Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Бугрий, Корреляционная функция двумерной модели Изинга на решетке конечных размеров. I, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 1, 143–167

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf453>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:17:10

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА РЕШЕТКЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ. I

Вычислена спин-спиновая корреляционная функция в двумерной модели Изинга со взаимодействием ближайших соседей на решетке конечных размеров с периодическими граничными условиями. Получены представления, аналогичные формфакторному, для ферромагнитной и парамагнитной областей параметра взаимодействия. Обсуждаются отличительные особенности полученных выражений, обусловленные конечностью размеров системы. Исследовано асимптотическое поведение соответствующих величин как функций размера решетки.

1. ВВЕДЕНИЕ

После вывода [1] формул для корреляционной функции в двумерной модели Изинга (МИ) со взаимодействием ближайших соседей на решетке бесконечных размеров вышло много работ, посвященных этой проблеме [2]. Основные достижения при этом были связаны с анализом скейлингового предела [3]–[5], поскольку в этом пределе МИ представляет интерес с теоретико-полевой точки зрения. Главным результатом явилось получение так называемого формфакторного представления [6] для корреляционной функции МИ:

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = \text{const} \sum_n g_n(r), \quad r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad (1.1)$$

$$g_n(r) = \frac{1}{n!(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{dq_i}{\omega_i} e^{-r\omega_i} \right) F_n^2[q], \quad (1.2)$$

$$F_n[q] = \prod_{i < j}^n \left(\frac{q_i - q_j}{\omega_i + \omega_j} \right), \quad \omega_i = \omega(q_i) = \sqrt{m^2 + q_i^2}. \quad (1.3)$$

В случае ферромагнитной фазы суммирование в (1.1) ведется по четным n , а в случае парамагнитной – по нечетным. Примечательно, что сначала данное представление было

* Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина. E-mail: abugrij@bitp.kiev.ua

получено [6] в рамках S -матричного подхода [7] и уже затем выведено [5] путем прямого решения МИ. Открытие формфакторного представления (1.1) для корреляционной функции МИ сыграло важную роль в развитии точно интегрируемых моделей квантовой теории поля [8].

Преимущество представления (1.1) перед многими другими состоит в том, что динамические аспекты системы здесь явно отделены от кинематических: квадрат формфактора интегрируется по фазовому объему n -частичного промежуточного состояния. Формфакторное представление типа (1.1), проясняя динамику полевой модели, не дает исчерпывающего ответа на вопросы о спектре, сорте и статистике частиц, формирующих промежуточные и асимптотические состояния квантово-полевой системы. Для этой цели необходим анализ модели при условии ограниченного объема или/и конечной (не равной нулю) температуры. Это естественный и необходимый этап в изучении точно интегрируемых полевых моделей, и в последнее время деятельность в этом направлении активизировалась (см., например, работы [9]–[15]). Из этих работ видно, что рассматриваемое обобщение – задача непростая; например, авторы работ [14], [15] высказывают сомнения относительно положений, выдвигаемых в работах [11], [13]. Кажется, что на этом пути явно не хватает простого точно решаемого примера: в литературе почему-то отсутствует представление корреляционной функции МИ на решетке конечных размеров в форме, подобной формфакторному разложению (1.1).

В данной работе этот пробел заполняется. С помощью методов классической теории МИ [16], адаптированных должным образом к проблеме конечных размеров, найдено точное решение для корреляционной функции МИ на решетке с периодическими граничными условиями. Решение это представлено в форме, весьма близкой формфакторному разложению (1.1), и имеет вид

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = \xi \xi_T e^{-\frac{r}{\Lambda}} \sum_n g_n(r), \quad (1.4)$$

$$g_n(r) = \frac{e^{-\frac{n}{\Lambda}}}{n! (N)^n} \sum_{[q]}^{(b)} \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{-r\gamma_i - \varphi_i}}{\text{sh } \gamma_i} \right) F_n^2[q], \quad (1.5)$$

$$F_n[q] = \prod_{i < j}^n \frac{\sin \frac{q_i - q_j}{2}}{\text{sh } \frac{\gamma_i + \gamma_j}{2}}. \quad (1.6)$$

Величины ξ , ξ_T , Λ , γ_i , φ_i , входящие в формулы (1.4)–(1.6), определены далее в разделах 2–4. Уточним, что представление (1.4)–(1.6) соответствует корреляции спинов, расположенных на линии, параллельной оси цилиндра, на окружности которого лежат N узлов. Появление в (1.5) суммирования по фазовому объему (вместо интеграла в случае бесконечной решетки) вполне естественно. Менее очевидным является то, что спектр квазиимпульса в зоне Бриллюэна бозонный (отмечено верхним индексом в знаке суммирования). Данное обстоятельство следует из расчетов, изложенных ниже в разделах 2–4. Кроме того, конечность размера решетки обуславливает наличие таких величин как ξ_T , Λ и $\varphi_i = \varphi(q_i)$ ($\xi_T = 1$, $\Lambda^{-1} = 0$, $\varphi_i = 0$ при $N \rightarrow \infty$). Обращает на

себя внимание и тот факт, что решеточный формфактор (1.6) не зависит явно от размера цилиндра. Подобное выражение для $F_n[q]$ при четных значениях n было найдено в работе [5] для случая бесконечной решетки.

В разделе 2 формулируется модель, вводятся обозначения и приводится краткий вывод представления корреляционной функции в виде определителя матрицы Теплица, а также конкретный вид этой матрицы при учете конечных размеров решетки. В разделе 3 выводится решеточное формфакторное представление для корреляционной функции в ферромагнитной области параметра взаимодействия, а в разделе 4 – в парамагнитной. В разделе 5 обсуждается возможность обобщения полученных результатов на решетки иных конфигураций. В приложении приводится вывод факторизованных представлений для теплицевских определителей общего вида, которые используются для получения формфакторных разложений корреляционной функции МИ.

2. МОДЕЛЬ

Модель Изинга со взаимодействием ближайших соседей на прямоугольной решетке с размерами $M \times N$ определяется гамильтонианом $H[\sigma]$

$$-\beta H[\sigma] = K \sum_{\mathbf{r}} \sigma(\mathbf{r})(\nabla_x + \nabla_y)\sigma(\mathbf{r}), \quad K = \beta J,$$

где J – параметр взаимодействия, β – обратная температура, двумерный вектор $\mathbf{r} = (x, y)$ нумерует узлы решетки: $x = 1, 2, \dots, M$, $y = 1, 2, \dots, N$, ∇_x, ∇_y – операторы сдвига на один шаг решетки,

$$\nabla_x \sigma(x, y) = \sigma(x + 1, y), \quad \nabla_y \sigma(x, y) = \sigma(x, y + 1).$$

Рисунок иллюстрирует расположение коррелирующих изинговских спинов на решетке.

Статистическая сумма модели определяется соотношением

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]}, \quad (2.1)$$

а парная корреляционная функция – соотношением

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = Z^{-1} \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]} \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2). \quad (2.2)$$

В случае периодических граничных условий для изинговской решетки статистическая сумма (2.1) выражается [17], [18] через комбинацию четырех гауссовых грассмановых функциональных интегралов с различными граничными условиями

$$Z = (2 \operatorname{ch}^2 K)^{MN} \frac{1}{2} (\mathcal{Q}^{(ff)} + \mathcal{Q}^{(bf)} + \mathcal{Q}^{(fb)} - \mathcal{Q}^{(bb)}), \quad (2.3)$$

где

$$\mathcal{Q} = \int d[\psi] e^{S[\psi]}, \quad d[\psi] = \prod_{\mathbf{r}} d\psi^1(\mathbf{r}) d\psi^2(\mathbf{r}) d\psi^3(\mathbf{r}) d\psi^4(\mathbf{r}).$$

Действие $S[\psi]$ – антикоммутиративная квадратичная форма

$$S[\psi] = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \sum_{\nu, \rho=1}^4 \psi^\nu(\mathbf{r}) D^{\nu\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi^\rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{2} (\psi \hat{D} \psi), \quad (2.4)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + t\nabla_x & 1 & 1 \\ -1 - t\nabla_{-x} & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 + t\nabla_y \\ -1 & -1 & -1 - t\nabla_{-y} & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \operatorname{th} K. \quad (2.5)$$

Индексы (f, b) в (2.3) указывают на тип граничных условий для операторов сдвига, входящих в (2.5). Индекс f отвечает антипериодическим граничным условиям $(\nabla_x^{(f)})^M = -1$, $(\nabla_y^{(f)})^N = -1$. При этом соответствующий квазиимпульс $\mathbf{p}$ пробегает полуцелые значения в зоне Бриллюэна $(-\pi, \pi)$ (в единицах $2\pi/M$ для p_x и $2\pi/N$ для p_y). Индекс b отвечает периодическим граничным условиям $(\nabla_x^{(b)})^M = 1$, $(\nabla_y^{(b)})^N = 1$. В этом случае квазиимпульс пробегает целые значения (в единицах $2\pi/M$ для p_x и $2\pi/N$ для p_y).

Корреляционную функцию (2.2) также можно представить в терминах функциональных интегралов с гауссовым распределением [19]

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = t^r \frac{\mathcal{Q}_d^{(ff)} + \mathcal{Q}_d^{(bf)} + \mathcal{Q}_d^{(fb)} - \mathcal{Q}_d^{(bb)}}{\mathcal{Q}^{(ff)} + \mathcal{Q}^{(bf)} + \mathcal{Q}^{(fb)} - \mathcal{Q}^{(bb)}}, \quad (2.6)$$

где $\mathcal{Q}_d$ – функциональные интегралы

$$\mathcal{Q}_d = \int d[\psi] e^{S_d[\psi]}. \quad (2.7)$$

Через $S_d[\psi]$ в (2.7) обозначено действие с дефектом: на связях вдоль пути, соединяющего узлы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, параметр t в действии (2.4) заменен на t^{-1} .

Мы будем рассматривать для определенности корреляционную функцию в случае, когда узлы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ расположены на линии, параллельной горизонтальной оси, как показано на рисунке,

$$\mathbf{r}_1 = (x, y), \quad \mathbf{r}_2 = (x + r, y), \quad |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = r.$$

При этом $S_d[\psi]$ имеет вид

$$S_d[\psi] = S[\psi] + \Delta S[\psi],$$

$$\Delta S[\psi] = \tau \sum_{x'=1}^r \psi^1(x + x' - 1, y) \psi^2(x + x', y), \quad \tau = t^{-1} - t.$$

Если хотя бы один из размеров решетки значительно больше другого (тор вырождается в цилиндр), например $M/N \gg 1$, то формула (2.6) перейдет в формулу

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = t^r \frac{Q_d^{(ff)}}{Q^{(ff)}} [1 + o(e^{-\frac{M}{N}})]. \quad (2.8)$$

Обратим внимание, что остаются члены с антипериодическими граничными условиями.

С помощью некоторых манипуляций с функциональными интегралами (или непосредственно с пфаффианами, через которые они выражаются) отношение функциональных интегралов в правой части (2.8) можно представить в виде функционального интеграла по двухкомпонентному грассманову полю, заданному только на линии, соединяющей узлы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$,

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = \int d[\chi] e^{(\chi^1 A \chi^2)} = \det A, \quad (2.9)$$

$$d[\chi] = \prod_{x=0}^{r-1} d\chi_x^1 d\chi_x^2, \quad (\chi^1 A \chi^2) = \sum_{x, x'} \chi_x^1 A_{x, x'} \chi_{x'}^2,$$

$$A_{x, x'} = \frac{1}{MN} \sum_{\mathbf{p}} \frac{e^{ip_x(x-x')} [2t(1+t^2) - (1-t^2)(e^{ip_x} + t^2 e^{-ip_x})]}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(\cos p_x + \cos p_y)}, \quad (2.10)$$

$$x, x' = 0, 1, \dots, r-1.$$

Индекс f , напомним, указывает на то, что компоненты квазиимпульса пробегают полуцелые значения — фермионный спектр:

$$\sum_{p_x}^{(f)} v(p_x) = \sum_{l=1}^M v\left(\frac{2\pi}{M} \left(l + \frac{1}{2}\right)\right), \quad \sum_{p_y}^{(f)} v(p_y) = \sum_{l=1}^N v\left(\frac{2\pi}{N} \left(l + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Преобразуем выражение (2.10) для матрицы к стандартному с точки зрения теории детерминантов Теплица виду. Из табличных формул [20]

$$\begin{aligned} \prod_{p_y}^{(f)} 2(\operatorname{ch} \gamma - \cos p_y) &= e^{N\gamma} (1 + e^{-N\gamma})^2, \\ \prod_{p_y}^{(b)} 2(\operatorname{ch} \gamma - \cos p_y) &= e^{N\gamma} (1 - e^{-N\gamma})^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

следует, в частности, что

$$\frac{1}{N} \sum_{p_y}^{(f)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma - \cos p_y} = \frac{\operatorname{th} \frac{N\gamma}{2}}{\operatorname{sh} \gamma}, \quad \frac{1}{N} \sum_{p_y}^{(b)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma - \cos p_y} = \frac{\operatorname{cth} \frac{N\gamma}{2}}{\operatorname{sh} \gamma}. \quad (2.12)$$

В случае цилиндра $M \rightarrow \infty$, $N = \text{const}$ суммирование по p_x в (2.10) переходит в интегрирование, т.е.

$$\frac{1}{M} \sum_{p_x}^{(f)} v(e^{-ip_x}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} v(z) + o(e^{-M\mu}). \quad (2.13)$$

Выполняя с помощью (2.12) суммирование по p_y в (2.10) и учитывая (2.13), получим для матрицы $A_{x,x'}$ выражение

$$A_{x,x'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'} A(z), \quad (2.14)$$

где ядро $A(z)$ имеет вид

$$A(z) = \sqrt{\frac{(1 - e^{-\gamma\pi} z)(1 - e^{-\gamma_0} z^{-1})}{(1 - e^{-\gamma_0} z)(1 - e^{-\gamma\pi} z^{-1})}} T(z), \quad z = e^{-ip}, \quad (2.15)$$

$$T(z) = \operatorname{th} \frac{N\gamma(p)}{2}, \quad (2.16)$$

$$\gamma_0 = |2K + \ln t|, \quad \gamma_\pi = 2K - \ln t. \quad (2.17)$$

Функция $\gamma(p)$ в (2.16) задана уравнением

$$4 \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma(p)}{2} = \mu^2 + 4 \sin^2 \frac{p}{2}, \quad (2.18)$$

$$\mu^2 = 2 \left(\sqrt{\operatorname{sh}(2K)} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}(2K)}} \right)^2. \quad (2.19)$$

Из (2.18), (2.19) следует, что

$$\gamma(0) = \gamma_0, \quad \gamma(\pi) = \gamma_\pi, \quad \operatorname{ch} \gamma_\pi - \operatorname{ch} \gamma_0 = 2.$$

В термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$, а точнее при $(N\mu) \gg 1$, функция $T(z)$ обращается в единицу и выражение (2.15) для ядра $A(z)$ переходит в классическое выражение теории МИ [16]. В этом пределе значение $K = K_c$, при котором μ обращается в нуль, определяет критическую точку (теплоемкость и корреляционная длина расходятся). При конечном N соответствующие сингулярности сглажены, и фазового перехода нет. Тем не менее и в данном случае значение $K = K_c$ является выделенным: выражения для корреляционной функции различаются в областях $K > K_c$ и $K < K_c$, да и сама техника вычислений, основанная на интегральных уравнениях Винера–Хопфа, определено “различает” эти области. В этом смысле мы и будем употреблять в дальнейшем выражения “критическая точка”, “ферромагнитная (парамагнитная) фаза”. Отметим, что в критической точке

$$\text{sh}(2K_c) = 1, \quad \mu = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_\pi = 2 \ln(\sqrt{2} + 1).$$

3. ФЕРРОМАГНИТНАЯ ОБЛАСТЬ: $K > K_c$

Зависимость корреляционной функции (2.9)

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = \det A^{(r)} \quad (3.1)$$

от расстояния $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ входит через размерность матрицы, отмеченную в (3.1) верхним индексом. Зависимость от размера цилиндра N содержится в функции $T(z)$ (2.16), а зависимость от параметра взаимодействия K (тем самым и от температуры) определяется посредством функции $\gamma(p)$, заданной уравнением (2.18), в которое входит параметр μ (2.19).

Ядро (2.14) матрицы (2.9) $A^{(r)}$ нужно представить в факторизованном виде, как это требует используемый нами метод вычисления определителя (см. формулы (П.6), (П.7) в приложении),

$$A(z) = P(z)Q(z^{-1}),$$

где функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны внутри круга $|z| = 1$. Формально это можно сделать с помощью проекционных операторов (П.8), определенных в приложении,

$$\begin{aligned} 2 \ln P(z) &= \ln(1 - e^{-\gamma_\pi z}) - \ln(1 - e^{-\gamma_0 z}) + 2\mathcal{P} \ln T(z), \\ 2 \ln Q(z^{-1}) &= \ln(1 - e^{-\gamma_0 z^{-1}}) - \ln(1 - e^{-\gamma_\pi z^{-1}}) + 2\tilde{\mathcal{P}} \ln T(z). \end{aligned}$$

Можно так же исходя из конкретного вида функции (2.16) выразить $T(z)$ с помощью формул (2.11) в виде отношения произведений

$$T^2(z) = \frac{\prod_q^{(b)} [\text{ch } \gamma(p) - \cos q]}{\prod_q^{(f)} [\text{ch } \gamma(p) - \cos q]}. \quad (3.2)$$

Из (2.18) следует, что

$$\operatorname{ch} \gamma(p) - \cos q = 2 + \frac{\mu^2}{2} - \cos q - \cos p = \frac{1}{2} e^{\gamma(q)} (1 - e^{-\gamma(q)} z) (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1}),$$

и формула (3.2) преобразуется к виду

$$T^2(z) = \frac{\prod_q^{(b)} e^{\gamma(q)} (1 - e^{-\gamma(q)} z) (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})}{\prod_q^{(f)} e^{\gamma(q)} (1 - e^{-\gamma(q)} z) (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})}. \quad (3.3)$$

Поскольку квазиимпульс q пробегает всю зону Бриллюэна, то все множители в (3.3) имеют кратность два, за исключением значений $q = 0$ и $q = \pi$ в числителе. Благодаря этому функции $A(z)$, $P(z)$ и $Q(z^{-1})$ не имеют точек ветвления, а только простые полюсы и нули,

$$P(z) = \exp\left(\frac{\gamma_0 - \gamma_\pi}{2}\right) \frac{\prod_{0 < q \leq \pi}^{(b)} (e^{\gamma(q)} - z)}{\prod_{0 < q < \pi}^{(f)} (e^{\gamma(q)} - z)}, \quad Q(z^{-1}) = \frac{\prod_{0 \leq q < \pi}^{(b)} (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})}{\prod_{0 < q < \pi}^{(f)} (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})}. \quad (3.4)$$

Согласно (П.25), (П.28)

$$\det A^{(r)} = e^{h(r)} \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l}(r). \quad (3.5)$$

Представим функцию $h(r)$ в виде трех слагаемых

$$h(r) = -\frac{r}{\Lambda} + \ln \xi + \ln \xi_T. \quad (3.6)$$

Из (П.23) и (2.15) имеем

$$\Lambda^{-1} = -[\ln P(0) + \ln Q(0)] = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \ln T(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dp \ln \operatorname{cth} \frac{N\gamma(p)}{2}. \quad (3.7)$$

Асимптотическое поведение параметра Λ , который имеет смысл длины когерентности, при больших значениях N ($N\gamma_0 \gg 1$) описывается выражением

$$\Lambda \simeq e^{N\gamma_0} \sqrt{\frac{\pi N}{2 \operatorname{sh} \gamma_0}}. \quad (3.8)$$

Видно, что длина когерентности очень быстро возрастает с увеличением размера цилиндра N при фиксированном $\gamma_0 \neq 0$: решетку можно считать бесконечной при $N\gamma_0 \gg \max[\ln(N\gamma_0), \ln(r\gamma_0)]$. Из (П.23) следует также, что

$$\begin{aligned} \ln(\xi \xi_T) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} dz \ln Q(z^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} \ln P(z) = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z_2| > |z_1|} d(z_1 z_2) \frac{\ln A(z_1) \ln A(z_2)}{(z_2 - z_1)^2}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

откуда получим

$$\ln \xi = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{\operatorname{sh} \gamma_0 \operatorname{sh} \gamma_\pi}{\operatorname{sh}^2 \frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2}} \right], \quad (3.10)$$

$$\ln \xi_T = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z_2| > |z_1|} \frac{d(z_1 z_2)}{(z_2 - z_1)^2} \ln T(z_1) \ln T(z_2). \quad (3.11)$$

Выражение (3.10) не зависит от N и содержит сингулярность в критической точке

$$\ln \xi \simeq \frac{1}{4} \ln \mu \quad \text{при} \quad \mu \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Для вычисления $\ln \xi_T$ проинтегрируем (3.11) по частям и перейдем к импульсным переменным. Тогда

$$\ln \xi_T = \frac{N^2}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{dp dq \gamma'(p) \gamma'(q)}{\operatorname{sh}(N\gamma(p)) \operatorname{sh}(N\gamma(q))} \ln \left| \frac{\sin \frac{p+q}{2}}{\sin \frac{p-q}{2}} \right|$$

или

$$\ln \xi_T = \frac{N^2}{2\pi^2} \int_{\gamma_0}^{\gamma_\pi} \frac{d\gamma_p d\gamma_q}{\operatorname{sh}(N\gamma(p)) \operatorname{sh}(N\gamma(q))} \ln \left| \frac{\sin \frac{p+q}{2}}{\sin \frac{p-q}{2}} \right|. \quad (3.13)$$

Дифференцируя правую и левую части (3.13) по μ^2 , получим

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2} \ln \xi_T = -\frac{1}{2} [c_1^2(\mu) - c_2^2(\mu)], \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} c_1(\mu) &= \frac{N}{2\pi} \int_{\gamma_0}^{\gamma_\pi} \frac{d\gamma}{\operatorname{sh}(N\gamma)} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \gamma_\pi - \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{ch} \gamma - \operatorname{ch} \gamma_0}}, \\ c_2(\mu) &= \frac{N}{2\pi} \int_{\gamma_0}^{\gamma_\pi} \frac{d\gamma}{\operatorname{sh}(N\gamma)} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \gamma - \operatorname{ch} \gamma_0}{\operatorname{ch} \gamma_\pi - \operatorname{ch} \gamma}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

При выводе (3.14), (3.15) учтено, что на границах области интегрирования подынтегральное выражение в (3.13) обращается в нуль, а также

$$\frac{\partial p}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{2 \sin p}, \quad \frac{\partial q}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{2 \sin q},$$

что следует из (2.18). При $N\gamma_0 \gg 1$ имеем

$$c_1(\mu) \simeq \frac{1}{\operatorname{ch}(N\gamma_0)} \sqrt{\frac{N}{2\pi \operatorname{sh} \gamma_0}}, \quad c_2(\mu) \simeq \frac{1}{4 \operatorname{ch}(N\gamma_0)} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \gamma_0}{2\pi N}}. \quad (3.16)$$

Из (3.14)–(3.16) получим

$$\ln \xi_T = \int_\mu^\infty d\nu \nu [c_1^2(\nu) - c_2^2(\nu)] \simeq \frac{1}{\pi} e^{-2N\gamma_0}.$$

Интеграл (3.13) расходится в критической точке. Это означает, что $\ln \xi_T$ как функция от μ имеет сингулярность. Нетрудно получить, что при $\mu \rightarrow 0$

$$c_1(\mu) \simeq \frac{1}{2\mu}, \quad \frac{\partial \ln \xi_T}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{8\mu^2}$$

и, следовательно,

$$\ln \xi_T = -\frac{1}{4} \ln \mu + \text{const.} \quad (3.17)$$

Таким образом, из (3.12), (3.17) видим, что функция $\ln(\xi \xi_T)$ не имеет сингулярности в точке $\mu = 0$ при любом фиксированном N .

Перейдем теперь к вычислению разложения в правой части (3.5)

$$G_F(r) = \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l}(r). \quad (3.18)$$

Коэффициенты $g_{2l}(r)$ выражаются, как показано в приложении, через $2l$ -кратные контурные интегралы (П.30),

$$g_{2l}(r) = \frac{(-1)^l}{l!l!(2\pi i)^{2l}} \oint_{|z_i| < 1} \frac{\prod_{i=1}^{2l} (dz_i z_i^r) \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l [(z_{2i-1} - z_{2j-1})^2 (z_{2i} - z_{2j})^2]}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^l (1 - z_{2i-1} z_{2j})^2} \times \\ \times \frac{\prod_{i=1}^l W(z_{2i-1})}{\prod_{i=1}^l W(z_{2i}^{-1})}. \quad (3.19)$$

Интеграл (3.19) определяется конкретным видом функции $W(z) = P(z)/Q(z^{-1})$. В нашем случае функции $P(z)$ и $Q(z^{-1})$ заданы выражениями (3.4). Подынтегральное выражение в (3.19) аналитично при $|z_i| < 1$, за исключением сингулярностей, содержащихся в функциях $W(z_i)$ и $W^{-1}(z_i^{-1})$. Представим эти функции таким образом, чтобы явно выделить сингулярности при $|z| < 1$,

$$W(z) = \frac{P(z)}{Q(z^{-1})} = \sqrt{\frac{(1 - e^{-\gamma\pi} z)(1 - e^{-\gamma\pi} z^{-1})}{(1 - e^{-\gamma_0} z)(1 - e^{-\gamma_0} z^{-1})}} \frac{P_T^2(z)}{T(z)}, \quad (3.20)$$

$$W^{-1}(z^{-1}) = \frac{Q(z)}{P(z^{-1})} = \sqrt{\frac{(1 - e^{-\gamma_0} z)(1 - e^{-\gamma_0} z^{-1})}{(1 - e^{-\gamma\pi} z)(1 - e^{-\gamma\pi} z^{-1})}} \frac{Q_T^2(z)}{T(z)}, \quad (3.21)$$

где аналитические при $|z| < 1$ функции $P_T(z)$, $Q_T(z)$ определены следующим образом:

$$\ln P_T(z) = \mathcal{P} \ln T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz'}{z' - z} \ln \text{th} \frac{N\gamma(p')}{2}, \quad (3.22)$$

$$\ln Q_T(z^{-1}) = \tilde{\mathcal{P}} \ln T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz'}{z - z'} \ln \text{th} \frac{N\gamma(p')}{2}, \quad z' = e^{-ip'}. \quad (3.23)$$

Отметим, что из (3.7), (3.22), (3.23) следует

$$\ln P_T(0) = -\frac{1}{\Lambda}, \quad \ln Q_T(0) = 0, \quad P_T(z) = P_T(0)Q_T(z).$$

С учетом этого получим вместо (3.20), (3.21)

$$W(z) = e^{\frac{\gamma_0 - \gamma\pi}{2} - \frac{2}{\Lambda}(\text{ch } \gamma\pi - \cos p)} Q_T^2(z) \frac{\text{cth } \frac{N\gamma(p)}{2}}{\text{sh } \gamma(p)}, \quad (3.24)$$

$$W^{-1}(z^{-1}) = e^{\frac{\gamma\pi - \gamma_0}{2}} (\text{ch } \gamma_0 - \cos p) Q_T^2(z) \frac{\text{cth } \frac{N\gamma(p)}{2}}{\text{sh } \gamma(p)}, \quad (3.25)$$

$$\frac{\text{cth } \frac{N\gamma(p)}{2}}{\text{sh } \gamma(p)} = \frac{1}{N} \sum_q^{(b)} \frac{1}{\text{ch } \gamma(q) - \cos p}. \quad (3.26)$$

Из (3.24)–(3.26) видно, что сингулярностями внутри контуров интегрирования (3.19) являются простые полюсы в точках

$$z_{(k)} = e^{-\gamma(q_{(k)})}, \quad q_{(k)} = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N,$$

соответствующих бозонному спектру квазиимпульса q . С учетом того что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \frac{v(z)}{\text{ch } \gamma(q) - \cos p} = \frac{v(e^{-\gamma(q)})}{\text{sh } \gamma(q)},$$

где $v(z)$ – аналитическая функция при $|z| < 1$, интеграл (3.19) берется по вычетам. В результате получаем

$$g_{2l}(r) = \frac{e^{-\frac{2l}{\Lambda}}}{(2l)!N^{2l}} \sum_{[q]}^{(b)} \prod_{i=1}^{2l} \left(\frac{e^{-r\gamma_i - \varphi_i}}{\text{sh } \gamma_i} \right) \mathcal{G}_{2l}[q], \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2l}[q] &= C_l^{2l} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l [(e^{-\gamma_{2i-1}} - e^{-\gamma_{2j-1}})^2 (e^{-\gamma_{2i}} - e^{-\gamma_{2j}})^2] \times \\ &\times \frac{\prod_{i=1}^l [(1 + \cos q_{2i-1})(1 - \cos q_{2i})]}{\prod_{i=1}^{2l} e^{\gamma_i} \prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^l (1 - e^{-\gamma_i - \gamma_j})^2}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\gamma_i = \gamma(q_i), \quad \varphi_i = \varphi(q_i) = -\ln Q_T^2(e^{-\gamma(q_i)}), \quad (3.29)$$

$$\sum_{[q]}^{(b)} = \sum_{q_1}^{(b)} \sum_{q_2}^{(b)} \dots \sum_{q_{2l}}^{(b)},$$

$C_l^{2l} = (2l)!/(l!l!)$ – биномиальный коэффициент.

Используя соотношение

$$\frac{1}{2}(e^{-\gamma_i} - e^{-\gamma_j})(1 - e^{\gamma_i + \gamma_j}) = \operatorname{ch} \gamma_i - \operatorname{ch} \gamma_j = \cos q_j - \cos q_i,$$

преобразуем (3.28) к виду

$$\mathcal{G}_{2l}[q] = \frac{V_{2l}[q]}{\prod_{i < j}^{2l} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma_i + \gamma_j}{2}},$$

где

$$\begin{aligned} V_{2l}[q] = 2^{-2l^2} C_l^{2l} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l [(\cos q_{2i-1} - \cos q_{2j-1})^2 (\cos q_{2i} - \cos q_{2j})^2] \times \\ \times \prod_{i=1}^l (1 + \cos q_{2i-1})(1 - \cos q_{2i}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Выражение (3.30) несимметрично относительно замены переменных суммирования q_i с четными индексами на нечетные. Суммирование выделяет симметричную его часть, которую обозначим через

$$V_{2l}^{\operatorname{sim}}[q] = \frac{1}{C_l^{2l}} \sum_{\mathbf{p}} V_{2l}[q],$$

где $\sum_{\mathbf{p}}$ обозначает сумму по всем перестановкам между q_{2i-1} и q_{2j} , число которых равно C_l^{2l} . Решающим при получении окончательного результата является равенство

$$V_{2l}^{\operatorname{sim}}[q] = U_{2l}^{\operatorname{even}}[q], \quad (3.31)$$

где через $U_{2l}^{\operatorname{even}}[q]$ обозначена четная часть ($q_i \leftrightarrow -q_i$) произведения $U_{2l}[q]$,

$$\begin{aligned} U_{2l}[q] &= \prod_{i < j}^{2l} \sin^2 \frac{q_i - q_j}{2}, \\ U_{2l}^{\operatorname{even}}[q] &= 2^{-2l} \sum_{[\sigma = \pm 1]} \prod_{i < j}^{2l} \sin^2 \frac{\sigma_i q_i - \sigma_j q_j}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, под знаком суммы в (3.27) функцию $V_{2l}[q]$ можно заменить на функцию $U_{2l}[q]$, что позволяет представить коэффициент $g_{2l}(r)$ в виде, аналогичном обобщенному факторному представлению [6],

$$n = 2l, \quad g_n(r) = \frac{e^{-\frac{n}{\Lambda}}}{n! N^n} \sum_{[q]}^{(b)} \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{-r\gamma_i - \varphi_i}}{\operatorname{sh} \gamma_i} \right) F_n^2[q_i], \quad (3.32)$$

где $F_n[q_i]$ – решеточный аналог формфактора

$$F_n[q_i] = \prod_{i < j}^n \left[\frac{\sin \frac{q_i - q_j}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\gamma_i + \gamma_j}{2}} \right], \quad F_0[q] = 1. \quad (3.33)$$

Еще раз обратим внимание, что спектр квазиимпульса q_i , по которому ведется суммирование в (3.32) (суммирование по промежуточным состояниям), оказывается бозонным, в отличие от фермионного спектра, которым определялись исходные величины, в частности матрица $A_{x,x'}$ (2.10).

Функция $\varphi_i = \varphi(q_i)$, входящая в (3.32), быстро убывает с увеличением размера цилиндра. Из ее определения (3.29) следует, что

$$\varphi(q) = -\frac{1}{\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz \ln T(z)}{e^{\gamma(q)} - z} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dp (1 - e^{-\gamma(q)} \cos p)}{\operatorname{ch} \gamma(q) - \cos p} \ln \operatorname{cth} \frac{N\gamma(p)}{2}.$$

При $N\gamma_0 \gg 1$ находим

$$\varphi(q) \simeq \frac{4}{e^{\gamma(q)} - 1} \frac{e^{-N\gamma_0}}{\sqrt{2\pi N \operatorname{sh} \gamma_0}}.$$

4. ПАРАМАГНИТНАЯ ОБЛАСТЬ: $K < K_c$

Корреляционная функция во всей области значений параметров (в том числе и при $K < K_c$) выражается единым образом через определитель $\det A^{(r)}$. Однако способ вычисления этого определителя при $K < K_c$ нуждается в модификации, так как техника интегральных уравнений Винера–Хопфа требует выполнения условия разложимости в ряд Лорана как самого ядра матрицы Тейлора, так и его логарифма. Между тем при $K < K_c$ ядро матрицы (2.10) перестраивается (по сравнению с ферромагнитным случаем (2.15)),

$$A(z) = z^{-1} B(z),$$

где

$$B(z) = \sqrt{\frac{(1 - e^{-\gamma_0} z)(1 - e^{-\gamma_\pi} z)}{(1 - e^{-\gamma_0} z^{-1})(1 - e^{-\gamma_\pi} z^{-1})}} T(z), \quad (4.1)$$

так что теперь уже функция $B(z)$ (но не $A(z)$) обладает нужными аналитическими свойствами. Матрица $A^{(r)}$ при этом имеет следующий вид:

$$A_{x,x'} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'-1} B(z). \quad (4.2)$$

Представляя ядро (4.1) в факторизованном виде

$$B(z) = P(z)Q(z^{-1}),$$

где функции $P(z)$ и $Q(z)$ аналитичны внутри круга $|z| < e^{\gamma_0}$, получим

$$P(z) = \exp\left(-\frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2}\right) \frac{\prod_{0 \leq q \leq \pi}^{(b)} (e^{\gamma(q)} - z)}{\prod_{0 < q < \pi}^{(f)} (e^{\gamma(q)} - z)}, \quad Q(z^{-1}) = \frac{\prod_{0 < q < \pi}^{(b)} (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})}{\prod_{0 < q < \pi}^{(f)} (1 - e^{-\gamma(q)} z^{-1})}. \quad (4.3)$$

Сравнивая с аналогичным факторизованным представлением для ферромагнитного случая, видим, что соответствующие произведения (3.4) и (4.3) отличаются одним множителем: в $P(z)$ появился множитель $(e^{\gamma_0} - z)$, а в $Q(z^{-1})$ исчез множитель $(1 - e^{-\gamma_0} z^{-1})$. Из (4.3) следует, что

$$P(0) = P_T(0) = e^{-\frac{1}{\Lambda}}, \quad Q(0) = Q_T(0) = 1,$$

где функции $P_T(z)$ и $Q_T(z)$ те же самые, что и в ферромагнитном случае (3.22), (3.23).

Матрица (4.2) имеет структуру (П.31), рассмотренную в приложении, поэтому для ее определителя согласно соотношениям (П.32)–(П.35) имеет место следующее представление:

$$\det A^{(r)} = e^{h(r+1)} F(r), \quad F(r) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{2l+1}(r). \quad (4.4)$$

Функция $h(r+1)$ дается выражением (П.23). Представляя ее в виде, аналогичном (3.6), и учитывая различие функций $P(z)$ и $Q(z)$, определяемых соотношениями (4.3) и (3.4), получим

$$h(r+1) = -\frac{r+1}{\Lambda} + \ln(\xi \xi_T) + \ln(1 - e^{-\gamma_0 - \gamma_\pi}), \quad (4.5)$$

где величины Λ , ξ и ξ_T те же, что и в ферромагнитной фазе (3.7), (3.10) и (3.11). С учетом (4.5) перепишем (4.4) следующим образом:

$$\det A^{(r)} = \text{sh} \frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2} e^{h(r)} G_P(r), \quad (4.6)$$

где

$$G_P(r) = 2e^{-\frac{1}{\Lambda} - \frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2}} F(r) = \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l+1}(r), \quad (4.7)$$

и для коэффициентов $g_{2l+1}(r)$ в разложении (4.7) получим из (П.35)

$$\begin{aligned} g_{2l+1}(r) = & 2e^{-\frac{1}{\Lambda} - \frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2}} \frac{(-1)^l}{l!(l+1)!} (2\pi i)^{2l+1} \oint_{|z_i| < 1} \prod_{i=1}^{2l+1} (dz_i z_i^r) \times \\ & \times \frac{\prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l (z_{2i} - z_{2j})^2 \prod_{i=1}^l \prod_{j=i+1}^{l+1} (z_{2i-1} - z_{2j-1})^2}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=0}^l (1 - z_{2i} z_{2j+1})^2} \times \\ & \times \frac{\prod_{i=1}^l (z_{2i} W(z_{2i}))}{\prod_{i=0}^l (z_{2i+1} W(z_{2i+1}^{-1}))}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Функции $W(z) = P(z)/Q(z^{-1})$ и $W^{-1}(z^{-1}) = Q(z)/P(z^{-1})$, входящие в интегралы (4.8), имеют в данном случае вид

$$W(z) = 2e^{-\frac{2}{\Lambda} - \frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2}} Q_T^2(z) \operatorname{sh}^2 \gamma(p) \frac{1}{N} \sum_q^{(b)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma(q) - \cos p}, \quad (4.9)$$

$$W^{-1}(z^{-1}) = \frac{1}{2} e^{\frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2}} Q_T^2(z) \frac{1}{N} \sum_q^{(b)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma(q) - \cos p}. \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) следует, что, как и в предыдущем случае, подынтегральное выражение в (4.8) имеет только простые полюсы внутри контура интегрирования в точках

$$z_{(k)} = e^{-\gamma(q_{(k)})}, \quad q_{(k)} = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

при этом

$$\cos p = \operatorname{ch} \gamma(q), \quad \operatorname{ch} \gamma(p) = \cos q, \quad \operatorname{sh}^2 \gamma(p) = -\sin^2 q.$$

Стягивая контуры интегрирования, получим для $g_{2l+1}(r)$ выражение в виде суммы вычетов

$$g_{2l+1}(r) = \frac{e^{-\frac{2l+1}{\Lambda}}}{(2l+1)! N^{2l+1}} \sum_{[q]}^{(b)} \prod_{i=1}^{2l+1} \left(\frac{e^{-r\gamma_i - \varphi_i}}{\operatorname{sh} \gamma_i} \right) \frac{V_{2l+1}[q]}{\prod_{i < j}^{2l+1} \operatorname{sh}^2 \frac{\gamma_i + \gamma_j}{2}}, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned} V_{2l+1}[q] = & C_l^{2l+1} 2^{-2l(l+1)} \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l (\cos q_{2i} - \cos q_{2j})^2 \times \\ & \times \prod_{i=1}^l \prod_{j=i+1}^{l+1} (\cos q_{2i-1} - \cos q_{2j-1})^2 \prod_{i=1}^l \sin^2 q_{2i}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Выражение (4.12) существенно отличается от соответствующего выражения (3.30) для ферромагнитного случая. И тем не менее оказывается, что и в парамагнитном случае симметричная часть функции $V_{2l+1}[q]$ относительно замены каждой из переменных с четными индексами q_{2i} на каждую из переменных с нечетными индексами q_{2j-1} (число таких перестановок C_l^{2l+1}) совпадает с четной частью функции $U_{2l+1}[q]$,

$$U_{2l+1}[q] = \prod_{i < j}^{2l+1} \sin^2 \frac{q_i - q_j}{2}.$$

Это означает, что имеет место равенство, аналогичное (3.31),

$$V_{2l+1}^{\text{sim}}[q] = U_{2l+1}^{\text{even}}[q],$$

где

$$V_{2l+1}^{\text{sim}}[q] = \frac{1}{C_l^{2l+1}} \sum_P V_{2l+1}[q],$$

$$U_{2l+1}^{\text{even}}[q] = 2^{-(2l+1)} \sum_{[\sigma=\pm 1]} \prod_{i < j}^{2l+1} \sin^2 \frac{\sigma_i q_i - \sigma_j q_j}{2}.$$

Следовательно, под знаком суммы в правой части (4.11) можно заменить функцию $V_{2l+1}[q]$ на функцию $U_{2l+1}[q]$, т.е.

$$n = 2l + 1,$$

$$g_n(r) = \frac{e^{-\frac{r}{\Lambda}}}{n! N^n} \sum_{[q]}^{(b)} \prod_{i=1}^n \left(\frac{e^{-r\gamma_i - \varphi_i}}{\text{sh } \gamma_i} \right) F_n^2[q], \quad (4.13)$$

$$F_n[q] = \prod_{i < j}^n \frac{\sin \frac{q_i - q_j}{2}}{\text{sh } \frac{\gamma_i + \gamma_j}{2}}, \quad F_1[q] = 1. \quad (4.14)$$

Функции $\gamma_i = \gamma(q_i)$ и $\varphi_i = \varphi(q_i)$ определены в (3.29).

Замечательным образом форма коэффициентов $g_n(r)$ и функции $F_n[q]$ оказывается одинаковой для ферро- и парамагнитной областей. Для ферромагнитной области корреляционная функция представляется в виде разложения по $g_n(r)$ с четными индексами, а для парамагнитной – с нечетными,

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = (\xi \xi_T) e^{-\frac{r}{\Lambda}} \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l}(r), \quad K > K_c, \quad (4.15)$$

$$\langle \sigma(\mathbf{r}_1) \sigma(\mathbf{r}_2) \rangle = \text{sh} \left(\frac{\gamma_0 + \gamma_\pi}{2} \right) (\xi \xi_T) e^{-\frac{r}{\Lambda}} \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l+1}(r), \quad K < K_c. \quad (4.16)$$

Отметим, что при выводе разложения функций $P(z)$ и $Q(z^{-1})$ в произведении (3.4) и (4.3) для определенности подразумевались четные значения N . Для нечетных N зона Бриллюэна не содержит точки $q = \pi$ в бозонном случае и, наоборот, это значение квазиимпульса появляется в фермионном спектре. Учесть такое различие несложно, на процессе вывода и на окончательном результате оно не сказывается.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модель Изинга на конечной решетке $M \times N$ интересна как сама по себе, так и как модель непертурбативной квантовой теории поля. В последнем случае нужно рассмотреть результат в скейлинговом режиме: $N, M, r \rightarrow \infty$, $K \rightarrow K_c$, $N\mu, M\mu, r\mu$ – константы.

Исходя из явных выражений, подобных полученным выше, можно в деталях проследить как термодинамический, так и скейлинговый пределы. Однако эти вопросы выходят за рамки данной статьи и будут рассмотрены в другой работе. Здесь же ограничимся несколькими замечаниями.

В скейлинговом пределе парная корреляционная функция МИ $\langle \sigma(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r}') \rangle$ соответствует двухточечной функции Грина $G^{(2)}(x, t; L, \beta)$ в квантово-полевой модели. Переменные, от которых зависит функция Грина, будем считать безразмерными, полагая массу $m = 1$; тогда $x = \mu|r_x - r'_x|$ – пространственная координата, $t = \mu|r_y - r'_y|$ – временная, $L = \mu M$ – объем, $\beta = \mu N$ – температура. Если по временной координате граничные условия являются вполне определенными (периодическими для бозонов, антипериодическими для фермионов), то для пространственной координаты они могут быть свободными, фиксированными, смешанными и т.п., т.е. зависят от конкретной задачи. В любом случае наличие границ явно нарушает лоренц-инвариантность (инвариантность относительно вращений в евклидовой метрике) и делает неравноправными временную и пространственную координаты. В частном случае периодических (антипериодических) граничных условий трансляционная инвариантность сохраняется. Задача, рассмотренная в данной статье, соответствует одновременной функции Грина $G^{(2)}(x, 0; \infty, \beta)$ в бесконечном объеме при конечной температуре. С некоторыми оговорками ее можно было бы рассматривать и как функцию Грина при нулевой температуре в конечном объеме (с периодическими граничными условиями), но имея в виду, что теперь это не одновременная, а “одноузловая” функция Грина $G^{(2)}(0, \tilde{t}; \tilde{L}, \infty)$. Чтобы построить одновременную функцию в конечном объеме при нулевой температуре, нужно рассмотреть задачу о корреляции спинов, расположенных на окружности цилиндра. Ее тоже можно решить способом, изложенным в настоящей работе, но при соответствующей модификации техники расчета теплических детерминантов. Имея оба точных результата для корреляций “вдоль” и “поперек” цилиндра, будет легче найти правильный ответ на вопрос о том, “одевают” ли формфактор тепловые флуктуации или оставляют “голым”. Рассмотренная в этой работе конфигурация спинов говорит скорее в пользу “голового” формфактора: “одеваются” промежуточные состояния.

Для анализа общего случая нужно рассматривать треугольную решетку, натянутую на тор, с разными параметрами связи вдоль сторон элементарного плакета и вычислять корреляторы вдоль трех главных осей. Эти задачи будут исследованы в других работах.

Несмотря на то что представления для корреляционной функции (4.15), (4.16) получены для разных областей параметра K ($K > K_c$ и $K < K_c$, соответственно), при любых конечных значениях размера решетки N каждое из них определено и справедливо при всех значениях K . И только в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ происходит разграничение областей применимости: $G_P(r)$ при $K < K_c$ и $G_F(r)$ при $K > K_c$.

Весьма приятной особенностью полученных представлений является то, что их можно проверить, рассматривая небольшие значения N , для которых легко получить выражения для корреляционных функций альтернативными способами. Так, например, при $N = 1$ решетка вырождается в цепочку, для которой с помощью элементарных вычислений находим

$$\langle \sigma(0)\sigma(r) \rangle = t^r. \quad (5.1)$$

После несложных преобразований можно убедиться, что оба выражения (4.15) и (4.16)

совпадают с (5.1).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матрица Теплица $A_{x,x'}$ — это матрица, элементы которой на диагоналях, параллельных главной диагонали, одинаковы:

$$A_{x,x'} = A_k \quad \text{при} \quad k = x - x' = 0, \pm 1, \dots, \pm r - 1, \quad (\text{П.1})$$

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \dots & A_{-r+1} \\ A_1 & A_0 & A_{-1} & \dots & A_{-r+2} \\ A_2 & A_1 & A_0 & \dots & A_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r-1} & A_{r-2} & A_{r-3} & \dots & A_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.2})$$

Верхний индекс в скобках указывает на размерность матрицы. Если задана функция от комплексной переменной $A(z)$, аналитичная в кольце $\alpha < |z| < \alpha^{-1}$ ($\alpha < 1$), такая, что коэффициенты разложения ее в ряд Лорана

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k \quad (\text{П.3})$$

совпадают с матричными элементами (П.2), то матрицу (П.1) можно представить в виде

$$A_{x,x'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'} A(z). \quad (\text{П.4})$$

Функцию $A(z)$ в интеграле (П.4) будем называть ядром матрицы $A^{(r)}$.

Если известна обратная матрица, то задача по вычислению определителя сводится к задаче по вычислению следа с помощью тождества

$$\ln \det A^{(r)}(\lambda) = \int d\lambda \operatorname{Sp} \left[(A^{(r)}(\lambda))^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} A^{(r)}(\lambda) \right] + \text{const}, \quad (\text{П.5})$$

где λ — параметр, от которого явно зависят матричные элементы.

Процедура обращения теплицевской матрицы упрощается, если наряду с функцией (П.3) и функция $\ln A(z)$ разлагается в ряд Лорана. В этом случае ядро $A(z)$ представимо в факторизованном виде

$$A(z) = P(z)Q(z^{-1}) \quad (\text{П.6})$$

с функциями $P(z)$, $Q(z)$, аналитичными внутри круга $|z| \leq \alpha^{-1}$:

$$\ln P(z) = \mathcal{P} \ln A(z), \quad \ln Q(z^{-1}) = \tilde{\mathcal{P}} \ln A(z). \quad (\text{П.7})$$

Проекционные операторы $\mathcal{P}$ и $\tilde{\mathcal{P}}$ выделяют аналитическую часть данной функции $v(z)$ внутри и вне круга $|z| = 1$, соответственно,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= \mathcal{P}, \quad \tilde{\mathcal{P}}^2 = \tilde{\mathcal{P}}, \quad \mathcal{P}\tilde{\mathcal{P}} = \tilde{\mathcal{P}}\mathcal{P} = 0, \quad \mathcal{P} + \tilde{\mathcal{P}} = 1, \\ \mathcal{P}v(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{d\xi v(\xi)}{\xi - z}, \quad \tilde{\mathcal{P}}v(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{d\xi v(\xi)}{z - \xi}. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Задачу по обращению теплицевой матрицы можно свести к решению системы интегральных уравнений Винера–Хопфа [16]. В терминах проекционных операторов (П.8) матричные элементы обратной матрицы $(A^{(r)})_{x,x'}^{-1}$ даются следующими выражениями:

$$(A^{(r)})_{x,x'}^{-1} = \mathcal{P} \frac{z^{r-x}}{Q(z^{-1})} \tilde{\mathcal{P}} w^{-1}(z) [1 - \tilde{\mathcal{P}} w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z)]^{-1} \mathcal{P} \frac{z^{x'}}{Q(z^{-1})} \Big|_{z=0}, \quad (\text{П.9})$$

$$(A^{(r)})_{x,x'}^{-1} = \mathcal{P} \frac{z^{-x}}{P(z)} \mathcal{P} w(z) [1 - \mathcal{P} w^{-1}(z) \tilde{\mathcal{P}} w(z)]^{-1} \tilde{\mathcal{P}} \frac{z^{x'-r}}{P(z)} \Big|_{z=0}, \quad (\text{П.10})$$

$$(A^{(r)})_{x,x'}^{-1} = \mathcal{P} \frac{z^{-x}}{P(z)} \left\{ 1 - \mathcal{P} [1 - w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z) \tilde{\mathcal{P}}]^{-1} w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z) \right\} \mathcal{P} \frac{z^{x'}}{Q(z^{-1})} \Big|_{z=0}, \quad (\text{П.11})$$

где

$$w(z) = z^r W(z), \quad W(z) = \frac{P(z)}{Q(z^{-1})}. \quad (\text{П.12})$$

Различные представления (П.9)–(П.11) для $(A^{(r)})_{x,x'}^{-1}$ имеют преимущества для конкретных вычислений матричных элементов, например, близких к главной диагонали или расположенных в правом верхнем или левом нижнем углах матрицы. В частности, для элемента $(A^{(r)})_{r-1,0}^{-1}$ удобно представление (П.9), а для элемента $(A^{(r)})_{0,0}^{-1}$ – представление (П.11):

$$(A^{(r)})_{r-1,0}^{-1} = \frac{1}{Q^2(0)} \left\{ z \tilde{\mathcal{P}} w^{-1}(z) [1 - \tilde{\mathcal{P}} w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z)]^{-1} \right\} \Big|_{z \rightarrow \infty}, \quad (\text{П.13})$$

$$(A^{(r)})_{0,0}^{-1} = \frac{1}{P(0)Q(0)} \left\{ 1 - \mathcal{P} [1 - w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z) \tilde{\mathcal{P}}]^{-1} w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z) \right\} \Big|_{z=0}. \quad (\text{П.14})$$

Разлагая обратные операторы, входящие в (П.13) и (П.14), в геометрическую прогрессию

$$\begin{aligned} [1 - \tilde{\mathcal{P}} w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z)]^{-1} &= \sum_{l=0}^{\infty} [\tilde{\mathcal{P}} w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z)]^l, \\ [1 - w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z) \tilde{\mathcal{P}}]^{-1} &= \sum_{l=0}^{\infty} [w(z) \mathcal{P} w^{-1}(z) \tilde{\mathcal{P}}]^l \end{aligned}$$

и используя для проекционных операторов $\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}}$ их интегральные представления (П.8), получим для (П.13) с учетом (П.12) следующее выражение:

$$(A^{(r)})_{r-1,0}^{-1} = \frac{1}{Q^2(0)} \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1}(r), \quad (\text{П.15})$$

$$a_{2l+1}(r) = \frac{1}{(2\pi i)^{2l+1}} \oint_{|z_i|<1} \frac{\prod_{i=1}^{2l+1} (dz_i z_i^r)}{z_1 z_{2l+1} \prod_{i=1}^{2l} (1 - z_i z_{i+1})} \frac{\prod_{i=1}^l W(z_{2i})}{\prod_{i=0}^l W(z_{2i+1}^{-1})}, \quad (\text{П.16})$$

в частности,

$$a_1(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz z^{r-2}}{W(z^{-1})},$$

$$a_3(r) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint_{|z_i|<1} \frac{d(z_1 z_2 z_3) (z_1 z_2 z_3)^r}{z_1 z_3 (1 - z_1 z_2) (1 - z_2 z_3)} \frac{W(z_2)}{W(z_1^{-1}) W(z_3^{-1})}.$$

Аналогично для (П.14) имеем

$$(A^{(r)})_{0,0}^{-1} = \frac{1}{P(0)Q(0)} \left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}(r) \right), \quad (\text{П.17})$$

$$a_{2l}(r) = \frac{1}{(2\pi i)^{2l}} \oint_{|z_i|<1} \frac{\prod_{i=1}^{2l} (dz_i z_i^r)}{z_1 z_{2l} \prod_{i=1}^{2l-1} (1 - z_i z_{i+1})} \frac{\prod_{i=1}^l W(z_{2i-1})}{\prod_{i=1}^l W(z_{2i}^{-1})}, \quad (\text{П.18})$$

в частности,

$$a_2(r) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z_i|<1} \frac{d(z_1 z_2) (z_1 z_2)^r}{z_1 z_2 (1 - z_1 z_2)} \frac{W(z_1)}{W(z_2^{-1})},$$

$$a_4(r) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \oint_{|z_i|<1} \frac{d(z_1 z_2 z_3 z_4) (z_1 z_2 z_3 z_4)^r}{z_1 z_4 (1 - z_1 z_2) (1 - z_2 z_3) (1 - z_3 z_4)} \frac{W(z_1) W(z_3)}{W(z_2^{-1}) W(z_4^{-1})}.$$

Рассмотрим теплицевскую матрицу $A^{(r)}(\lambda)$, зависящую от параметра λ ,

$$A_{x,x'}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'} P(z) Q^\lambda(z^{-1}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (\text{П.19})$$

где функции $P(z)$ и $Q(z)$ те же, что определяют ядро матрицы $A^{(r)}$. Из определения (П.19) видно, что при $\lambda = 1$

$$A_{x,x'}(1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'} P(z) Q(z^{-1}) = A_{x,x'},$$

а при $\lambda = 0$

$$A_{x,x'}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'} P(z). \quad (\text{П.20})$$

Матрица (П.20) является треугольной, все элементы которой справа от главной диагонали равны нулю,

$$A_{x,x}(0) = P(0), \quad A_{x,x'}(0) = 0 \quad \text{при} \quad x' > x,$$

стало быть

$$\det A^{(r)}(0) = P^r(0). \quad (\text{П.21})$$

С помощью (П.21) определяется постоянная интегрирования в (П.5). Выделим вклад $h(r)$ в $\ln \det A^{(r)}$, не убывающий с увеличением размерности матрицы,

$$\ln \det A^{(r)} = h(r) + \Delta h(r), \quad \Delta h(r) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

В этом случае задача сильно упрощается. Так, для обратной матрицы можно ограничиться первым членом в разложении обратного оператора в (П.10)

$$\begin{aligned} (A^{(r)}(\lambda))_{x,x'}^{-1} &= \mathcal{P} \frac{z^{-x}}{P(z)} \mathcal{P} \frac{z^r P(z)}{Q^\lambda(z^{-1})} \tilde{\mathcal{P}} \frac{z^{x'r}}{P(z)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^3} \oint_{|z_2| > |z_{1,3}|} \frac{d(z_1 z_2 z_3) z_1^{-x} \frac{z_2}{z_3} z_3^{-x'}}{z_1(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} \frac{P(z_2)}{P(z_1) Q^\lambda(z_2^{-1}) P(z_3)}. \end{aligned}$$

Для производной от матрицы (П.19) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} A_{x,x'}^{(r)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'} P(z) Q^\lambda(z^{-1}) \ln Q(z^{-1})$$

и для следа в (П.5) получаем

$$\begin{aligned} \text{Sp} \left[(A^{(r)}(\lambda))^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} A^{(r)}(\lambda) \right] &= \frac{1}{(2\pi i)^4} \oint_{|z_{2i}| > |z_{2j-1}|} \prod_{i=1}^4 dz_i \times \\ &\times \frac{[1 - (\frac{z_4}{z_1})^r] [1 - (\frac{z_3}{z_4})^r] (\frac{z_2}{z_3})^r}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)(z_4 - z_3)} \frac{P(z_2) P(z_4) Q^\lambda(z_4^{-1}) \ln Q(z_4^{-1})}{P(z_1) Q^\lambda(z_2^{-1}) P(z_3)} = \\ &= r \ln Q(0) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} dz \ln Q(z^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} \ln P(z) + o(r^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Как видно из (П.22), не убывающий с ростом r вклад в след оказывается не зависящим от параметра λ . Поэтому с учетом (П.21) получим

$$h(r) = r[\ln P(0) + \ln Q(0)] + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} dz \ln Q(z^{-1}) \frac{\partial}{\partial z} \ln P(z). \quad (\text{П.23})$$

Для вычисления $\Delta h(r)$ можно было бы воспользоваться формулой (П.5), удерживая следующие члены в разложении (П.10). Проще, однако, учитывая специфическое свойство матриц Теплица, а именно

$$(A^{(r+1)})_{0,0}^{-1} = \frac{\det A^{(r)}}{\det A^{(r+1)}},$$

а также выражение (П.17) для $(A^{(r)})^{-1}$, использовать следующее представление:

$$\begin{aligned} \det A^{(r)} &= \det A^{(r+k)} \prod_{s=r+1}^{r+k} (A^{(s)})_{0,0}^{-1} = \\ &= e^{h(r+k)+\Delta h(r+k)} [P(0)Q(0)]^{-k} \prod_{s=r+1}^{r+k} \left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}(s)\right). \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Из (П.23) следует, что

$$e^{h(r+k)} = [P(0)Q(0)]^k e^{h(r)}.$$

Поэтому вследствие явного сокращения множителей $P(0)$, $Q(0)$ в (П.24) можно перейти к пределу $k \rightarrow \infty$

$$\det A^{(r)} = G(r) e^{h(r)}, \quad (\text{П.25})$$

где

$$G(r) = \prod_{s=r+1}^{\infty} \left(1 - \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}(s)\right). \quad (\text{П.26})$$

Раскрывая произведение сумм в правой части (П.26)

$$G(r) = 1 - \sum_{s_1=r+1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}(s_1)\right) + \sum_{s_1=r+1}^{\infty} \sum_{s_2=s_1+1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}(s_1)\right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{2l}(s_2)\right) - \dots, \quad (\text{П.27})$$

выполняя суммирование по s_i и собирая члены с одинаковой кратностью интегралов, представим (П.27) в виде

$$G(r) = \sum_{l=0}^{\infty} g_{2l}(r). \quad (\text{П.28})$$

Коэффициенты $g_{2l}(r)$ можно непосредственно получать из (П.27). Удобнее, однако, рассчитывать их с помощью следующего рекуррентного соотношения, которое нетрудно вывести из (П.27):

$$g_{2l}(r) + \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{s=r+1}^{\infty} g_{2k}(s) a_{2(l-k)}(s) = 0. \quad (\text{П.29})$$

Используя для функций $a_{2l}(s)$ выражение (П.18) и начальное условие $g_0(s) = 1$, получим из (П.29)

$$g_{2l}(r) = \frac{(-1)^l}{l!l!(2\pi i)^{2l}} \oint_{|z_i|<1} \frac{\prod_{i=1}^{2l} (dz_i z_i^r) \prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l [(z_{2i-1} - z_{2j-1})^2 (z_{2i} - z_{2j})^2]}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=1}^l (1 - z_{2i-1} z_{2j})^2} \times \\ \times \frac{\prod_{i=1}^l W(z_{2i-1})}{\prod_{i=1}^l W(z_{2i}^{-1})}, \quad (\text{П.30})$$

в частности,

$$g_2(r) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|z_i|<1} \frac{d(z_1 z_2) (z_1 z_2)^r}{(1 - z_1 z_2)^2} \frac{W(z_1)}{W(z_2^{-1})}, \\ g_4(r) = -\frac{1}{4(2\pi i)^4} \oint_{|z_i|<1} \frac{d(z_1 z_2 z_3 z_4) (z_1 z_2 z_3 z_4)^r (z_1 - z_3)^2 (z_2 - z_4)^2}{(1 - z_1 z_2)^2 (1 - z_2 z_3)^2 (1 - z_3 z_4)^2 (1 - z_4 z_1)^2} \frac{W(z_1)W(z_3)}{W(z_2^{-1})W(z_4^{-1})}.$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (П.30) симметрично относительно перестановок между собой переменных интегрирования с четными индексами и относительно перестановок между собой переменных с нечетными индексами.

При вычислении корреляционной функции в парамагнитной области возникает необходимость в расчете определителя от теплицевской матрицы следующего вида:

$$B^{(r)} = \begin{pmatrix} A_{-1} & A_0 & A_1 & \dots & A_{r-2} \\ A_{-2} & A_{-1} & A_0 & \dots & A_{r-3} \\ A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & \dots & A_{r-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{-r} & A_{-r+1} & A_{-r+2} & \dots & A_{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.31}) \\ B_{x,x'} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} z^{-x+x'-1} A(z).$$

Непосредственно использовать технику, изложенную выше, здесь нельзя, поскольку ядро матрицы $B^{(r)}$

$$B(z) = z^{-1} A(z)$$

не удовлетворяет условию разложимости $\ln B(z)$ в ряд Лорана, если этому условию удовлетворяет $\ln A(z)$. Тем не менее задачу можно свести к предыдущей, заметив, что

из определения матричных элементов обратной матрицы через определитель и алгебраическое дополнение следует соотношение

$$\det B^{(r)} = (-1)^r (A^{(r+1)})_{r,0}^{-1} \det A^{(r+1)}.$$

Используя для обратной матрицы выражения (П.15), (П.16) и выражения (П.25), (П.28), (П.30) для определителя, получим

$$\det B^{(r)} = (-1)^r e^{h(r+1)} F(r), \quad (\text{П.32})$$

где

$$F(r) = G(r+1) (A^{(r+1)})_{r,0}^{-1} = \frac{1}{Q^2(0)} \sum_{l=0}^{\infty} f_{2l+1}(r), \quad (\text{П.33})$$

$$f_{2l+1}(r) = \sum_{k=0}^l a_{2k+1}(r+1) g_{2(l-k)}(r+1). \quad (\text{П.34})$$

Все слагаемые в правой части (П.34) являются интегралами кратности $2l+1$. После приведения подынтегральных выражений к общему знаменателю и симметризации отдельно по переменным с четными и нечетными индексами получим

$$\begin{aligned} f_{2l+1}(r) = & \frac{(-1)^l}{l!(l+1)!(2\pi i)^{2l+1}} \oint_{|z_i| < 1} \prod_{i=1}^{2l+1} (dz_i z_i^r) \times \\ & \times \frac{\prod_{i=1}^{l-1} \prod_{j=i+1}^l (z_{2i} - z_{2j})^2 \prod_{i=1}^l \prod_{j=i+1}^{l+1} (z_{2i-1} - z_{2j-1})^2}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=0}^l (1 - z_{2i} z_{2j+1})^2} \times \\ & \times \frac{\prod_{i=1}^l (z_{2i} W(z_{2i}))}{\prod_{i=0}^l (z_{2i+1} W(z_{2i+1}^{-1}))}. \end{aligned} \quad (\text{П.35})$$

В частности,

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz z^r}{z W(z^{-1})}, \\ f_3(r) &= -\frac{1}{2(2\pi i)^3} \oint_{|z_i| < 1} \frac{d(z_1 z_2 z_3) (z_1 z_2 z_3)^r (z_1 - z_3)^2}{(1 - z_1 z_2)^2 (1 - z_2 z_3)^2 (1 - z_3 z_1)^2} \frac{z_2 W(z_2)}{z_1 z_3 W(z_1^{-1}) W(z_3^{-1})}. \end{aligned}$$

Благодарности. Я выражаю благодарность В. Н. Шадуре за плодотворные обсуждения квантово-полевого содержания решеточных спиновых моделей и содействие в написании данной работы, а также О. Лисовому за помощь в получении симметризованных представлений для теплицевских детерминантов.

Работа выполнена благодаря поддержке программы INTAS (грант INTAS-97-1312).

Список литературы

- [1] *E. W. Montroll, R. A. Potts, J. C. Ward.* J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 308.
- [2] *B. M. McCoy.* The connection between statistical mechanics and quantum field theory. In: Statistical Mechanics and Field Theory. Eds. V. V. Barhanov, C. J. Burden. Singapore: World Scientific, 1995. P. 26.
- [3] *T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch.* Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 316.
- [4] *C. R. Nappi.* Nuovo Cimento A. 1978. V. 44. P. 392.
- [5] *J. Palmer, C. A. Tracy.* Adv. Appl. Math. 1981. V. 2. P. 329.
- [6] *B. Berg, M. Karowski, P. Weisz.* Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 2477.
- [7] *A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov.* Ann. Phys. 1979. V. 120. P. 253.
- [8] *F. A. Smirnov.* Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory. Adv. Series in Math. Phys. 14. Singapore: World Scientific, 1992.
- [9] *S. Sachdev.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 464. P. 576; cond-mat/9509147.
- [10] *А. Г. Изергин, Н. А. Китанин, Н. А. Славнов.* Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 224. С. 178.
- [11] *A. Leclair, F. Lesage, S. Sachdev, H. Saleur.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 482. P. 579.
- [12] *F. A. Smirnov.* Quasi-classical study of form factors in finite volume. hep-th/9802132, 1998.
- [13] *A. Leclair, G. Mussardo.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 552. P. 624.
- [14] *H. Saleur.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 567. P. 602.
- [15] *S. Lukyanov.* Finite temperature expectation values of local fields in sinh-Gordon model. hep-th/0005027, 2000.
- [16] *B. M. McCoy, T. T. Wu.* The Two-Dimensional Ising Model. Cambridge: Harvard University Press, 1973.
- [17] *В. Н. Плечко.* ТМФ. 1985. Т. 64. № 1. С. 150.
- [18] *Е. А. Бугрий.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 3. С. 441.
- [19] *А. И. Бугрий, В. Н. Шадура.* ЖЭТФ. 1996. Т. 109. № 3. С. 1024.
- [20] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 1.XI.2000 г.