начальное положение траектории свободной псевдочастицы. Пусть в исходной системе отсчета некоторая траектория соединяет два события (t_1, x_1) и (t_2, x_2) , причем очевидно, что

$$x_2 = x_1 + (t_2 - t_1) \frac{p}{\omega(p)}. \quad (28)$$

Ясно, что соответствующие “бустированные” события имеют в качестве двумерных координат следующие величины:

$$\hat{t}_1 = t_1 + x_1\nu, \quad \hat{x}_1 = x_1 + t_1\nu \quad (29)$$

и

$$\hat{t}_2 = t_2 + x_2\nu, \quad \hat{x}_2 = x_2 + t_2\nu. \quad (30)$$

Отрезок траектории, соединяющий упомянутые события в исходной системе отсчета, задается параметрически соотношениями

$$t = (1 - \tau)t_1 + \tau t_2, \quad x = (1 - \tau)x_1 + \tau x_2, \quad (31)$$

где параметр τ пробегает интервал $0 < \tau < 1$, а отрезок, соединяющий соответствующие “бустированные” события, — соотношениями

$$\hat{t} = (1 - \hat{\tau})\hat{t}_1 + \hat{\tau}\hat{t}_2, \quad \hat{x} = (1 - \hat{\tau})\hat{x}_1 + \hat{\tau}\hat{x}_2, \quad (32)$$

где параметр $\hat{\tau}$ заключен в интервале $0 < \hat{\tau} < 1$. Нулевой момент времени $t = 0$ согласно (31) отвечает значению параметра $\tau = \tau_0 = -t_1/(t_2 - t_1)$. При этом координата точки пересечения траектории с фазовой (p, q) -плоскостью при $t = 0$ равна

$$q = \frac{t_2 x_1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1} \quad (33)$$

(именно эта величина является одним из аргументов непреобразованной функции Вигнера). Что же касается “бустированной” (псевдо)частицы, то значение параметра $\hat{\tau}$, отвечающее времени, когда “бустированная” траектория попадает на интересную нам фазовую плоскость, задается соотношением

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_0 = \frac{t_1 + q_1 \nu}{(t_1 - t_2) + (q_1 - q_2) \nu}. \quad (34)$$

В этот момент “бустированная” частица “пронизывает” фазовую плоскость в точке

$$\hat{q} = q \left[1 - \nu \frac{p}{\omega(p)} \right], \quad (35)$$

что и является координатой, входящей в преобразованную функцию Вигнера. С другой стороны, понятно, что новая импульсная переменная возникает в соответствии с обычными преобразованиями Лоренца импульсов, т.е. равна

$$\hat{p} = p + \omega(p) \nu. \quad (36)$$

Таким образом, под воздействием “бустирования” каждой вигнеровской псевдочастицы ее траектория, помеченная на фазовой плоскости при $t = 0$ координатами p и q , переходит в траекторию, “пронизывающую” эту плоскость в точке с координатами $\hat{p}$ и $\hat{q}$. Естественно, плотность траекторий, т.е. функция Вигнера, подчиняется соответствующему индуцированному преобразованию. Тем самым утверждение доказано. Преобразования (29) другим способом были получены в работе [1] (где, однако, “бустирование” отвечало противоположному знаку относительной скорости двух систем отсчета).

4. ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Обращаясь к релятивистской квантовой механике свободных частиц в двумерном пространстве-времени, рассмотрим симметрии, сохраняющие лоренцев интервал между любыми парами событий. Как и в группе Галилея, такие симметрии включают, прежде всего, одномерные пространственные и временные трансляции, и они могут быть изучены примерно такими же методами, что и группа Галилея (т.е. через классическую картину, связанную с функцией Вигнера). Возникающие при этом ответы весьма сходны с уже полученными в разделе 2, а именно утверждается, что при временных трансляциях на величину τ волновая функция преобразуется по правилу

$$\psi(p) \rightarrow \psi^\tau = \psi(p)e^{-i\omega(p)\tau},$$

а при пространственных трансляциях на вектор a – по правилу

$$\psi(p) \rightarrow \psi^a = \psi(p)e^{ip^a}.$$

Нетривиальный ответ возникает только при рассмотрении чисто лоренцева вращения, имеющего неподвижную точку $t = 0$, $q = 0$ (все другие преобразования, сохраняющие интервал, могут рассматриваться как композиции таких вращений и пространственно-временных трансляций). Только этими нетривиальными лоренцевыми преобразованиями мы и будем в дальнейшем заниматься.

Опираясь на условия (26), (27) лоренц-инвариантности функции Вигнера $W(p, q; t)$, найдем правила, которые обеспечивали бы эту инвариантность, для входящих в W релятивистских волновых функций. Начнем с формул, связывающих в двумерном пространстве-времени величину $W(p, q; t)$ с квантово-механическими волновыми функциями в импульсном представлении, а именно с функциями $\psi(p)$ на массовом гиперboloиде, отнесенными к моменту $t = 0$. В работе [2] (см. там формулу (12)) было показано, что верно следующее соотношение:

$$W(p, q; t) = W(\text{sh } \gamma, q; t) = \frac{1}{\pi \text{ch } \gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \text{ch}(\gamma + \beta) \text{ch}(\gamma - \beta) \times \\ \times \psi^*(\text{sh}(\gamma + \beta)) \psi(\text{sh}(\gamma - \beta)) \exp \left\{ -2i \left[q - \frac{\text{sh } \gamma}{\text{ch } \gamma} t \right] \text{sh } \beta \text{ch } \gamma \right\}, \quad (37)$$

где положено $p \equiv \text{sh } \gamma$, $\psi(p) \equiv \psi(\text{sh } \gamma)$, $m = 1$. Мы воспользуемся этой формулой лишь затем, чтобы проиллюстрировать следующие два факта. Во-первых, из нее видно (на этот раз непосредственно), что переменные q и t входят в W только через упомянутый во введении экспоненциальный координатный множитель E , причем переменные q и t появляются именно в комбинации $(q - pt/\omega(p))$. Во-вторых, нетрудно убедиться, что хотя в принципе этот координатный множитель может меняться как в результате изменения координаты q , так и в результате изменения импульса p , но при $t = 0$ и при согласованном воздействии на W двух малых преобразований (27), связанных с “бустированием”

при относительной скорости $-\nu$, эти два изменения взаимно компенсируются, так что в целом множитель

$$\exp(-2iq \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \gamma) = \exp\{iq \operatorname{sh}(\gamma - \beta) - iq \operatorname{sh}(\gamma + \beta)\} \quad (38)$$

остается постоянным. В самом деле, при преобразовании (27) этот координатный множитель принимает вид

$$\begin{aligned} E(\nu) &= \exp\{-2i\hat{q} \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch}(\gamma + \nu)\} = \\ &= \exp\left\{-2iq \left(1 - \nu \frac{\operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch} \gamma}\right) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \gamma \left(1 + \nu \frac{\operatorname{sh} \gamma}{\operatorname{ch} \gamma}\right)\right\} \simeq E(0). \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, $\partial E/\partial \nu = 0$, и для вычисления малой вариации функции $W(p, q; 0)$ по отношению к преобразованиям (27) достаточно учитывать лишь вариацию импульсной переменной γ всюду вне координатного множителя.

Другая рабочая формула, уже использованная в [1] (там она процитирована также под номером (12)), имеет вид

$$\begin{aligned} W(\operatorname{sh} \gamma, q; 0) &= \frac{1}{2\pi \operatorname{ch} \gamma} \int d\gamma_1 d\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 \delta\left(\gamma - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right) \times \\ &\times \psi^*(\operatorname{sh} \gamma_1) \psi(\operatorname{sh} \gamma_2) \exp(iq \operatorname{sh} \gamma_2 - iq \operatorname{sh} \gamma_1) \end{aligned} \quad (40)$$

(равенство (37) при $t = 0$ и равенство (40) связаны заменой переменных $\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$, $\beta = (\gamma_1 - \gamma_2)/2$).

Для выяснения вида малых преобразований волновой функции при “бустировании” заметим, что общая структура искомым формул нам уже вчерне известна – в работе [1] она была получена из условия лоренц-инвариантности функции Вигнера при $q = 0$. Именно, в терминах фурье-преобразования

$$\tilde{\psi}(\xi) = \int e^{i\gamma\xi} \psi(\gamma) \operatorname{ch} \gamma d\gamma \quad (41)$$

искомый инфинитезимальный закон должен иметь вид

$$\tilde{\psi}(\xi) \rightarrow \tilde{\psi}^\nu(\xi) = \tilde{\psi}(\xi) - \nu \tilde{\Phi}(\xi) \tilde{\psi}(\xi), \quad (42)$$

где ν – это скорость бустирования, а функция $\tilde{\Phi}(\xi)$ может иметь произвольную квазимнимую составляющую $\tilde{A}(\xi)$, т.е. такую часть, что $\tilde{A}^*(-\xi) = -\tilde{A}(\xi)$, и фиксированную квазивещественную часть $\tilde{R}(\xi)$, т.е. такую часть, что $\tilde{R}^*(-\xi) = \tilde{R}(\xi)$:

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \tilde{R}(\xi) + \tilde{A}(\xi). \quad (43)$$

При этом

$$\tilde{R}(\xi) = \int d\eta \frac{1}{\widetilde{W}(2\xi)} \Delta(\xi - \eta) \widetilde{W}(2\eta) + i\xi. \quad (44)$$

Напомним, что здесь

$$\Delta(\xi) = \int \frac{d\gamma}{2\pi} \operatorname{th} \gamma e^{i\gamma\xi}. \quad (45)$$

Кроме того, $W(\gamma, q; t)$ – это функция Вигнера в момент времени t в точке фазового пространства q , $p = \operatorname{sh} \gamma$,

$$\widetilde{W}(\xi) = \int d\gamma W(\gamma, 0; 0) \operatorname{ch} \gamma e^{i\gamma\xi}. \quad (46)$$

Напомним также, что при любой квазимнимой части $\tilde{A}(\xi)$ функции $\tilde{\Phi}(\xi)$ и квазивещественной части $\tilde{R}(\xi)$ этой функции, удовлетворяющей соотношению (44), вигнеровская псевдоплотность $W(\gamma, 0; 0)$ преобразуется в соответствии с правилом

$$\widetilde{W}(\xi) \rightarrow \widetilde{W}^\nu(\xi) = \widetilde{W}(\xi)[1 - i\nu\xi] - \nu \int d\eta \Delta(\xi - \eta) \widetilde{W}(\eta). \quad (47)$$

В пересчете на исходную функцию $W(\gamma, 0; 0)$ закон (47) означает, что

$$W(\gamma, 0; 0) \rightarrow W^\nu = W(\gamma + \nu, 0; 0). \quad (48)$$

Таким образом, нам надлежит убедиться только в том, что квазимнимую функцию $\tilde{A}(\xi)$, фигурирующую в (43), удастся выбрать таким образом, что функция Вигнера $W(\gamma, q; 0)$ будет удовлетворять (инфинитезимально) полному условию лоренц-инвариантности, а именно условию

$$W(\gamma, q; 0) \rightarrow W^\nu(\gamma, q; 0) = W(\gamma + \nu, q; 0), \quad (49)$$

где неизменность переменной q на этот раз означает, что трансляции на величину ν подвергается только параметр γ вне экспоненциального координатного множителя E . Последнее обстоятельство и является ключевым для проверки выполнения общего условия лоренц-инвариантности функции Вигнера. Если при нулевой координате $q = 0$ координатный множитель E именно благодаря этому условию обращался в единицу и исключался из конкурентной игры, могущей оказать влияние на правила преобразования волновой функции, то теперь появились другие причины, выраженные условием (39), для нейтрализации влияния фактора E . Поэтому неудивительно, что основные черты инфинитезимально преобразованной волновой функции удастся получить из проведенного в работе [1] рассмотрения случая с нулевой координатой q . Так или иначе, мы утверждаем, что существуют такие (нелинейные) преобразования волновых функций, которые гарантируют выполнение полного условия лоренц-инвариантности функции Вигнера (49).

Тем не менее, по-видимому, полезно проследить подробно механизм реализации этого полного условия. Однако ввиду громоздкости соответствующих выкладок и некоторой неясности возникающего при этом конкретного рецепта вычисления упомянутой выше квазимнимой функции $\tilde{A}(\xi)$ мы обсудим этот принципиально важный расчет в отдельной публикации.

В заключение данного раздела обсудим возможный способ построения глобальных преобразований величин $\tilde{\psi}(\xi)$. Допустим, что несмотря на неэксплицитность определения функции $\tilde{A}(\xi)$ мы все же сумели найти эту функцию. Тогда по ней можно в принципе построить глобальные преобразования, отвечающие инфинитезимальным правилам (42). Это можно сделать, например, так же, как мы поступили в рассмотренной выше задаче применительно к группе Галилея. Именно, обозначим через $\tilde{\psi}(\xi|\nu_0)$ (глобально) преобразованную волновую функцию, отвечающую переходу к системе отсчета, которая движется относительно исходной со скоростью $-\nu_0$. Пользуясь инфинитезимальной формой, запишем следующую систему дифференциальных уравнений для функций $\tilde{\psi}(\xi|\nu)$:

$$\frac{d\tilde{\psi}(\xi|\nu)}{d\nu} = -\nu\tilde{\psi}(\xi|\nu)\tilde{\Phi}(\xi)$$

с начальным условием

$$\tilde{\psi}(\xi|0) = \tilde{\psi}(\xi).$$

Проинтегрировав соответствующее решение от 0 до ν_0 , мы и должны получить (опять же в принципе) искомое глобальное преобразование

$$\tilde{\psi}(\xi) \rightarrow \tilde{\psi}(\xi|\nu_0).$$

Благодарности. Я признателен Л. Д. Фаддееву за полезную критику. Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-00033, 99-01-0119D).

Список литературы

- [1] О. И. Завьялов. Тр. МИАН. 2000. Т. 228. С. 136.
- [2] О. И. Завьялов, А. М. Малюков. ТМФ. 1999. Т. 119. С. 67.
- [3] E. Wigner. Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
- [4] T. Newton, E. Wigner. Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 400.
- [5] В. И. Татарский. УФН. 1983. Т. 139. С. 587.

Поступила в редакцию 15.XI.2000 г.