Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Санкович, Метрические свойства боголюбовских траекторий в теории статистического равновесия, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 1, 125–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:19:11

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БОГОЛЮБОВСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрены некоторые свойства меры Боголюбова, возникающей в теории статистического равновесия квантовых систем. Установлена недифференцируемость боголюбовских траекторий в соответствующем функциональном пространстве. Доказана теорема о квадратичной вариации траекторий. Изучены свойства масштабных преобразований, вытекающие из этой теоремы. Построены примеры полугрупп, связанных с мерой Боголюбова. Найдены независимые приращения для данной меры. Рассмотрена связь меры Боголюбова с параболическими дифференциальными уравнениями в частных производных.

1. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И МЕРА БОГОЛЮБОВА

В работе рассмотрены некоторые свойства меры Боголюбова, возникающей в теории статистического равновесия квантовых систем. В частности, важное значение для физических приложений, связанных с построением строгой теории фазовых переходов в неидеальных бозевских системах, имеет исследование структуры носителя этой меры и выяснение связи боголюбовской меры с дифференциальными параболическими уравнениями. Некоторые результаты, полученные в данном направлении, представлены в предлагаемой статье.

При изучении вероятностных мер в функциональных пространствах широко используются понятия и методы теории стохастических процессов. Предположим, что фиксировано некоторое вероятностное пространство $\{\Omega, G, P\}$, где Ω – пространство элементарных событий ω с выделенной на нем σ -алгеброй подмножеств событий G и мерой – вероятностью событий – P на G . Числовые функции $f(\omega)$, заданные на Ω и измеримые относительно P , называются случайными величинами. Для интегрируемых относительно меры P функций определяется интеграл (математическое ожидание)

$$Mf(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega) dP(\omega).$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Случайным элементом со значением в пространстве X называют слабо измеримое отображение $x(\omega)$ пространства Ω в X , т.е. такое отображение, при котором функционал $\langle \xi, x(\omega) \rangle$ измерим относительно меры P для любого $\xi \in X'$, где X' — сопряженное с X пространство. Если задан случайный элемент $x(\omega)$ со значениями в X , то на σ -алгебре, порожденной цилиндрическими множествами пространства X , можно определить вероятностную меру

$$\mu\{x \in X : [\langle \xi_1, x \rangle, \dots, \langle \xi_n, x \rangle] \in A_n\} = P\{\omega \in \Omega : [\langle \xi_1, x(\omega) \rangle, \dots, \langle \xi_n, x(\omega) \rangle] \in A_n\},$$

где A_n — любое борелевское множество в R^n , а векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$ ($n = 1, 2, \dots$) принадлежат сопряженному пространству X' . В этом случае

$$\int_{\Omega} F[x(\omega)] dP(\omega) = \int_X F(x) d\mu(x)$$

для любого функционала F , для которого существует один из этих интегралов.

Пусть X — некоторое пространство действительных функций аргумента $t \in T$, где T — подмножество R . Тогда случайный элемент $x(\omega)$ называют случайной функцией и обозначают $x(\omega, t)$. Аргумент ω в функции $x(\omega, t)$ часто опускают. Если t интерпретировать как время, то такие случайные функции называют случайными или стохастическими процессами. Случайная функция считается заданной, если заданы ее конечномерные распределения. Случайная функция $x(t) = x(\omega, t)$ ($t \in T$) со значениями на вероятностном пространстве $\{X, G, P\}$ называется гауссовым процессом, если все ее конечномерные распределения гауссовы. Это означает, что совместное распределение значений $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ этого случайного процесса задается функцией плотности

$$p(u_1, \dots, u_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det B)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij}^{(-1)} (u_i - m(t_i))(u_j - m(t_j)) \right],$$

где математическое ожидание $m(t) = M[x(\omega, t)]$ и корреляционная функция

$$B(t, s) = M[(x(\omega, t) - m(t))(x(\omega, s) - m(s))],$$

B — матрица с элементами $B(t_i, t_j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), а $b_{ij}^{(-1)}$ — элементы матрицы B^{-1} , обратной к матрице B . Таким образом, если X является функциональным пространством, то имеет место равенство

$$\int_{\Omega} F[x(\omega, t)] dP(\omega) = \int_X F[x(t)] d\mu(x),$$

и поэтому задача интегрирования по гауссовой мере в функциональном пространстве эквивалентна задаче интегрирования по мере, порожденной соответствующим случайным гауссовым процессом.

Далее будет регулярно использоваться описанная выше связь теории гауссовых случайных процессов и функционального интегрирования по гауссовым мерам.

Пусть $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ обозначает набор действительных чисел таких, что $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq \beta$. Для заданного произвольного подмножества $E \subset R^n$ определим цилиндрическое множество $Q_{\vec{t}}(E) = \{x \in X : (x(t_1), \dots, x(t_n)) \in E\}$. При фиксированном $\vec{t}$ множества E и $Q_{\vec{t}}(E)$ определяют друг друга однозначно. Гауссова центрированная мера заданного цилиндрического множества $Q_{\vec{t}}(E)$ есть по определению

$$\mu\{Q_{\vec{t}}(E)\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det K)^{-\frac{1}{2}} \int_E \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij}^{(-1)} u_i u_j\right) du_1 \dots du_n. \quad (1)$$

В случае меры Боголюбова [1] пространство $X = C^\circ[0, \beta]$, где $C^\circ[0, \beta]$ – пространство непрерывных на отрезке $[0, \beta]$ функций с равномерной метрикой

$$\rho = \max_{t \in [0, \beta]} |x(t) - y(t)|,$$

удовлетворяющих условию $x(0) = x(\beta)$. Билинейный функционал $K(\varphi, \psi)$, определенный на сопряженном пространстве X' , имеет вид

$$K(\varphi, \psi) = \int_0^\beta \int_0^\beta B(t, s) d\varphi(t) d\psi(s),$$

где $\varphi(t) \in X' = V_0[0, \beta]$ – пространство функций ограниченной вариации на $[0, \beta]$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t+0) + \varphi(t-0)] \quad \text{при } t \in (0, \beta).$$

Матричные элементы матрицы ковариаций имеют вид [2]

$$k_{ij} = B(t_i, t_j) = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \operatorname{ch} \left(\omega |t_i - t_j| - \frac{\beta\omega}{2} \right). \quad (2)$$

Мера Боголюбова имеет нулевое среднее.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (1) для боголюбовской меры.

Пусть $0 < t \leq \beta$. Вычислим функцию

$$F_{x(t)} \equiv \mu_B\{x \in X : x(t) \leq \gamma\},$$

где γ – любое действительное число. Используя формулы (1), (2), имеем

$$\begin{aligned} F_{x(t)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi K(\varphi, \varphi)}} \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{u^2}{K(\varphi, \varphi)}\right) du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{m\omega} \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}}} \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left(-\frac{u^2}{2} \frac{2m\omega}{\operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}}\right) du. \end{aligned}$$

Из последней формулы видно, что случайная величина $G(x) = x(t)$ нормально распределена с нулевым средним и дисперсией $(2m\omega)^{-1} \operatorname{ch}(\beta\omega/2)$.

Пусть $0 < t_1 < t_2 \leq \beta$ и пусть γ – любое действительное число. Найдем функцию

$$F_{x(t_2)-x(t_1)} = \mu_B \{x \in X : x(t_2) - x(t_1) \leq \gamma\}.$$

Можно записать, что

$$F_{x(t_2)-x(t_1)} = \mu_B \{x \in X : (x(t_1), x(t_2)) \in E\},$$

где $E = \{(u_1, u_2) \in R^2 : u_2 - u_1 \leq \gamma\}$. Используя формулу (1), имеем

$$F_{x(t_2)-x(t_1)} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\det K}} \int_B du_1 du_2 \exp \left[-\frac{1}{2} (k_{11}^{(-1)} u_1^2 + k_{12}^{(-1)} u_1 u_2 + k_{21}^{(-1)} u_2 u_1 + k_{22}^{(-1)} u_2^2) \right]. \quad (3)$$

Элементы обратной матрицы K^{-1} в этом случае просто вычисляются и имеют вид

$$k_{11}^{(-1)} = k_{22}^{(-1)} = \frac{k_{11}}{\det K}, \quad k_{12}^{(-1)} = k_{21}^{(-1)} = -\frac{k_{12}}{\det K},$$

где

$$k_{11} = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2}, \quad k_{12} = \frac{1}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \operatorname{ch} \left(\omega |t_1 - t_2| - \frac{\beta\omega}{2} \right),$$

$$\det K = \frac{1}{4m^2\omega^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta\omega}{2}} \left[\operatorname{ch}^2 \frac{\beta\omega}{2} - \operatorname{ch}^2 \left(\omega |t_1 - t_2| - \frac{\beta\omega}{2} \right) \right].$$

После подстановки последних выражений в формулу (3) и некоторых элементарных преобразований получаем

$$F_{x(t_2)-x(t_1)} = \sqrt{\frac{m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{2\pi \left[\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \omega(t_2 - t_1) \right) \right]}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\gamma} du \exp \left[-\frac{u^2}{2} \frac{m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \omega(t_2 - t_1) \right)} \right].$$

Следовательно, случайная величина $G(x) = x(t_2) - x(t_1)$ нормально распределена с нулевым средним и дисперсией

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \omega(t_2 - t_1) \right)}{m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}. \quad (4)$$

2. НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ БОГОЛЮБОВСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

Рассмотрим свойства носителя меры Боголюбова в пространстве $C^0[0, \beta]$. Оказывается, что, как и в случае винеровской меры, мера μ_B сосредоточена на непрерывных, но не на непрерывно дифференцируемых путях. Таким образом, мера Боголюбова, наряду с мерой Винера, дает еще один важный пример везде непрерывных, но почти всюду недифференцируемых функций.

Введем множество

$$C_h^\gamma(t, t') = \{x \in X : |x(t) - x(t')| \leq h|t - t'|^\gamma\},$$

где $h > 0$, $0 < \gamma \leq 1$, $t, t' \in [0, \beta]$. Попробуем найти боголюбовскую меру этого множества. Воспользуемся формулой (1). Тогда можно записать, что

$$\mu_B \{C_h^\gamma(t, t')\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det K}} \int_B du_1 du_2 e^{-\frac{1}{2}(u, K^{-1}u)}, \quad (5)$$

где $B = \{(u_1, u_2) \in R^2 : |u_1 - u_2| \leq h|t - t'|^\gamma\}$. Матрица K , входящая в формулу (5), совпадает с матрицей K , использованной в предыдущем разделе в формуле (3). Выполнив в интеграле (5) подходящую линейную замену переменных интегрирования, получим

$$\mu_B \{C_h^\gamma(t, t')\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-\frac{v^2}{2}} dv, \quad (6)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \omega|t - t'| \right)}} h|t - t'|^\gamma.$$

Из формулы (6) следует оценка сверху для искомой меры,

$$\mu_B \{C_h^\gamma(t, t')\} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} a. \quad (7)$$

Введем теперь множества

$$C_h^\gamma(t) = \bigcap_{t' \in [0, \beta]} C_h^\gamma(t, t') = \{x \in X : |x(t) - x(t')| \leq h|t - t'|^\gamma \text{ для всех } t' \in [0, \beta]\} \quad (8)$$

и

$$C_h^\gamma = \bigcap_{t \in [0, \beta]} C_h^\gamma(t) = \{x \in X : |x(t) - x(t')| \leq h|t - t'|^\gamma \text{ для всех } t, t' \in [0, \beta]\}.$$

Можно доказать [3], что множества $C_h^\gamma(t, t')$, $C_h^\gamma(t)$ и C_h^γ являются замкнутыми подмножествами в $X = C^0[0, \beta]$.

Рассмотрим последовательность $\{t_k\}$ точек из сегмента $[0, \beta]$ таких, что они не совпадают с точкой t и $t_k \rightarrow t$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда из определения (8), оценки (7) и свойства выпуклости вниз функции $\operatorname{sh} x$ следует, что

$$\mu_B \{C_h^\gamma(t)\} \leq \mu_B \{C_h^\gamma(t, t_k)\} \leq \sqrt{\frac{2m \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}{\pi \operatorname{sh} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \omega|t - t_k|\right)}} h |t - t_k|^{\gamma - \frac{1}{2}}.$$

Из последнего неравенства при $\gamma > 1/2$ получается, что $\mu_B \{C_h^\gamma(t)\} = 0$, а следовательно, и

$$\mu_B \{C_h^\gamma\} = 0. \quad (9)$$

Напомним, что функция $x: [0, \beta] \mapsto R$ называется непрерывной по Гельдеру порядка γ тогда и только тогда, когда существует положительная постоянная h такая, что $|x(t) - x(t')| \leq h|t - t'|^\gamma$ для всех $t, t' \in [0, \beta]$ и $\gamma \in (0, 1]$. Поскольку

$$\Gamma^\gamma \equiv \{x \in X : x - \text{непрерывная по Гельдеру функция порядка } \gamma\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h^\gamma,$$

то в силу условия (9) следует, что множество Γ^γ при $1/2 < \gamma \leq 1$ является борелевским подмножеством X с боголюбовской мерой (или вероятностью) ноль. Иными словами, почти всюду по мере боголюбовские траектории не являются непрерывными по Гельдеру порядка $\gamma > 1/2$ (а следовательно, не могут быть непрерывно дифференцируемы).

Пусть $0 \leq t \leq \beta$ и пусть $D_t = \{x \in X : x'(t) \text{ существует}\}$, где $x'(t)$ обозначает обычную производную функции x по t при $t \in (0, \beta)$ и соответственно одностороннюю производную при $t = 0$ или $t = \beta$. Тогда можно показать [3], что $D_t \subset \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h^1(t)$, откуда следует, что $\mu_B(D_t) = 0$.

Определим функцию $F = X \times [0, \beta] \mapsto R$ соотношением

$$F(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x'(t) \text{ существует (как конечная величина),} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Можно показать [3], что функция F измерима как функция от x и t . Тогда по теореме Фубини

$$\int_X \left(\int_0^\beta F(x, t) dt \right) d\mu_B(x) = \int_0^\beta \left(\int_X F(x, t) d\mu_B(x) \right) dt = \int_0^\beta \mu_B(D_t) dt = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что для почти всех по мере μ_B функций x выполняется равенство

$$\int_0^\beta F(x, t) dt = 0,$$

следовательно, для почти всех по мере Боголюбова μ_B функций x и для почти всех по мере Лебега значений t выполняется равенство $F(x, t) = 0$. Таким образом, доказано, что

траектории $x \in X$ с вероятностью 1 дифференцируемы самое большее на подмножестве $[0, \beta]$ с лебеговой мерой ноль.

Поскольку любая функция x ограниченной вариации на любом интервале почти всюду по мере Лебега дифференцируема на этом интервале [4], то боголюбовские траектории с вероятностью 1 на любом подынтервале отрезка $[0, \beta]$ имеют неограниченную вариацию.

Описанные в этом разделе свойства боголюбовских траекторий полностью совпадают с соответствующими свойствами винеровских траекторий. Однако имеются и различия, которые проявятся далее.

3. МАСШТАБНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ БОГОЛЮБОВА

Важное значение в теории фейнмановских континуальных интегралов имеет масштабное преобразование в соответствующем функциональном пространстве $x \mapsto \sigma x$, где параметр $\sigma \in C$. При этом существенную роль играет известная теорема Леви о квадратичной вариации винеровских траекторий [5] и специальный случай, исследованный несколько позднее в работе [6]. Имея в виду возможность аналитического продолжения по температуре или массе в боголюбовском континуальном интеграле, интересно применить схему Леви для случая меры Боголюбова.

Введем квадратичные вариации Леви траекторий. Рассмотрим разбиение Π сегмента $[0, \beta]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = \beta$ и функцию $x \in X$. Определим функцию

$$S_{\Pi}(x) = \sum_{j=1}^k [x(t_j) - x(t_{j-1})]^2. \quad (10)$$

В случае разбиения сегмента $[0, \beta]$ на k равных интервалов будем просто писать $S_k(x)$ вместо $S_{\Pi}(x)$. Заметим, что для достаточно гладких траекторий, удовлетворяющих, например, условию Липшица с постоянной k ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n}(x) = 0. \quad (11)$$

Из предыдущего раздела, однако, известно, что мера Боголюбова сосредоточена на недифференцируемых траекториях. Поэтому, как и для винеровской меры, следует ожидать, что для боголюбовских траекторий условие (11) не будет выполняться.

ТЕОРЕМА 1. *Боголюбовские траектории $x \in X$ почти всюду удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n}(x) = \frac{\beta}{m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что для любого достаточно большого натурального числа N

$$I_N \equiv \left\| S_N - \frac{\beta}{m} \right\|_2^2 = \frac{2\beta^2}{m^2} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad (12)$$

где $\|\dots\|_2 \equiv \|\dots\|_{L^2(X, \mu_B)}$ — L^2 -норма в пространстве X с мерой μ_B . Из определения (10) следует, что

$$S_N(x) = \sum_{j=1}^N [x(t_j) - x(t_{j-1})]^2, \quad t_j = \frac{j\beta}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Для искомой величины I_N имеем

$$\begin{aligned} I_N &= \int_X \left(S_N(x) - \frac{\beta}{m} \right)^2 d\mu_B(x) = \\ &= \int_X S_N^2(x) d\mu_B(x) - \frac{2\beta}{m} \int_X S_N(x) d\mu_B(x) + \frac{\beta^2}{m^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из первого раздела известно, что случайная величина $x(t_j) - x(t_{j-1})$ распределена с нулевым средним и дисперсией (4), поэтому

$$\begin{aligned} \int_X S_N(x) d\mu_B(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \omega|t_j - t_{j-1}| \right)}{m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} = \\ &= N \frac{\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} - \operatorname{ch} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \frac{\beta\omega}{N} \right)}{m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}}. \end{aligned}$$

В частности, при $N \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_X S_N(x) d\mu_B(x) = \frac{\beta}{m} - \frac{\beta^2\omega}{2m} \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2} \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Вычислим теперь интеграл от $S_N^2(x)$, входящий в формулу (13):

$$\begin{aligned} \int_X S_N^2(x) d\mu_B(x) &= \sum_{m,n=1}^N \int_X d\mu_B(x) [x^2(t_n)x^2(t_m) + 2x^2(t_n)x^2(t_{m-1}) + \\ &+ x^2(t_{n-1})x^2(t_{m-1}) - 4x^2(t_n)x(t_m)x(t_{m-1}) - \\ &- 4x^2(t_{n-1})x(t_m)x(t_{m-1}) + 4x(t_n)x(t_{n-1})x(t_m)x(t_{m-1})]. \end{aligned} \quad (14)$$

При вычислении интегралов от отдельных слагаемых в правой части (14) необходимо воспользоваться теоремой Вика и соответствующими табличными значениями конечных сумм [7]. Например,

$$\int_X d\mu_B(x) x^2(t_n)x^2(t_m) = B^2(t_n, t_n) + 2B^2(t_n, t_m).$$

Используя формулу (2), найдем

$$\sum_{n,m=1}^N \int_X d\mu_B(x) x^2(t_n) x^2(t_m) = \left(2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}\right)^{-2} \times \\ \times \left(N^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\beta\omega}{2} + N^2 + N \operatorname{sh}(\beta\omega) \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{N}\right).$$

Вычисляя соответствующим образом остальные слагаемые в правой части (14), получим

$$\int_X S_N^2(x) d\mu_B(x) = \left(2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}\right)^{-2} \left[4N^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\beta\omega}{2} + 4N^2 \operatorname{ch}^2 \left(\frac{\beta\omega}{2} - \frac{\beta\omega}{N}\right) - \right. \\ - 8N^2 \operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{\beta\omega}{2} - \frac{\beta\omega}{N}\right) + 6N^2 - 8N^2 \operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{N} + \\ + 2N(N-1) \operatorname{ch} \frac{2\beta\omega}{N} + 2N + 2N \operatorname{ch} \left(\beta\omega - \frac{2\beta\omega}{N}\right) + \\ \left. + 6N \operatorname{sh}(\beta\omega) \frac{\operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{N}}{\operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{N}} - 8N \frac{\operatorname{sh}(\beta\omega)}{\operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{N}} + 2N \frac{\operatorname{sh}(\beta\omega - \frac{\beta\omega}{N})}{\operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{N}} \right]. \quad (15)$$

Имея в виду предельный переход $N \rightarrow \infty$, из формулы (15) находим

$$\int_X S_N^2(x) d\mu_B(x) = \frac{\beta^2}{m^2} + \frac{\beta^2}{2m^2} \frac{2 \operatorname{ch}(\beta\omega) - \beta\omega \operatorname{sh}(\beta\omega) - 2}{\operatorname{sh}^2 \frac{\beta\omega}{2}} \frac{1}{N} + \varepsilon_N,$$

где положительное число $\varepsilon_N \sim O(1/N^2)$. В итоге получаем для искомой величины I_N требуемое соотношение (12). Из равенства (12), в частности, следует, что

$$\left\| S_{2^n} - \frac{\beta}{m} \right\|_2^2 = \frac{\beta^2}{m^2} \frac{1}{2^{n-1}} + \varepsilon_{2^n}. \quad (16)$$

Рассмотрим множество

$$E_n = \left\{ x \in X : \left| S_{2^n}(x) - \frac{\beta}{m} \right| \geq \frac{\beta}{m} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}} + \mu_n \right\}, \quad (17)$$

где

$$\mu_n = \frac{\beta}{m} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}} \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{\beta^2} 2^{n-1} \varepsilon_n} - 1 \right) \sim O\left(\frac{1}{2^{\frac{4n}{3}+1}}\right).$$

Докажем, что

$$\mu_B(E_n) \leq \frac{2}{2^{\frac{n}{3}}}. \quad (18)$$

Допустим противное, тогда

$$\begin{aligned} \int_X \left| S_{2^n}(x) - \frac{\beta}{m} \right|^2 d\mu_B(x) &\geq \int_{E_n} \left| S_{2^n}(x) - \frac{\beta}{m} \right|^2 d\mu_B(x) > \\ &> \left(\frac{\beta}{m} \frac{1}{2^{\frac{n}{3}}} + \mu_n \right)^2 \frac{2}{2^{\frac{n}{3}}} = \frac{\beta^2}{m^2} \frac{1}{2^{n-1}} + \varepsilon_{2^n}, \end{aligned}$$

что противоречит (16). Положим

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Тогда из (18) следует, что

$$\mu_B(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu_B(E_k) \leq \frac{c}{2^{\frac{n}{3}}}, \quad (19)$$

где $c = 2^{4/3}(2^{1/3} - 1)^{-1}$. Теперь из (17) вытекает, что для $x \in X \setminus F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c$, где E_k^c обозначает дополнение множества E_k в X , выполняется неравенство

$$\left| S_{2^k}(x) - \frac{\beta}{m} \right| < \frac{\beta}{m} 2^{-\frac{k}{3}}$$

при любых $k = n, n+1, \dots$. Следовательно, если найдется такое число n , что $x \notin F_n$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k}(x) = \frac{\beta}{m}. \quad (20)$$

Таким образом, условие (20) выполняется при всех x , за исключением, возможно, множества $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Но из неравенства (19) следует, что для любого n

$$\mu_B(F) \leq \mu_B(F_n) \leq \frac{c}{2^{\frac{n}{3}}},$$

т.е. $\mu_B(F) = 0$. Теорема 1 доказана.

Для заданного положительного числа σ рассмотрим множество

$$\Omega_{\sigma} = \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n}(x) = \sigma^2 \frac{\beta}{m} \right\}.$$

Обозначим через μ_B^{σ} ($\sigma > 0$) образ меры $\mu_B \equiv \mu_B^1$ при отображении $\varphi_{\sigma}: X \mapsto X$, $\varphi_{\sigma} = \sigma x$. Мера $\mu_B^{\sigma} = \mu_B^1 \circ \sigma^{-1}$ определена на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(X)$ и для любого $B \in \mathcal{B}$ выполнено соотношение $\mu_B^{\sigma}(B) = \mu_B^1(\sigma^{-1}B)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 [3].

А. Множество Ω_σ измеримо по Борелю для любого $\sigma > 0$.

Б. Для любых $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ имеет место соотношение $\sigma_2 \Omega_{\sigma_1} = \Omega_{\sigma_1 \sigma_2}$ и, в частности, для любого $\sigma > 0$ $\sigma \Omega_1 = \Omega_\sigma$.

В. $\mu_B^\sigma(\Omega_\sigma) = 1$ для любого $\sigma > 0$.

Г. Если $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ($\sigma_1, \sigma_2 > 0$), то $\Omega_{\sigma_1} \cap \Omega_{\sigma_2} = \emptyset$, т.е. меры $\mu_B^{\sigma_1}$ и $\mu_B^{\sigma_2}$ взаимно ортогональны.

Из п. В сформулированного утверждения следует, что множество Ω_σ является множеством полной μ_B^σ -меры. Вслед за авторами книги [3] будем говорить, что мера μ_B^σ сконцентрирована на множестве Ω_σ . Заметим, что $\text{supp } \mu_B^\sigma = X$ для любого $\sigma > 0$ и $\Omega_\sigma \subset X$.

Назовем подмножество A из X масштабно-инвариантным измеримым множеством, если $\sigma A \in \mathcal{S}_1$ для всех $\sigma > 0$, где $\mathcal{S}_1$ — σ -алгебра измеримых по мере Боголюбова μ_B^1 множеств пространства X . Масштабно-инвариантное измеримое множество N называется нуль-масштабно-инвариантным множеством, если $\mu_B^1(\sigma N) = 0$ для всех $\sigma > 0$. Классы масштабно-инвариантных и нуль-масштабно-инвариантных множеств будем обозначать как $\mathcal{S}$ и $\mathcal{N}$, соответственно. Обозначим через $\mathcal{S}_\sigma$ σ -алгебру, полученную пополнением измеримого пространства $(X, \mathcal{B}(X), \mu_B^\sigma)$, а через $\mathcal{N}_\sigma$ — класс μ_B^σ -нуль множеств. Можно показать, что $\mathcal{N}_\sigma = \sigma \mathcal{N}_1$, $\mathcal{S}_\sigma = \sigma \mathcal{S}_1$ и $\mu_B^\sigma(E) = \mu_B^1(\sigma^{-1}E)$ для любого $E \in \mathcal{S}_\sigma$. Кроме того, алгебра $\mathcal{S}$ есть σ -алгебра и $\mathcal{S} = \bigcap_{\sigma > 0} \mathcal{S}_\sigma$, а также $\mathcal{N} = \bigcap_{\sigma > 0} \mathcal{N}_\sigma$. Легко видеть, что для каждого $\sigma > 0$ $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\sigma$. Множество $E \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $E \cap \Omega_\sigma \in \mathcal{S}_\sigma$ для любого $\sigma > 0$. Множество $N \in \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда $N \cap \Omega_\sigma \in \mathcal{N}_\sigma$ для любого $\sigma > 0$.

Структура масштабно-инвариантных и нуль-масштабно-инвариантных множеств определяется следующим утверждением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [3].

А. Множество $E \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде

$$E = \left(\bigcup_{\sigma > 0} E_\sigma \right) \cup L, \quad (21)$$

где каждое множество E_σ является μ_B^σ -измеримым подмножеством множества Ω_σ , а L — произвольное подмножество множества

$$X \setminus \bigcup_{\sigma > 0} \Omega_\sigma. \quad (22)$$

Для любого множества E вида (21) имеем $\mu_B^\sigma(E) = \mu_B^\sigma(E_\sigma)$ для всех $\sigma > 0$.

Б. Множество $N \in \mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда оно может быть представлено в виде

$$N = \left(\bigcup_{\sigma > 0} N_\sigma \right) \cup L,$$

где каждое множество N_σ является μ_B^σ -измеримым подмножеством множества Ω_σ , а L — произвольное подмножество множества (22).

4. ПОЛУГРУППЫ ПО МЕРЕ БОГОЛЮБОВА

Обозначим через $\mathcal{L}(X)$ пространство ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве X . Напомним, что семейство операторов $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ в $\mathcal{L}(X)$ называется сильно непрерывной полугруппой операторов на X , если $T(0) = I$, $T(t, s) = T(t)T(s)$ для всех $t, s \in [0, \infty)$ и для каждого $x \in X$ отображение $t \mapsto T(t)x$ из $[0, \infty)$ в X непрерывно. Известно [8], что в случае сильно непрерывной полугруппы производящий оператор (генератор) этой полугруппы

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (T(\epsilon) - I)$$

имеет область определения $D(L)$, плотную в X , и является замкнутым линейным оператором, причем для $f \in D(L)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (T(t + \epsilon) - T(t))f = LT(t)f = T(t)Lf.$$

Можно показать [9], что если задана сильно непрерывная полугруппа $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$ с генератором L и задан произвольный вектор $f \in D(L)$, то функция $u(t) = T(t)f \in X$ непрерывно дифференцируема на полуинтервале $[0, \infty)$, удовлетворяет начальному условию $u(0) = f$ и для всех $t > 0$ выполняется дифференциальное уравнение $du/dt = Lu$.

В случае гауссовых мер существует универсальный пример сильно непрерывной полугруппы – полугруппа Орнштейна–Уленбека. Пусть μ – центрированная гауссова мера на локально-выпуклом пространстве X . Полугруппа Орнштейна–Уленбека на пространстве $L^p(\mu)$ определяется формулой

$$T(t)f(x) = \int_X f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) d\mu(y). \quad (23)$$

Доказывается [10], что для всякого $p \geq 1$ семейство операторов $\{T(t): 0 \leq t < \infty\}$, заданных формулой (23), образует сильно непрерывную полугруппу на банаховом пространстве $L^p(\mu)$ с операторной нормой

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(L^p(\mu))} = 1.$$

Кроме того, при $p = 2$ операторы $T(t)$ неотрицательны.

В случае меры Боголюбова можно получить вид генератора полугруппы Орнштейна–Уленбека, считая, что функция $f \in C_0^\infty(R)$, где $C_0^\infty(R)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в R ,

$$T(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{m\omega} \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \exp\left(-\frac{m\omega y^2}{\operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}}\right) dy.$$

Сделав замену переменной интегрирования $e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y = z$, получим

$$\begin{aligned} \frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = \frac{1}{t} \left\{ \sqrt{\frac{m\omega \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2}}{\pi(1 - e^{-2t})}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(z) - f(x)) \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{m\omega \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2}}{1 - e^{-2t}} (z - e^{-t}x)^2 \right] dz \right\}. \end{aligned}$$

Разложим теперь функцию $f(z)$ под знаком интеграла в последнем выражении, используя теорему Тейлора,

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z - x) + \frac{1}{2}f''(x)(z - x)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x)(z - x)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(z - x)^4.$$

Тогда, вычисляя элементарные гауссовы интегралы, находим

$$\frac{T(t)f(x) - f(x)}{t} = -xf'(x) + \frac{1}{2}f''(x) \frac{1}{2t} \frac{1 - e^{-2t}}{m\omega \operatorname{th} \frac{\beta\omega}{2}} + o(t),$$

т.е. генератор полугруппы (23) в случае меры Боголюбова задается соотношением

$$L = -x \frac{d}{dx} + \frac{\operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2}}{2m\omega} \frac{d^2}{dx^2}.$$

Рассмотрим теперь семейство операторов $\{T(\beta): 0 \leq \beta < \infty\}$, действующих в пространстве $L^2(R)$ по формуле

$$(T(\beta)f)(x) = \int_X d\mu_B(y) f\left(\int_0^\beta y(t) dt + x\right). \quad (24)$$

Очевидно, что $T(0) = I$. Кроме того, используя формулы интегрирования по гауссовым мерам [11], имеем

$$(T(\beta)f)(x) = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\pi\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left[-\frac{(y - x)^2 m\omega^2}{2\beta}\right] dy. \quad (25)$$

Формула (25) является известной формулой свободной полугруппы для уравнения теплопроводности. Таким образом, семейство операторов (24) действительно является сильно непрерывной полугруппой в пространстве $L^2(R)$. При этом генератор этой полугруппы имеет вид

$$L = \frac{1}{2m\omega^2} \frac{d^2}{dx^2}$$

и функция $u(\beta, x) = (T(\beta)f)(x)$ для любой функции $f \in L^2(R)$ определяет решение уравнения Блоха

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{1}{2m\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с начальным условием $u(0, x) = f(x)$. Из формулы (24) вытекает следующее соотношение, выражающее связь между мерами Боголюбова и Винера:

$$\int_{C^0[0, m\omega^2 t]} f\left(x + \int_0^{m\omega^2 t} y(\tau) d\tau\right) d\mu_B(y) = \int_{C_0^t} f(y(t) + x) d\mu_W(y),$$

где C_0^t — пространство непрерывных на $[0, t]$ функций, равных нулю в нуле.

5. НЕЗАВИСИМЫЕ ПРИРАЩЕНИЯ

Классический винеровский процесс на отрезке $[a, b]$ имеет независимые приращения, т.е. для любых $a < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ соответствующие случайные величины $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ являются независимыми. В силу гауссовости винеровского процесса для доказательства этого утверждения достаточно проверить лишь попарную независимость таких приращений. В случае меры Боголюбова приращения $x(t_i) - x(t_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$, не являются независимыми, что существенно затрудняет анализ соответствующего случайного процесса. Однако установленная в разделе 4 связь между мерами Винера и Боголюбова позволяет построить систему независимых приращений и в случае боголюбовского случайного процесса.

Рассмотрим случайную величину

$$y(t) = \lambda x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \beta,$$

где постоянная λ будет определена ниже. Для математического ожидания $M(y(t)y(s))$ имеем

$$\begin{aligned} M(y(t)y(s)) = & \left[\frac{\lambda^2}{2m\omega \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} - \frac{1}{2m\omega^3 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \right] \operatorname{ch} \left(\omega |t-s| - \frac{\beta\omega}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{2m\omega^2 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \left[2 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} \min(s, t) - \frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} + \right. \\ & + \frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \left(\omega s - \frac{\beta\omega}{2} \right) + \frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \left(\omega t - \frac{\beta\omega}{2} \right) \left. \right] + \\ & + \frac{\lambda}{2m\omega^2 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} \left[2 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} + \operatorname{sh} \left(\omega s - \frac{\beta\omega}{2} \right) + \operatorname{sh} \left(\omega t - \frac{\beta\omega}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Выбрав теперь $\lambda = \omega^{-1}$, легко установить, что

$$M[(y(t) - y(s))(y(\tau) - y(\sigma))] = 0 \quad \text{при } s < t < \sigma < \tau.$$

Таким образом, гауссовость случайного процесса Боголюбова позволяет сформулировать полученный результат в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Гауссов случайный процесс с мерой Боголюбова имеет независимые приращения, т.е. для любых $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq \beta$ случайные величины $y(t_2) - y(t_1), \dots, y(t_n) - y(t_{n-1})$ независимы, где*

$$y(t) = \omega^{-1}x(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \beta. \quad (26)$$

Случайный процесс $\{y(t), 0 \leq t \leq \beta\}$ является гауссовым с нулевым средним и корреляционной функцией

$$\begin{aligned} M(y(t)y(s)) = \frac{1}{2m\omega^2 \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2}} & \left\{ 2 \left[\omega^{-1} + \min(s, t) \right] \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} - \frac{1}{\omega} \operatorname{ch} \frac{\beta\omega}{2} + \right. \\ & + \frac{1}{\omega} \left[\operatorname{ch} \left(\omega s - \frac{\beta\omega}{2} \right) + \operatorname{sh} \left(\omega s - \frac{\beta\omega}{2} \right) \right] + \\ & \left. + \frac{1}{\omega} \left[\operatorname{ch} \left(\omega t - \frac{\beta\omega}{2} \right) + \operatorname{sh} \left(\omega t - \frac{\beta\omega}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Формула (27) позволяет установить, что гауссова случайная величина $G \equiv y(t) - y(s)$ распределена нормально с нулевым средним и дисперсией $(t - s)/(m\omega^2)$, где $t > s$, т.е.

$$G \sim N \left(0, \frac{t - s}{m\omega^2} \right).$$

Следует отметить, что если рассматривать $x(t)$ как случайную функцию, то интеграл

$$\int_0^t x(\tau) d\tau, \quad (28)$$

введенный в разделах 4 и 5, является стохастическим интегралом, определяемым как предел в среднем по заданной мере соответствующих интегральных сумм. Интеграл (28) существует тогда и только тогда, когда существует среднее $M(y^2)$. Последнее условие для боголюбовской меры выполнено, что следует, в частности, из формулы (27).

В заключение этого раздела заметим, что поскольку

$$\int_X d\mu_B(x) \left(\frac{1}{\beta} \int_0^\beta x(t) dt \right)^2 = \frac{1}{\beta^2} \int_0^\beta dt \int_0^\beta d\tau B(t - \tau) = \frac{1}{\beta m \omega^2},$$

то

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} M \left(\frac{1}{\beta} \int_0^\beta x(t) dt \right)^2 = 0.$$

Так как боголюбовский случайный процесс имеет нулевое математическое ожидание $m \equiv Mx(t) = 0$, то можно говорить об эргодичности данного процесса в том смысле, что “временные” (по β) средние сходятся в среднем квадратичном к “фазовым” средним.

6. МЕРА БОГОЛЮБОВА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для произвольной функции $x(t) \in X$, произвольного действительного числа ξ и положительного числа β определим функцию

$$\delta_{\beta, \xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz[y(\beta) - y(0) - \xi]}, \quad (29)$$

где функция $y(t)$, $0 \leq t \leq \beta$, задана соотношением (26). Функция (29) является аналогом функции Донскера–Лионса [12], введенной в свое время для исследования винеровской меры.

ЛЕММА. Математическое ожидание функции (29) задается формулой

$$E_{\mu_B} \{\delta_{\beta, \xi}(x)\} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\pi\beta}} \exp\left(-\frac{m\omega^2}{2\beta}\xi^2\right). \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующее математическое ожидание:

$$\begin{aligned} E_{\mu_B} \{\delta_{\beta, \xi}(x)\} &= \int_X \delta_{\beta, \xi}(x) d\mu_B(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iz\xi} \int_X d\mu_B(x) \exp\left[iz \int_0^{\beta} x(t) dt\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iz\xi} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izu} e^{-\frac{u^2}{2a}} du, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$a = \int_0^{\beta} \int_0^{\beta} B(t, s) dt ds = \frac{\beta}{m\omega^2}.$$

Вычисляя интегралы в (31), получаем формулу (30). Лемма доказана.

Введем функцию

$$u(\beta, \xi) = E_{\mu_B} \left\{ \delta_{\beta, \xi}(x) \exp\left(-\int_0^{\beta} V(y(s) - y(0)) ds\right) \right\}, \quad (32)$$

где действительная функция V ограничена снизу.

ТЕОРЕМА 3. Функция (32) является решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{1}{2m\omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - V(\xi)u \quad (33)$$

с начальным условием $u(0, \xi) = \delta(\xi)$ и граничными условиями $u(\beta, \pm\infty) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся очевидной формулой

$$\exp\left(-\int_0^t V(z(s)) ds\right) = 1 - \int_0^t V(z(\tau)) \exp\left(-\int_0^{\tau} V(z(s)) ds\right) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(\beta, \xi) &= E_{\mu_B} \{\delta_{\beta, \xi}(x)\} - \int_0^{\beta} E_{\mu_B} \left\{ \delta_{\beta, \xi}(x) V(y(\tau) - y(0)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(-\int_0^{\tau} V(y(s) - y(0)) ds\right) \right\} d\tau = \\ &= E_{\mu_B} \{\delta_{\beta, \xi}(x)\} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\beta} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iz\xi} E_{\mu_B} \left\{ V(y(\tau) - y(0)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(-\int_0^{\tau} V(y(s) - y(0)) ds + iz(y(\beta) - y(0))\right) \right\}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
 E_{\mu_B} \left\{ V(y(\tau) - y(0)) \exp \left(- \int_0^\tau V(y(s) - y(0)) ds + iz(y(\beta) - y(0)) \right) \right\} = \\
 = E_{\mu_B} \left\{ \left[V(y(\tau) - y(0)) \exp \left(- \int_0^\tau V(y(s) - y(0)) ds + iz(y(\tau) - y(0)) \right) \right] \times \right. \\
 \left. \times [\exp(iz(y(\beta) - y(0)) - iz(y(\tau) - y(0)))] \right\} = \\
 = E_{\mu_B} \left\{ V(y(\tau) - y(0)) \exp \left(- \int_0^\tau V(y(s) - y(0)) ds + iz(y(\tau) - y(0)) \right) \right\} \times \\
 \times E_{\mu_B} \left\{ \exp(iz(y(\beta) - y(\tau))) \right\} = \\
 = \exp \left(- \frac{\beta - \tau}{2m\omega^2} z^2 \right) E_{\mu_B} \left\{ V(y(\tau) - y(0)) \times \right. \\
 \left. \times \exp \left(- \int_0^\tau V(y(s) - y(0)) ds + iz(y(\tau) - y(0)) \right) \right\} = \\
 = \exp \left(- \frac{\beta - \tau}{2m\omega^2} z^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\eta V(\eta) e^{iz\eta} E_{\mu_B} \left\{ \exp \left(- \int_0^\tau V(y(s) - y(0)) ds \right) \delta_{\tau, \eta}(x) \right\},
 \end{aligned}$$

где были использованы теорема 2 и свойства функции (29). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 u(\beta, \xi) = E_{\mu_B} \{ \delta_{\beta, \xi}(x) \} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-iz\xi} \exp \left(- \frac{\beta - \tau}{2m\omega^2} z^2 \right) \times \\
 \times \int_{-\infty}^{\infty} d\eta V(\eta) e^{iz\eta} u(\tau, \eta).
 \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left(-iz\xi - \frac{\beta - \tau}{2m\omega^2} z^2 + iz\eta \right) = \sqrt{\frac{2\pi m\omega^2}{\beta - \tau}} \exp \left[-\frac{2m\omega^2}{\beta - \tau} \frac{(\xi - \eta)^2}{4} \right],$$

а также используя лемму, получаем

$$\begin{aligned}
 u(\beta, \xi) = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\pi\beta}} \exp \left(-\frac{m\omega^2}{2\beta} \xi^2 \right) - \\
 - \int_0^\beta \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta) u(\tau, \eta) \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\pi(\beta - \tau)}} \exp \left[-\frac{m\omega^2}{2(\beta - \tau)} (\xi - \eta)^2 \right] d\eta d\tau. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой теперь нетрудно убедиться, что функция (34) удовлетворяет уравнению (33). Соответствующие начальные и граничные условия также, очевидно, выполнены. Теорема 3 доказана.

Благодарности. Автор благодарит профессора Дж. Джонсона за плодотворное обсуждение проблем функционального интегрирования (в частности, Дж. Джонсон указал на связь мер Винера и Боголюбова) и за любезно подаренную им прекрасную книгу [3], оказавшую существенное влияние на содержание данной статьи. Автор благодарит А. И. Кириллова, прочитавшего рукопись статьи и сделавшего ряд важных замечаний.

Работа поддержана РФФИ, проект № 99-01-00887.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов.* ДАН СССР. 1954. Т. 99. С. 225.
- [2] *Д. П. Санкович.* ТМФ. 1999. Т. 119. С. 345.
- [3] *G. W. Johnson, M. L. Lapidus.* The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus. Oxford: Clarendon Press, 2000.
- [4] *H. L. Royden.* Real Analysis. 3rd ed. NY: Macmillan, 1988.
- [5] *P. Lévy.* Amer. J. Math. 1940. V. 62. P. 487.
- [6] *R. H. Cameron, W. T. Martin.* Bull. Amer. Math. Soc. 1947. V. 53. P. 130.
- [7] *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
- [8] *Е. Хилле, Р. Филлипс.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
- [9] *E. B. Davies.* One-Parameter Semigroups. London: Academic Press, 1980.
- [10] *В. И. Богачев.* Гауссовские меры. М.: Наука, 1997.
- [11] *Л. А. Янович.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск: Наука и техника, 1976.
- [12] *Х.-С. Го.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию 16.XI.2000 г.