Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Барбашов, В. Н. Первушин, Репараметризационно-инвариантная редукция в гамильтоновом описании релятивистской струны, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 1, 90–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:55:49

© 2001 г.

Б. М. Барбашов*, В. Н. Первушин*

РЕПАРАМЕТРИЗАЦИОННО-ИНВАРИАНТНАЯ РЕДУКЦИЯ В ГАМИЛЬТОНОВОМ ОПИСАНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

В рамках обобщенной гамильтоновой теории Дирака путем разрешения связей первого рода изучается времени-репараметризационно-инвариантная динамика релятивистской открытой струны. За репараметризационно-инвариантную эволюционную переменную выбирается временная координата “центра масс” струны. Координаты этого “центра масс” отделяются от локальных степеней свободы струны преобразованием, сохраняющим группу диффеоморфизмов обобщенного гамильтониана и пуанкаре-ковариантность локальных связей. Для идентификации временной координаты “центра масс” струны с собственным временем, измеряемым в сопутствующей системе координат, используется каноническое преобразование Леви-Чивита–Шанмугадхасана, которое конвертирует глобальную связь (массовую поверхность) в новый импульс так, что для редукции гамильтониана не требуется соответствующего калибровочного условия. Разрешение локальных связей ведет к эквивалентной редуцированной системе с гамильтонианом эволюции относительно собственного времени “центра масс” струны. Квантовая теория такой системы описывается с помощью метода квантования релятивистской струны Рорлиха, в котором участвуют только операторы Вирасоро L_n для $n > 0$. Все трудности традиционной схемы квантования, включая проблему размерности пространства-времени $D = 26$ и существования тахиона, возникают здесь только в случае безмассовой струны $M^2 = 0$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема гамильтоновой формулировки репараметризационно-инвариантных релятивистских систем (частица, струна, модели общей теории относительности (ОТО)) имеет длинную историю [1]–[8]. Такая формулировка основывается на выборе так называемой кинеметрической системы отсчета [9], представляющей собой расслоение пространственно-временного многообразия на множество пространственно-подобных гиперповерхностей, нанизанных на ось времени. Соответствующая параметризация метрики была введена независимо Дираком [10], Арновитом, Дезером, Мизнером (АДМ) [11] и Зельмановым [12]. Группа диффеоморфизмов кинеметрической системы отсчета содержит абелеву подгруппу репараметризации координатного времени.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия

Изначально этот подход развивался Дираком для обобщенной гамильтоновой формулировки гравитации [6] с целью отделения физического сектора переменных на поверхности связей от “лишних” переменных, ответственных за калибровочный произвол. Такое отделение физического сектора переменных называется редукцией.

Все известные описания релятивистской струны [13], [14] основаны на редуцировании фазового пространства путем наложения калибровочных условий, которые с самого начала нарушают репараметризационную инвариантность теории. В этой связи представляет интерес выяснить, насколько такое описание адекватно репараметризационно-инвариантной “истинной” динамике исходной свободной струны и можно ли описать эту динамику непосредственно в терминах репараметризационно-инвариантных переменных. Рассмотрению этих проблем и посвящена данная работа.

Нами используется метод репараметризационно-инвариантного описания, развитый для теории гравитации в работах [3], [5], [15]. Он основан на редуцировании действия путем разрешения первичных связей так, что одна из переменных исходного расширенного фазового пространства “выпадает” из физического пространства, превращаясь в эволюционный параметр редуцированной системы, а ее канонически сопряженный импульс становится гамильтонианом системы. Применение такого инвариантного редуцирования расширенного действия в ОТО позволяет формулировать динамику системы в терминах собственного времени, инвариантного относительно репараметризации, с ненулевым гамильтонианом эволюции. В п. 2.3 статьи приводится простой пример такой редукции.

Важным элементом инвариантной редукции является каноническое преобразование Леви-Чивита–Шанмугадхасана (ЛЧШ) [16], [17], которое линейризует энергетическую связь, превращая ее в новый импульс (раздел 4). Этот метод применяется для редукции действия релятивистской струны при описании ее динамики с помощью репараметризационно-инвариантного собственного времени.

Раздел 2 посвящен обобщенному гамильтонову формализму релятивистской струны и постановке проблемы. В разделе 3 переменные локальных возбуждений струны отделяются от координат “центра масс”. В разделе 4 ЛЧШ-преобразование применяется для разрешения глобальной связи и введения временной переменной “центра масс” как собственного времени глобального движения всей системы. В разделе 5 динамика локальных возбуждений струны описывается в терминах этого времени. Там же формулируется квантовая теория такой системы. В разделе 6 строится производящий функционал для функции Грина релятивистской струны.

2. ОБОБЩЕННЫЙ ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ

2.1. Система со связями. Рассмотрим функцию действия бозонной релятивистской струны в форме [18]

$$W = -\frac{\gamma}{2} \int d^2 u \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu, \quad u_\alpha = (u_0, u_1), \quad (1)$$

где x_μ – координаты струны в пространстве Минковского с метрикой $(x_\mu x^\mu := x_0^2 - x_i^2)$,

а $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор в двумерном римановом пространстве мировой поверхности струны.

Построение гамильтоновой динамики базируется на АДМ-представлении двумерной метрики в форме [1]

$$g_{\alpha\beta} = \Omega^2 \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - \lambda_2^2 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{-g} = \Omega^2 \lambda_1, \quad (2)$$

с инвариантным интервалом

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = \Omega^2 [\lambda_1^2 d\tau^2 - (d\sigma + \lambda_2 d\tau)^2], \quad u_\alpha = (u_0 = \tau, u_1 = \sigma), \quad (3)$$

где λ_1 и λ_2 — известные в ОТО функция смещения и вектор сдвига [19], [20], Ω — конформный фактор, который после подстановки (3) в (1) не входит в действие

$$W = -\frac{\gamma}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \left[\frac{(D_\tau x)^2}{\lambda_1} - \lambda_1 x'^2 \right]. \quad (4)$$

Здесь

$$D_\tau x_\mu = \dot{x}_\mu - \lambda_2 x'_\mu \quad (\dot{x} = \partial_\tau x, \quad x' = \partial_\sigma x) \quad (5)$$

— ковариантная производная относительно метрики (3), которая, так же как действие (4), оказывается инвариантной относительно преобразования параметров τ и σ (см. приложение)

$$\tau \Rightarrow \tilde{\tau} = f_1(\tau), \quad \sigma \Rightarrow \tilde{\sigma} = f_2(\tau, \sigma). \quad (6)$$

Такая группа преобразований в гамильтоновом подходе хорошо известна как группа кинеметрических диффеоморфизмов ОТО [9].

Вариация действия (4) по λ_1 и λ_2 ведет к уравнениям

$$\frac{\delta W}{\delta \lambda_2} = \frac{x' D_\tau x}{\lambda_1} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\dot{x} x'}{x'^2}, \quad \frac{\delta W}{\delta \lambda_1} = \frac{(D_\tau x)^2}{\lambda_1^2} + x'^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{(\dot{x} x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}{(x'^2)^2}. \quad (7)$$

Из них можно определить величины λ_1 и λ_2 , подстановка которых в действие (4) приводит его к стандартной форме Намбу–Гото [21]

$$W = -\gamma \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \sqrt{(\dot{x} x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}.$$

Обобщенная гамильтонова форма действия получается из лагранжевой (4) путем преобразования Лежандра [8]

$$\begin{aligned} W &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma (-p_\mu D_\tau x^\mu + \lambda_1 \phi_1) = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma (-p_\mu \dot{x}^\mu + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\phi_1 = \frac{1}{2\gamma}[p_\mu^2 + (\gamma x'_\mu)^2], \quad \phi_2 = x'^\mu p_\mu, \quad (9)$$

а обобщенный гамильтониан

$$\mathcal{H} = \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \quad (10)$$

рассматривается как генератор эволюции этой системы относительно временного параметра τ . При этом λ_1, λ_2 рассматриваются как канонические переменные с нулевыми импульсами

$$P_{\lambda_1} = 0, \quad P_{\lambda_2} = 0 \quad (11)$$

и, следовательно, — как первичные связи первого рода [6], [8]. Уравнения для λ_1 и λ_2

$$\frac{\delta W}{\delta \lambda_1} = \phi_1 = 0, \quad \frac{\delta W}{\delta \lambda_2} = \phi_2 = 0 \quad (12)$$

известны как вторичные связи первого рода. Гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\frac{\delta W}{\delta x^\mu} = \dot{p}_\mu - \partial_\sigma [\gamma \lambda_1 x'_\mu + \lambda_2 p_\mu] = 0, \quad \frac{\delta W}{\delta p^\mu} = p_\mu - \gamma \frac{D_\tau x_\mu}{\lambda_1} = 0. \quad (13)$$

Таким образом, проблема состоит в нахождении таких решений уравнений (13) и связей (12), которые инвариантны относительно кинеметрических преобразований (6).

2.2. Метод фиксирования калибровки. Стандартным методом решения такой системы со связями является фиксирование связей второго рода (условий калибровки), которые добавляются к связям первого рода (11) и (12). Например, в теории релятивистской струны выбираются следующие связи (ортонормальная калибровка):

$$\chi_1^{(1)} = \lambda_1 = 1, \quad \chi_2^{(1)} = \lambda_2 = 0, \quad (14)$$

которые, конечно, сразу нарушают кинеметрическую симметрию (6) (см. приложение).

В этом случае классические уравнения движения (13) сводятся к линейным уравнениям Даламбера для координат струны x_μ ,

$$\partial_\tau^2 x_\mu - \partial_\sigma^2 x_\mu = 0, \quad (15)$$

дополненным определенными граничными условиями. Выбирая случай свободной открытой струны, для которой граничными условиями являются условия $x'(\tau, \sigma_{1,2}) = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \pi$, для решения уравнения (15) имеем [14]

$$x_\mu(\tau, \sigma) = X_\mu(\tau) + \xi_\mu(\tau, \sigma) = Q_\mu + \frac{P_\mu}{\pi\gamma} \tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} [\psi_\mu(\tau + \sigma) + \psi_\mu(\tau - \sigma)], \quad (16)$$

где ψ_μ — периодические функции с периодом 2π , представимые рядами Фурье

$$\psi_\mu(z) = i \sum_{n \neq 0} \exp(-inz) \frac{\alpha_{n\mu}}{n}, \quad \alpha_{-n,\mu} = \alpha_{n,\mu}^*. \quad (17)$$

Величина $X_\mu(\tau) = Q_\mu + \tau P_\mu / \pi\gamma$ задает координату “центра масс” струны, определяя ее равномерное движение как целого:

$$X_\mu(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma x_\mu(\tau, \sigma). \quad (18)$$

Переменные ξ_μ являются координатами локальных возбуждений струны, не содержащих нулевых фурье-гармоник,

$$\int_0^\pi d\sigma \xi_\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} \int_0^\pi d\sigma [\psi_\mu(\tau + \sigma) + \psi_\mu(\tau - \sigma)] = 0. \quad (19)$$

Полный импульс струны P_μ и функция ψ_μ подчиняются вторичным связям первого рода (12),

$$\phi_1 \pm \phi_2 = 0 \Rightarrow [\underline{P}_\mu + \psi'_\mu(\tau \pm \sigma)]^2 = 0, \quad \underline{P}_\mu = \frac{P_\mu}{\sqrt{\pi\gamma}} = \alpha_{0\mu}. \quad (20)$$

Эти связи, записанные через ряды Фурье (17),

$$\phi_1 \pm \phi_2 = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} L_n \exp(-iz_\pm n) = 0 \quad (z_\pm = \tau \pm \sigma), \quad (21)$$

приводят к условиям на коэффициенты L_n ,

$$L_0 = -\frac{P^2}{2} + \bar{L}_0 = 0, \quad L_{n \neq 0} = -\underline{P}_\mu \alpha_n^\mu + \bar{L}_n = 0, \quad (22)$$

в которых величины $\bar{L}_n$ не содержат вкладов от нулевых гармоник $\alpha_{0\mu} = \underline{P}_\mu$,

$$\bar{L}_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \alpha_{k\mu} \alpha_{-k}^\mu, \quad \bar{L}_{n \neq 0} = -\frac{1}{2} \sum_{k \neq 0, n} \alpha_{k\mu} \alpha_{n-k}^\mu. \quad (23)$$

Как видно из первого равенства (22), $\bar{L}_0$ определяет массу струны ($P_\mu^2 = M^2$)

$$M^2 = -2\pi\gamma \bar{L}_0 = -\frac{\gamma}{2} \int_0^\pi d\sigma [(\psi'_\mu(z_+))^2 + (\psi'_\mu(z_-))^2]. \quad (24)$$

В квантовой теории фурье-коэффициенты L_n (22) образуют алгебру Вирасоро с конформной аномалией [13], [14].

Вторичные связи первого рода (20), как было упомянуто выше, при стандартном подходе дополняются калибровочными условиями (первичные связи второго рода), например, в форме [7], [14]

$$\chi_1^{(2)} = n_\mu \xi^\mu = 0, \quad \chi_2^{(2)} = n_\mu \pi^\mu = 0, \quad (25)$$

где n_μ – произвольный времениподобный вектор (алгебра связей $\chi_{1,2}^{(2)}$, $\phi_{1,2}$ дана, например, в работе [7]).

Таким образом, в приведенном выше стандартном подходе к динамике релятивистской струны обнаруживается, во-первых, что решение (16) выражается через репараметризационно-инвариантное координатное время τ , которому соответствует благодаря (12) нулевой гамильтониан (10), и, во-вторых, что связи (20) смешивают глобальное движение (полный импульс струны P_μ) с локальными координатами возбуждений струны ξ_μ . Это противоречит релятивистской инвариантности внутренних степеней свободы [22].

В этой связи естественно возникают некоторые вопросы. Возможно ли введение репараметризационно-инвариантной временной переменной вместо инвариантного параметра τ ? Возможно ли построить ненулевой гамильтониан, описывающий эволюцию координаты “центра масс” струны и какова связь эволюции “центра масс” с унитарным представлением группы Пуанкаре [22]?

2.3. Простой пример инвариантной редукции гамильтониана. Для прояснения ответов на поставленные выше вопросы рассмотрим простой пример времени-репараметризационно-инвариантной классической системы, для которой инвариантная гамильтонова редукция осуществляется путем прямого разрешения связей [3],

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p\dot{q} - \Pi_0 \dot{Q}_0 - \lambda[-\Pi_0 + H(p, q)]), \quad (26)$$

где $-\Pi_0 + H(p, q)$ является расширенным гамильтонианом, а действие (26) инвариантно относительно репараметризации временного параметра τ ,

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau'(\tau), \quad \lambda \rightarrow \lambda' = \lambda \frac{d\tau}{d\tau'}. \quad (27)$$

Инвариантная гамильтонова редукция этой расширенной системы означает разрешение следующих трех уравнений, полученных вариацией (26) относительно “лишних” степеней свободы:

$$\frac{\delta W}{\delta \lambda} = -\Pi_0 + H(p, q) = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\delta W}{\delta \Pi_0} = 0 \Rightarrow \frac{dQ_0}{d\tau} = \lambda, \quad (29)$$

$$\frac{\delta W}{\delta Q_0} = \frac{d\Pi_0}{d\tau} = 0. \quad (30)$$

Мы называем эти три уравнения геометрическим сектором расширенного фазового пространства. Из уравнения (28) следует, что $\Pi_0 = H(p, q) > 0$, уравнение (29) определяет $Q_0 = \int^\tau \lambda(\tau') d\tau'$ как репараметризационно-инвариантную эволюционную переменную, которую отождествляют с наблюдаемым (собственным) временем $Q_0 = t$. Уравнение (30) дает закон сохранения.

Подстановка этих решений в исходное действие (26) редуцирует его к обычной форме

$$W = \int_{t(\tau_1)=t_1}^{t(\tau_2)=t_2} dt \left(p \frac{dq}{dt} - H(p, q) \right) \quad (31)$$

в терминах собственного времени t и ненулевого гамильтониана $H(p, q)$. Таким образом, действие (31) на связях (28)–(30) есть действие в редуцированном фазовом пространстве переменных (p, q) с временем t и ненулевым гамильтонианом. Это действие отличается от полученного с помощью фиксации калибровки $\lambda = 1$, $\tau = t$ прежде всего определением времени, а также ненулевым гамильтонианом эволюции

$$\lambda[-\Pi_0 + H(p, q)] \neq H(p, q). \quad (32)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (31) совпадают с инвариантным сектором уравнений исходной системы (26). Далее мы применим метод инвариантной гамильтоновой редукции к релятивистской струне, проверяя на каждом шагу эквивалентность редуцированной системы уравнениям исходной системы и отделяя координаты “центра масс”.

3. ОТДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ “ЦЕНТРА МАСС” СТРУНЫ

Любая протяженная система допускает отделение координат ее центра масс. Для введения репараметризационно-инвариантного времени в теории релятивистской струны по аналогии с введенным в предыдущем разделе временем $t = Q_0$ и нахождения переменных, уравнение для которой идентично уравнению (29), рассмотрим координаты центра масс струны, определенные согласно (18) в общем случае (без наложения калибровки (14)) следующим образом:

$$X_\mu(\tau) = \frac{1}{l(\tau)} \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma x_\mu(\tau, \sigma), \quad l(\tau) = \sigma_2(\tau) - \sigma_1(\tau). \quad (33)$$

Как будет показано в дальнейшем (см. ниже формулы (55), (59)), именно временная координата (33) и будет этим временем. Чтобы выразить уравнения движения в терминах этого времени, нам необходимо отделить координаты “центра масс” струны от локальных координат $\xi_\mu(\tau, \sigma)$ в действии (4). После подстановки в (4) выражения

$$x_\mu(\tau, \sigma) = X_\mu(\tau) + \xi_\mu(\tau, \sigma) \quad (34)$$

оно принимает вид

$$W = -\frac{\gamma}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left\{ \frac{\dot{X}^2 l(\tau)}{N_0(\tau)} + 2\dot{X}_\mu \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{D_\tau \xi^\mu}{\lambda_1} + \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \left(\frac{(D_\tau \xi)^2}{\lambda_1} - \lambda_1 \xi'^2 \right) \right\}, \quad (35)$$

где глобальная функция смещения $N_0(\tau)$ определена как функционал от $\lambda_1(\tau, \sigma)$ выражением

$$\frac{1}{N_0[\lambda_1]} = \frac{1}{l(\tau)} \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{1}{\lambda_1(\tau, \sigma)}. \quad (36)$$

Из определения координаты центра масс (33) и равенства (34) следует, что локальные координаты удовлетворяют условию

$$\int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \xi_\mu = 0 \quad (37)$$

(см. (19)). Построение канонического формализма предполагает такое же отделение импульса центра масс из сопряженных импульсов p_μ , определяемых уравнениями (13). Если подставить в эти уравнения выражение (34), получим

$$p_\mu(\tau, \sigma) = \gamma \left(\frac{\dot{X}_\mu(\tau)}{\lambda_1} + \frac{D_\tau \xi_\mu(\tau, \sigma)}{\lambda_1} \right). \quad (38)$$

Определяя полный импульс струны P_μ , как и координату (33),

$$P_\mu = \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma p_\mu(\tau, \sigma) = \gamma \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \left(\frac{\dot{X}_\mu(\tau)}{\lambda_1} + \frac{D_\tau \xi_\mu(\tau, \sigma)}{\lambda_1} \right), \quad (39)$$

с учетом (36) найдем

$$P_\mu = \gamma \frac{\dot{X}_\mu l}{N_0(\tau)} + \gamma \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{D_\tau \xi_\mu(\tau, \sigma)}{\lambda_1}, \quad (40)$$

следовательно, должно выполняться равенство

$$\int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{D_\tau \xi^\mu}{\lambda_1} = \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \pi_\mu(\tau, \sigma) = 0. \quad (41)$$

Это разделение переменных на уровне действия (35) сохраняет группу диффеоморфизмов обобщенного гамильтониана и ведет к обобщенному действию типа Дирака–Бергмана, где переменные центра масс X_μ , P_μ отделены от локальных степеней свободы ξ^μ и π_μ , которые формируют массу и спин струны. Это действие имеет вид

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\left(\int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma [-\pi_\mu D_\tau \xi^\mu - \lambda_1 \mathcal{H}] \right) - P_\mu \dot{X}^\mu + N_0 \frac{P_\mu^2}{2\bar{\gamma}} \right], \quad \bar{\gamma} = \gamma l(\tau), \quad (42)$$

где $\mathcal{H}$ – гамильтониан локальных возбуждений струны

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\gamma} [\pi_\mu^2 + (\gamma \xi'_\mu)^2]. \quad (43)$$

Вариация действия (42) по λ_1 приводит к уравнению

$$\frac{\delta W}{\delta \lambda_1} = \mathcal{H} - \left(\frac{1}{l(\tau) \bar{\lambda}(\tau, \sigma)} \right)^2 \frac{P_\mu^2}{2\gamma} = 0. \quad (44)$$

При выводе этого уравнения из выражения (36) вычисляется вариация функционала

$$\frac{\delta N_0[\tau|\lambda_1]}{\delta \lambda_1} = \frac{\delta}{\delta \lambda_1} \left[\frac{l(\tau)}{\int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{1}{\lambda_1(\tau, \sigma)}} \right] = \frac{l(\tau)}{\left[\lambda_1(\tau, \sigma) \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{1}{\lambda_1(\tau, \sigma)} \right]^2} = \frac{N_0^2}{l \lambda_1^2}$$

и вводится инвариантная относительно репараметризации $\tau \rightarrow f(\tau)$ функция смещения

$$\bar{\lambda}_1(\tau, \sigma) = \frac{\lambda_1(\tau, \sigma)}{N_0(\tau)}. \quad (45)$$

В соответствии с нашим разделением динамических переменных на глобальные и локальные необходимо спроектировать связь первого рода (44) на глобальный сектор (нулевые фурье-гармоники) и локальный сектор. Глобальная часть связи может быть получена из (44) либо ее умножением на $\bar{\lambda}_1(\tau, \sigma)$ и последующим интегрированием по σ , либо (что дает тот же результат) вариацией действия (42) по глобальной функции смещения N_0 . В результате получаем связь

$$\frac{\delta W}{\delta N_0} = \frac{P_\mu^2}{2\bar{\gamma}} - H = 0, \quad H = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \bar{\lambda}_1 \mathcal{H}, \quad (46)$$

которая выражает массу струны $P_\mu^2 = M^2$ через гамильтониан локальных степеней свободы H . Локальная часть связи (44) получается подстановкой P_μ^2 из (46) в (44),

$$\bar{\lambda}_1 \mathcal{H} - \frac{1}{l\bar{\lambda}_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \bar{\lambda}_1 \mathcal{H} = 0. \quad (47)$$

Интегрирование (47) по σ приводит к тождеству, если учесть определения N_0 в (36) и $\bar{\lambda}_1$ в (45),

$$\frac{1}{l(\tau)} \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{1}{\bar{\lambda}_1} = \frac{1}{l(\tau)} \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \frac{N_0(\tau)}{\bar{\lambda}_1(\tau, \sigma)} = 1. \quad (48)$$

Таким образом, локальная часть связи (47) определена в классе функций ненулевых фурье-гармоник, как и локальные величины в (37) и (41).

Теперь мы можем представить действие (42) с учетом соотношения (47) в эквивалентной форме

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[- \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \pi_\mu D_\tau \xi^\mu - P_\mu \dot{X}^\mu + N_0 \left(\frac{P_\mu^2}{2\bar{\gamma}} - H \right) \right], \quad (49)$$

где глобальная функция смещения N_0 и локальная $\bar{\lambda}_1$ рассматриваются как независимые вариационные переменные с учетом нормировки (48) после выполнения вариации.

Из (49) следует, что динамика локальных степеней свободы струны π_μ и ξ^μ , которые принадлежат классу функций (37) и (41), описывается уравнениями (13), в которых x_μ , p_μ надо заменить на ξ_μ , π_μ , и связями первого рода (первичными и вторичными)

$$\pi_\mu \xi'^\mu = 0, \quad \bar{\lambda}_1 \mathcal{H} - \frac{1}{l\bar{\lambda}_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \bar{\lambda}_1 \mathcal{H} = 0. \quad (50)$$

Результатом отделения переменных “центра масс” в (49) явилось то, что связи (50) не содержат полный момент струны P_μ в противоположность стандартным связям (20).

Поэтому возникает вопрос: когда необходимо отделять координаты “центра масс” струны – до вариации функции действия, как сделано здесь, или после, в уравнениях движения? Релятивистская инвариантность диктует первый способ, поскольку наблюдатель, находящийся в системе “центра масс”, не может измерять полный импульс струны.

Далее, локальные связи первого рода (50) могут быть дополнены связями второго рода (25)

$$\bar{\lambda}_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad n_\mu \xi^\mu = 0, \quad n_\mu \pi^\mu = 0, \quad (51)$$

где n_μ – времениподобный вектор. Если выбрать в качестве такого вектора полный импульс струны P_μ , то получим с учетом глобальной связи (50) калибровку Рорлиха [23], которая обсуждается в рамках нашего подхода в п. 5.3. После подстановки первых двух связей (51) функция действия (49) становится функцией действия на поверхности локальных связей

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \pi_\mu \dot{\xi}^\mu - P_\mu \dot{X}^\mu + N_0 \left(\frac{P_\mu^2}{2\bar{\gamma}} - H \right) \right]. \quad (52)$$

Отсюда следуют уравнения движения исходной системы для локальных переменных π_μ , ξ_μ , а также глобальная связь (46), разрешая которую относительно P_0 , получаем

$$\frac{\delta W}{\delta N_0} = 0 \Rightarrow P_0 = \pm \sqrt{P_i^2 + 2\bar{\gamma}H}.$$

Вариация действия (52) по P_0 и X_0 дает уравнения

$$\frac{\delta W}{\delta P_0} = -\frac{dX_0}{d\tau} + N_0 \frac{P_0}{\bar{\gamma}} = 0, \quad \frac{\delta W}{\delta X_0} = 0 \Rightarrow \frac{dP_0}{d\tau} = 0,$$

приводящие к инвариантному относительно репараметризации τ определению X_0 как времени “центра масс” струны, измеряемому наблюдателем в покоящейся системе координат,

$$dX_0 = N_0(\tau) \frac{P_0}{\bar{\gamma}} d\tau. \quad (53)$$

Теперь из (52) с учетом этих равенств мы получаем редуцированное действие на поверхности глобальных (46) и локальных (50) связей

$$W_\pm = \int_{X_0(\tau_1)}^{X_0(\tau_2)} dX_0 \left[\int_{\sigma_1(X_0)}^{\sigma_2(X_0)} d\sigma \pi_\mu \frac{d\xi^\mu}{dX_0} + P_i \frac{dX_i}{dX_0} \mp \sqrt{P_i^2 + 2\bar{\gamma}H} \right], \quad (54)$$

записанное в терминах измеряемого в покоящейся системе отсчета времени X_0 и с нулевым гамильтонианом эволюции. Однако действие (54) ведет к нелинейным уравнениям движения для локальных переменных π_μ , ξ_μ . Для преодоления этой трудности мы прибегнем к каноническому преобразованию, которое, в частности, дает описание системы в терминах собственного времени для координаты “центра масс” струны.

4. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕВИ-ЧИВИТА

Преобразование $(P_\mu, X_\mu) \Rightarrow (\Pi_\mu, Q_\mu)$ [16], [17], [24], определяемое формулами

$$\Pi_0 = \frac{1}{2\bar{\gamma}}(P_0^2 - P_i^2), \quad \Pi_i = P_i, \quad Q_0 = X_0 \frac{\bar{\gamma}}{P_0}, \quad Q_i = X_i - X_0 \frac{P_i}{P_0}, \quad (55)$$

позволяет превратить глобальную связь (46) в новый импульс $\Pi_0 = H$, а временную компоненту “центра масс” X_0 , заданную равенством (53), перевести во временную координату $dQ_0 = N_0(\tau) d\tau$, которую будем называть собственным временем “центра масс”. Из формул (55) “старые” импульсы P_μ и координаты X_μ выражаются через “новые” следующим образом:

$$\begin{aligned} P_0 &= \pm \sqrt{2\bar{\gamma}\Pi_0 + \Pi_i^2}, & P_i &= \Pi_i, \\ X_0 &= \pm Q_0 \frac{\sqrt{2\bar{\gamma}\Pi_0 + \Pi_i^2}}{\bar{\gamma}}, & X_i &= Q_i + Q_0 \frac{\Pi_i}{\bar{\gamma}}, \end{aligned} \quad (56)$$

что дает возможность записать расширенное действие (49) в новых переменных (ср. (26))

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[- \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \pi_\mu D_\tau \xi^\mu - \Pi_\mu \dot{Q}^\mu + N_0(\Pi_0 - H) - \frac{d}{d\tau}(Q_0 \Pi_0) \right]. \quad (57)$$

Для глобальных переменных Q_0, Π_0 редукция гамильтониана означает, как и в простом примере п. 2.3, разрешение связи (46) относительно компоненты импульса Π_0

$$\frac{\delta W}{\delta N_0} = 0 \Rightarrow \Pi_0 = H, \quad (58)$$

а варьирование действия по Π_0

$$\frac{\delta W}{\delta \Pi_0} = 0 \Rightarrow \frac{dQ_0}{d\tau} = N_0(\tau)$$

определяет новую переменную Q_0 как собственное время “центра масс” струны t с точностью до размерного фактора

$$\sqrt{\gamma}t = Q_0 = \int^\tau d\bar{\tau} N_0(\bar{\tau}). \quad (59)$$

Уравнение для Q_0 , как и в (32), приводит к закону сохранения

$$\frac{\delta W}{\delta Q_0} = 0 \Rightarrow \frac{d\Pi_0}{d\tau} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dH}{dt} = 0. \quad (60)$$

Таким образом, из (57) получаем аналогично (27) редуцированное действие для струны в терминах собственного времени t , глобальных переменных Q_i, Π_i и локальных переменных ξ_i, π_i ,

$$W^R = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[- \int_{\sigma_1(t)}^{\sigma_2(t)} d\sigma \pi_\mu D_t \xi^\mu + \Pi_i \frac{dQ_i}{dt} - H - \frac{d}{dt}(tH) \right], \quad (61)$$

где по аналогии с (45) введен факторизованный “вектор смещения” $\lambda_2 = N_0(\tau)\bar{\lambda}_2(\tau, \sigma)$, а ковариантная производная (5) при переходе от τ к t определена равенством

$$D_t \xi^\mu = \partial_t \xi^\mu - \bar{\lambda}_2 \xi'^\mu = \frac{D_\tau \xi^\mu}{N_0}. \quad (62)$$

Редуцированная система (61) имеет тривиальное решение для глобальных переменных Q_i, Π_i

$$\frac{\delta W^R}{\delta Q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d\Pi_i}{dt} = 0, \quad \frac{\delta W^R}{\delta \Pi_i} = 0 \Rightarrow \frac{dQ_i}{dt} = 0, \quad (63)$$

которые теперь согласно (55) должны рассматриваться как начальные данные для X_i и P_i , поскольку, подставляя решения (58), (59) и (63) в (56) с учетом глобальной связи (46), имеем

$$P_0 = \pm \sqrt{M^2 + P_i^2}, \quad X_0(t) = \frac{P_0}{\sqrt{\gamma}l}t, \quad X_i(t) = Q_i + t \frac{P_i}{\sqrt{\gamma}l}. \quad (64)$$

Эти формулы устанавливают связь между координатами системы покоя, в которой наблюдатель измеряет полную энергию струны P_0 и время X_0 , а также изменение координат “центра масс” струны X_i со временем X_0

$$X_i(X_0) = Q_i + X_0 \frac{P_i}{P_0}, \quad (65)$$

с координатами схемы Леви-Чивита (t, H, Π_i, Q_i) , в которой t есть время сопутствующей “центра масс” системы отсчета, Π_i и Q_i оказываются циклическими переменными.

5. ДИНАМИКА ЛОКАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

5.1. Репараметризационно-инвариантная редукция для открытой струны. Рассмотрим открытую струну с граничными условиями

$$\sigma_1(\bar{\tau}) = 0, \quad \sigma_2(\bar{\tau}) = \pi, \quad l(\bar{\tau}) = \pi, \quad \xi'_\mu(t, 0) = \xi'_\mu(t, \pi) = 0. \quad (66)$$

Фиксируя калибровку, как в (51), положим

$$\bar{\lambda}_1(\tau, \sigma) = 1, \quad \bar{\lambda}_2(\tau, \sigma) = 0, \quad (67)$$

что не противоречит условию нормировки функции смещения $\bar{\lambda}_1$ (48). В результате из (50) имеем

$$\mathcal{H} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \mathcal{H} = 0, \quad \pi_\mu \xi'^\mu = 0. \quad (68)$$

Первое равенство в (68) означает, что редуцированная плотность гамильтониана $\mathcal{H}$ (46) совпадает с самим гамильтонианом H/π . Уравнения для локальных переменных, получаемые варьированием редуцированного действия (61),

$$\frac{\delta W^R}{\delta \xi^\mu} = 0 \Rightarrow \partial_t \pi_\mu - \partial_\sigma (\bar{\lambda}_2 \pi_\mu) = \gamma \partial_\sigma (\bar{\lambda}_1 \xi'_\mu), \quad \frac{\delta W^R}{\delta \pi^\mu} = 0 \Rightarrow \gamma D_t \xi_\mu = \bar{\lambda}_1 \pi_\mu, \quad (69)$$

при условии (67) снова приводят к линейному уравнению Даламбера (15), где теперь временной параметр τ заменяется на собственное время “центра масс” t ,

$$\partial_t^2 \xi_\mu - \partial_\sigma^2 \xi_\mu = 0. \quad (70)$$

Общее решение этих уравнений движения для ξ_μ и π_μ в классе функций (37), (41) с границей (66) дается фурье-рядами (17)

$$\begin{aligned} \xi_\mu(t, \sigma) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} [\psi_\mu(z_+) + \psi_\mu(z_-)], \quad \psi_\mu(z) = i \sum_{n \neq 0} e^{-in\sigma} \frac{\alpha_{n\mu}}{n}, \quad z_\pm = t \pm \sigma, \\ \xi'_\mu(t, \sigma) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} [\psi'_\mu(z_+) - \psi'_\mu(z_-)], \quad \pi_\mu(t, \sigma) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} [\psi'_\mu(z_+) + \psi'_\mu(z_-)]. \end{aligned} \quad (71)$$

Глобальные координаты Q_μ и импульсы P_μ определены редуцированной динамикой “центра масс” (63)–(65), а масса струны M определяется глобальной связью (46),

$$P_\mu^2 = M^2 = 2\pi\gamma H = 2\pi\gamma \int_0^\pi d\sigma \mathcal{H}. \quad (72)$$

Подстановка ξ_μ и π_μ из (71) в (43) приводит к представлению плотности гамильтониана $\mathcal{H}$ через функции $\psi'_\mu(z_\pm)$,

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} [\psi'^2_\mu(z_+) + \psi'^2_\mu(z_-)],$$

а из (72) получаем для квадрата массы струны выражение, совпадающее с (24).

Из локальных связей (68), записанных в терминах функций $\psi'_\mu(z_\pm)$, через которые выражаются ξ'_μ и π^μ в (71), имеем

$$\begin{aligned} \xi'_\mu \pi^\mu &= \frac{1}{4\pi} [\psi'^2_\mu(z_+) - \psi'^2_\mu(z_-)] = 0 \Rightarrow \psi'^2_\mu(\tau + \sigma) = \psi'^2_\mu(\tau - \sigma), \\ \psi'^2_\mu(z_+) + \psi'^2_\mu(z_-) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma [\psi'^2_\mu(\tau + \sigma) + \psi'^2_\mu(\tau - \sigma)], \end{aligned} \quad (73)$$

откуда следует, что квадрат модуля вектора $\psi'_\mu(z)$ есть величина постоянная, т.е. $\psi'^2_\mu(z) = \text{const}$. Из формулы (72) вытекает, что эта постоянная задается величиной

$$\psi'^2_\mu(z) = -\frac{M^2}{\pi\gamma}. \quad (74)$$

Таким образом, функции $\psi_\mu(z)$ подчиняются условию

$$P_\mu^2 + \pi\gamma\psi'^2_\mu(z_\pm) = 0 \quad (P_\mu^2 = M^2), \quad (75)$$

в отличие от связи (20) в стандартном подходе

$$(P_\mu + \sqrt{\pi\gamma}\psi'_\mu)^2 = 0. \quad (76)$$

Уравнение (76) содержит интерференционный член глобальной и локальных степеней свободы $\sqrt{\pi\gamma}\psi'_\mu(z)P^\mu$, который нарушает релятивистскую инвариантность локальных возбуждений струны, формирующих ее массу и спин.

Связи (75) и (76) совпадают только для калибровки Рорлиха [23] в стандартном подходе, когда вместо произвольного времениподобного вектора n_μ в (51) выбирается полный импульс струны P_μ .

Из условия (75) следует, что вектор ψ'_μ – пространственноподобный, постоянного модуля, а вектор P_μ – времениподобный. При $M = 0$ оба этих вектора становятся изотропными (светоподобными). Связь (75) в терминах коэффициентов Фурье (71) принимает следующий вид:

$$\psi'^2_\mu(z) = \sum_{n,m \neq 0} \alpha_{n\mu} \alpha^\mu_m e^{-i(n+m)z} = \sum_N e^{-iNz} \sum_{n \neq 0, N} \alpha_{n\mu} \alpha^\mu_{N-n} = -\frac{M^2}{\pi\gamma}. \quad (77)$$

На уровне величин $\bar{L}_n$, введенных в стандартном формализме (23), репараметризационно-инвариантная связь (77) означает, что ее нулевая гармоника $\bar{L}_0$, определяющая массу струны,

$$\bar{L}_0 = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \alpha_{n\mu} \alpha^\mu_{-n} = -2\pi\gamma M^2, \quad (78)$$

осталась той же самой, как и в случае с фиксацией калибровки, в то время как ненулевые гармоники $\bar{L}_{N \neq 0}$ связи (77)

$$\bar{L}_{N \neq 0} = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq 0, N} \alpha_{n\mu} \alpha^\mu_{N-n} = 0, \quad \bar{L}_{-N} = \bar{L}_N^* \quad (79)$$

существенно отличаются от связей с фиксацией калибровки (20) тем, что они не содержат глобального импульса струны $P_\mu = \sqrt{\pi\gamma}\alpha_{0\mu}$ (суммы в (78) и (79) не содержат $\alpha_{0\mu}$). Другими словами, нулевые моды $\alpha_{0\mu}$, т.е. импульсы “центра масс” P_μ , входят в нашем подходе только в глобальную (энергетическую) связь (72) $P_\mu^2 = M^2$, где масса струны задается суммой вкладов внутренних возбуждений струны в (78), в то время как (79) связывает только коэффициенты Фурье этих внутренних возбуждений $\alpha_{n,\mu}$ при $n \neq 0$.

Как уже отмечалось выше, связи (75), а следовательно, и (78), (79) возникают и в стандартном подходе (см. (76)), если воспользоваться калибровочным условием Рорлиха [23], в котором вместо произвольного вектора n_μ в (51) используется полный импульс струны P_μ [14],

$$P_\mu x^\mu(\tau, \sigma) = \frac{P_\mu^2}{\pi\gamma} \tau + P_\mu Q^\mu, \quad P_\mu x'^\mu = 0. \quad (80)$$

Отсюда с учетом вида решения для $x_\mu(\tau, \sigma)$ в (16) имеем

$$P_\mu \psi_\mu(z_\pm) = 0, \quad (81)$$

и, следовательно, условия (75) и (76) становятся эквивалентными.

Однако отличие калибровочного подхода от репараметризационно-инвариантного связано с определением временной координаты и соответствующего генератора эволюции (т.е. гамильтониана). В репараметризационно-инвариантном подходе собственное время t возникает из динамической переменной “центра масс” струны X_0 в результате канонического преобразования Леви-Чивита и явного решения глобальной связи (см. (55))

$$X_0(t) = \frac{P_0}{\pi\sqrt{\gamma}}t.$$

Гамильтониан эволюции относительно собственного времени не равен нулю в методе инвариантной редукции (61). В то же время в калибровочном подходе роль параметра эволюции играет безразмерное координатное время τ , которое на классических решениях задает эволюцию всех переменных, в частности

$$X_0(\tau) = \frac{P_0}{\pi\gamma}\tau,$$

однако с нулевым дираковским гамильтонианом.

В нашем подходе калибровка Рорлиха (81) означает, что

$$P_0\psi_0(z) = 0 \Rightarrow P_0\alpha_{n,0} = 0, \quad n \neq 0, \quad (82)$$

и при $P_0 = M \neq 0$ все временные фурье-компоненты $\alpha_{n,0} = 0$ для $n \neq 0$ (это эквивалентно кулоновской калибровке $A_0 = 0$ в электродинамике). Окончательно локальные связи определяются выражениями $\bar{L}_{N \neq 0} = 0$, т.к.

$$\psi_i'^2(z) = \frac{M^2}{\pi\gamma} \Rightarrow M^2 = \pi\gamma \sum_{n \neq 0} \alpha_{n,i} \alpha_{n,i}^*, \quad \bar{L}_N = \sum_{n \neq 0, N} \alpha_{n,i} \alpha_{N-n,i} = 0, \quad (83)$$

которые вместе с $\bar{L}_0$ образуют замкнутую алгебру скобок Пуассона

$$\{\bar{L}_N, \bar{L}_M\} = -i(N-M)\bar{L}_{N+M}. \quad (84)$$

5.2. Квантовая теория. Рассмотрим на операторном уровне предложенную выше гамильтонову динамику открытой релятивистской струны с возникающими в ней связями первого рода (50), (79) и второго рода (82), которая, как было отмечено, соответствует подходу Рорлиха. Заметим, что условие (82) позволяет исключить состояния с отрицательной нормой, поскольку постулируемые коммутационные соотношения

$$[\alpha_{m,\mu}, \alpha_{n,\mu}^+] = -m\eta_{\mu,\nu}\delta_{m,n}, \quad n, m \neq 0, \quad \eta_{00} = \eta_{ii} = 1, \quad (85)$$

приводят для временных компонент $\alpha_{n,0}^+$ при их действии на вакуум к векторам состояния с отрицательной нормой. Имея теперь только пространственные компоненты операторов рождения и уничтожения $a_{n,i}^+ = \alpha_{-n,i}\sqrt{n}$, $a_{n,i} = \alpha_{n,i}\sqrt{n}$, можно в системе “центра масс” построить нормированный вектор состояния [23]

$$|\Phi_\nu\rangle_{\text{цм}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a_{nx}^+)^{\nu_{nx}}}{\sqrt{\nu_{nx}!}} \frac{(a_{ny}^+)^{\nu_{ny}}}{\sqrt{\nu_{ny}!}} \frac{(a_{nz}^+)^{\nu_{nz}}}{\sqrt{\nu_{nz}!}} |0\rangle, \quad (86)$$

где числа $\nu_{nx}, \nu_{ny}, \nu_{nz}$ принимают неотрицательные целые значения. Этот вектор состояния автоматически удовлетворяет условию

$$a_{n,0}|\Phi_\nu\rangle_{\text{цм}} = 0, \quad n > 0, \quad (87)$$

а также связям (78), (79), налагаемым на него только для $N > 0$,

$$\bar{L}_N|\Phi_\nu\rangle_{\text{цм}} = 0, \quad N > 0, \quad M_\nu^2 = \pi\gamma \left\langle \Phi_\nu \sum_{n \neq 0} \alpha_{n,i} \alpha_{n,i}^+ \middle| \Phi_\nu \right\rangle, \quad (88)$$

поскольку оператор $\bar{L}_N$ для $N > 0$ может быть всегда представлен в нормальной форме

$$\bar{L}_{N>0} = \sum_{n>0}^{\infty} \alpha_{n,i}^+ \alpha_{N+n,i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \alpha_{n,i} \alpha_{N-n,i}.$$

Оператор $\bar{L}_N$ для $N < 0$ согласно (79) является эрмитово сопряженным к $\bar{L}_N$, $\bar{L}_{-N}^+ = \bar{L}_N$, и поэтому вместо первого равенства (88) для него будет выполняться равенство

$$\langle \Phi_\nu | \bar{L}_N^+ = 0.$$

Таким образом, нам необходимо рассмотреть алгебру операторов $\alpha_{n,0}$ (для $n > 0$) и $\bar{L}_N$ (для $N > 0$), обращающих в нуль вектор состояния аналогично квантовой электродинамике, где условие Лоренца $\partial A_\mu^{(-)} / \partial x_\mu |\Phi\rangle = 0$ содержит только аннигилирующую часть вектор-потенциала. Эти операторы согласно классификации Дирака [8] дают связи первого рода, образуя замкнутую алгебру (только для $n, N > 0$),

$$[\alpha_{n,0}, \alpha_{n,0}] = 0, \quad [\alpha_{n,0}, \bar{L}_N] = n\alpha_{N+n,0}, \quad [\bar{L}_N, \bar{L}_M] = (N - M)\bar{L}_{N+M}. \quad (89)$$

Поэтому условия (87) и (88) оказываются самосогласованными в противоположность общепринятому рассмотрению, когда при произвольных N, M последний коммутатор в (89) содержит c -числовой член,

$$[\bar{L}_N, \bar{L}_M] = (N - M)\bar{L}_{N+M} + \frac{D}{12}N(N^2 - 1)\delta_{N,-M},$$

а второй коммутатор в (89) при $n + N < 0$ содержит в правой части оператор рождения $\alpha_{-N-n,0}^+$.

Итак, на операторном уровне связи разрешаются в слабом смысле, и только “аннигилирующая” часть операторов налагается на вектор состояния.

В квантовой теории можно ввести полный набор собственных (осцилляторных) функций, удовлетворяющих уравнению

$$H[\pi_i, \xi_i] \langle \xi | \nu \rangle = \frac{M_\nu^2}{2\pi\gamma} \langle \xi | \nu \rangle, \quad (90)$$

где

$$\langle \xi | \nu \rangle = \langle \xi | \Phi_\nu \rangle, \quad \sum_\nu \langle \xi_1 | \nu \rangle \langle \nu | \xi_2 \rangle = \prod_\sigma \delta^3(\xi_1 - \xi_2).$$

6. ПРИЧИННЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Мы можем построить причинные функции Грина для релятивистской струны по аналогии со случаем релятивистской частицы с массой M_ν [22],

$$\begin{aligned} G_c(X|\nu) &= G_+(X|\nu)\theta(X_0) + G_-(X|\nu)\theta(-X_0) = \\ &= i \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \exp(-iPX) \frac{1}{P^2 - M_\nu^2 - i\epsilon}, \end{aligned} \quad (91)$$

где $G_+(X|\nu) = G_-(-X|\nu)$ – коммутативная функция Грина [22]

$$G_+(X|\nu) = \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^3} \exp(-iPX) \delta(P^2 - M_\nu^2) \theta(P_0). \quad (92)$$

Последняя может быть представлена в форме функционального интеграла по полному фазовому пространству P_μ, X_μ [15]

$$\begin{aligned} G_+(X|\nu) &= \int_{X(\tau_1)=0}^{X(\tau_2)=X} \frac{dN_0(\tau_2) d^4 P(\tau_2)}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \prod_{\tau_1 \leq \tau < \tau_2} \left\{ d\bar{N}_0(\tau) \prod_\mu \left(\frac{dP_\mu(\tau) dX_\mu(\tau)}{2\pi} \right) \right\} \exp(iW[P, X, N_0, M_\nu]), \end{aligned} \quad (93)$$

где $\bar{N}_0 = N_0/2\pi\delta(0)$, $\delta(0) = \int dN_0$ есть бесконечный объем группы репараметризации координатного времени и

$$W[P, X, N_0, M_\nu] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[-P_\mu \dot{X}^\mu - \frac{N_0}{2\pi\gamma} (-P_\mu^2 + M_\nu^2) \right] \quad (94)$$

есть расширенное действие для релятивистской механики [3], [15] в гамильтоновой форме.

Причинную функцию Грина для релятивистской струны (типа Венециано) естественно определить как спектральное разложение по физическим векторам состояния $|\Phi_\nu\rangle = |\nu\rangle$,

$$\begin{aligned} G_c(X|\xi_1, \xi_2) &= G_+(X|\xi_1, \xi_2)\theta(X_0) + G_-(X|\xi_1, \xi_2)\theta(-X_0) = \\ &= i \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \exp(-iPX) \sum_\nu \frac{\langle \xi_1|\nu\rangle \langle \nu|\xi_2\rangle}{P^2 - M_\nu^2 - i\epsilon}, \end{aligned} \quad (95)$$

где $\langle \xi|\nu\rangle$ – решения уравнения (90).

Коммутативные функции Грина для релятивистской струны $G_+(X|\xi_1, \xi_2)$ могут быть переписаны в форме функционального интеграла Фаддеева–Попова [25] в калибровке (51) (где $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$)

$$\begin{aligned} G_+(X|\xi_2, \xi_1) &= \int_{X(\tau_1)=0}^{X(\tau_2)=X} \frac{dN_0(\tau_2) d^4 P(\tau_2)}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \prod_{\tau_1 \leq \tau < \tau_2} \left\{ d\bar{N}_0(\tau) \prod_\mu \left(\frac{dP_\mu(\tau) dX_\mu(\tau)}{2\pi} \right) \right\} F_+(\xi_2, \xi_1). \end{aligned} \quad (96)$$

Используя представление спектрального разложения

$$F_+(\xi_2, \xi_1) = \sum_{\nu} \langle \xi_2 | \nu \rangle \exp\{iW[P, X, N_0, M_\nu]\} \langle \nu | \xi_1 \rangle, \quad (97)$$

функцию F_+ в (96) можно записать в виде функционального интеграла

$$F_+(\xi_2, \xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} D(\xi, \pi) \Delta_{\Phi\Pi} \exp\{iW_{\Phi\Pi}\}, \quad (98)$$

где $W[P, X, N_0, M_\nu]$ есть действие (94),

$$W_{\Phi\Pi} = \int_0^{\tau(X_0)} d\tau \left[- \left(\int_0^\pi d\sigma \pi_\mu \dot{\xi}^\mu \right) - P_\mu \dot{X}^\mu - N_0 \left(-\frac{P^2}{2\pi\gamma} + H^R \right) \right] \quad (99)$$

есть действие на поверхности связи (50),

$$D(\xi, \pi) = \prod_{\tau, \sigma} \prod_{\mu} \frac{d\xi_\mu d\pi_\mu}{2\pi} \quad (100)$$

и

$$\Delta_{\Phi\Pi} = \prod_{\tau, \sigma} \delta(\phi_1) \delta(\pi_0) \delta(\phi_2) \delta(\xi_0) \det B^{-1}, \quad \det B = \det\{\phi_1, \phi_2, \pi_0, \xi_0\} \quad (101)$$

есть детерминант Фаддеева–Попова [7].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Репараметризационно-инвариантная редукция в гамильтоновом описании динамики релятивистской струны проводилась путем введения собственного времени “центра масс” струны и соответствующего ему ненулевого гамильтониана эволюции, определение которых возможно в рамках схемы Арновита–Дезера–Мизнера и связанной с ней группой диффеоморфизмов гамильтонова описания. Для репараметризационно-инвариантного описания необходимым являлось отделение в расширенном действии координаты “центра масс” струны в противоположность стандартному подходу, где отождествление этих координат происходит уже в самих решениях уравнений движения.

Результатом отделения переменных “центра масс” на уровне действия явилось то, что инвариантные локальные связи не содержали полный момент струны, в противоположность связям в стандартном калибровочном подходе. Поэтому возникает вопрос: когда необходимо отделять переменные “центра масс” струны – до вариации функции действия, как сделано в этой статье, или после, в уравнениях движения? Релятивистская инвариантность диктует первый способ, поскольку наблюдатель, находящийся в системе “центра масс”, не может измерять полный импульс струны.

Нами показано, что существует калибровка Рорлиха, для которой эти два подхода ведут к одному и тому же результату. Репараметризационно-инвариантное описание

свободно от трудностей подхода Рорлиха для введения взаимодействия. Этому вопросу будет посвящена отдельная работа.

Локальные связи не зависят от глобальных переменных (“центра масс”) и отличаются от стандартных тем, что в квантовом случае ведут к новой алгебре для операторов, которая не содержит трудностей, характерных для алгебры Вирасоро (включая ограничение $D = 26$). Причинная функция Грина релятивистской струны сконструирована в форме интеграла Фаддеева–Попова.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кинеметрические преобразования дифференциалов

$$\tilde{\tau} = \dot{f}_1(\tau) d\tau, \quad d\tilde{\sigma} = \dot{f}_2(\tau, \sigma) d\tau + f'_2(\tau, \sigma) d\sigma$$

соответствуют преобразованиям координат струны

$$\begin{aligned} x_\mu(\tau, \sigma) &= \tilde{x}_\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}), & x'_\mu(\tau, \sigma) &= \tilde{x}'_\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) \dot{f}_2'(\tau, \sigma), \\ \dot{x}_\mu(\tau, \sigma) &= \dot{\tilde{x}}_\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) \dot{f}_1(\tau) + \tilde{x}'_\mu(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) \dot{f}_2(\tau, \sigma). \end{aligned}$$

Из этих соотношений с учетом уравнений (7) можно вывести трансформационные законы для λ_1 и λ_2

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau, \sigma) &= \frac{\sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}}{x'^2(\tau, \sigma)} = \frac{\sqrt{(\dot{\tilde{x}}\tilde{x}')^2 - \dot{\tilde{x}}^2 \tilde{x}'^2}}{\tilde{x}'^2(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})} \frac{\dot{f}_1}{f'_2} = \tilde{\lambda}_1 \frac{\dot{f}_1(\tau)}{f'_2(\tau, \sigma)}, \\ \lambda_2(\tau, \sigma) &= \frac{\dot{x}x'}{x'^2} = \frac{(\dot{\tilde{x}}\tilde{x}')\dot{f}_1 f'_2 + \tilde{x}'^2 \dot{f}_2 f'_2}{\tilde{x}'^2 f'^2_2} = \tilde{\lambda}_2 \frac{\dot{f}_1}{f'_2} + \frac{\dot{f}_2}{f'_2}. \end{aligned}$$

Из этих трансформационных законов и преобразований конформного фактора $\Omega(\tau, \sigma) = f'_2(\tau, \sigma) \tilde{\Omega}(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$ следует кинеметрическая инвариантность интервала (3) относительно преобразований (6). Ковариантная производная (5) преобразуется при учете (6) как

$$D_\tau x_\mu = \dot{x}_\mu - \lambda_2 x'_\mu = \dot{f}_1(\tau) (\dot{\tilde{x}}_\mu - \tilde{\lambda}_2 \tilde{x}'_\mu) = \dot{f}_1(\tau) D_{\tilde{\tau}} \tilde{x}_\mu.$$

Благодарности. Мы благодарны за интерес к работе и критические обсуждения А. В. Ефремову, В. Г. Кадышевскому, Э. А. Кураеву, В. В. Нестеренко, А. И. Пашневу.

Список литературы

- [1] *R. Arnovitt, S. Deser, C. W. Misner.* Phys. Rev. 1959. V. 116. P. 1322; 1961. V. 122. P. 997.
- [2] *C. Isham, K. Kuchar.* Ann. Phys. (NY). 1985. V. 164. P. 288, 316; *J. B. Hartle, K. Kuchar.* Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 2323; *P. Hajicek, K. Kuchar.* Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 1091; *P. Hajicek.* Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1997. V. 57. P. 115.
- [3] *L. Gynagov, M. Pawlowski, V. Pervushin, V. Smirichinski.* Gen. Relat. Gravit. 1998. V. 30. P. 1749; *M. Pawlowski, V. Papoyan, V. Pervushin, V. Smirichinski.* Phys. Lett. B. 1998. V. 444. P. 293.

- [4] *G. Fulop, D. Gitman, I. Tyutin.* Int. J. Theor. Phys. 1999. V. 38. P. 1941.
- [5] *V. Pervushin, V. Smirichinski.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 6191.
- [6] *П. А. М. Дирак.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
- [7] *A. J. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim.* Constrained Hamiltonian Systems. Rome: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- [8] *Д. М. Гитман, И. В. Тютин.* Каноническое квантование полей со связями. М: Наука, 1986.
- [9] *Ю. С. Владимиров.* Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоатомиздат, 1982.
- [10] *P. A. M. Dirac.* Proc. Roy. Soc. A. 1958. V. 246. P. 333; Phys. Rev. 1959. V. 114. P. 924.
- [11] *R. Arrovitt, S. Deser, C. W. Misner.* Phys. Rev. 1960. V. 117. P. 1525.
- [12] *А. Л. Зельманов.* ДАН СССР. 1976. Т. 227. С. 78.
- [13] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990.
- [14] *Б. М. Барбаиов, В. В. Нестеренко.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [15] *M. Pawlowski, V. Pervushin.* Parametrization-invariant path integral in GR and “Big Bang” of quantum universe. hep-th/0006116; Int. J. Mod. Phys. (to be published). 2001.
- [16] *T. Levi-Civita.* Prace Mat.-Fiz. 1906. V. 17. P. 1.
- [17] *S. Shantnugadhasan.* J. Math. Phys. 1973. V. 14. P. 677.
- [18] *L. Brink, P. Vecchia, P. Howe.* Phys. Lett. B. 1976. V. 65. P. 471; *A. M. Polyakov.* Phys. Lett. B. 1981. V. 103. P. 207.
- [19] *J. W. York (Jr.).* Phys. Rev. Lett. 1971. V. 26. P. 1658; *K. Kuchar.* J. Math. Phys. 1971. V. 13. P. 768.
- [20] *Л. Бринк, М. Энно.* Принципы теории струн. М.: Мир, 1991.
- [21] *P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. Thorn.* Nucl. Phys. B. 1973. V. 56. P. 109.
- [22] *С. Швеебер.* Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: ИЛ, 1963.
- [23] *F. Röhrlich.* Nucl. Phys. B. 1976. V. 112. P. 842.
- [24] *S. Gogilidze, A. Khvedelidze, V. Pervushin.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 1760; Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 2160.
- [25] *L. Faddeev, V. Popov.* Phys. Lett. B. 1976. V. 25. P. 29.

Поступила в редакцию 8.X.2000 г.,
после доработки 28.XII.2000 г.