Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Тютин, Общая форма $*$ -произведения на алгебре Грассмана, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 2, 253–267

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:58:01

ОБЩАЯ ФОРМА *-ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА АЛГЕБРЕ ГРАССМАНА

Изучается общий вид некоммутативного ассоциативного произведения на алгебре Грассмана, рассматриваемого как деформация обычного “поточечного” произведения. Показывается, что с точностью до преобразования подобия существует только одно такое произведение. Обсуждается связь алгебры $\mathcal{F}$ (алгебры элементов алгебры Грассмана с некоммутативным произведением в качестве произведения в алгебре $\mathcal{F}$) с алгеброй Клиффорда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоммутативное ассоциативное произведение функций на фазовом пространстве (далее *-произведение) часто встречается в физической литературе. Традиционной областью, где используется конструкция *-произведения, является задача квантования классической теории (скобки Пуассона) в случае, когда фазовое пространство является нетривиальным многообразием – так называемое геометрическое или деформационное квантование (см. [1] и цитированную там литературу). В последние годы обнаруживаются связи *-произведения и квантовых групп [2], [3]. С помощью *-произведения формулируются калибровочные теории на некоммутативных пространствах – некоммутативные калибровочные теории (см. [4], [5] и приведенные там ссылки).

Структура и свойства *-произведения на обычных (четных) многообразиях изучены довольно подробно [1], [6], [7]. Недавно была найдена [8] БРСТ-формулировка конструкции Федосова [9] для *-произведения на симплектических многообразиях. С другой стороны, *-произведение на супермногообразиях исследовано слабо. Нетрудно построить формальное обобщение некоммутативного произведения, введенного в [10], на суперслучай [11] (см. также [12]–[14]), однако обсуждение вопроса единственности *-произведения (единственности деформации “поточечного” произведения) в литературе отсутствует. В настоящей работе мы изучаем общий вид ассоциативного *-произведения, рассматриваемого как деформация “поточечного” произведения, на алгебре Грассмана

*Физический институт им. П. Н. Лебедева, Москва, Россия. E-mail: tyutin@lpi.ru

конечного числа образующих. Показано, что с точностью до преобразования подобия такое произведение всего одно.

Дальнейший план статьи следующий. В разделе 2 описана точная постановка задачи. В разделе 3 найдено решение условия ассоциативности, рассматриваемого как уравнение для $*$ -произведения. В разделе 4 доказана единственность (с точностью до преобразования подобия) $*$ -произведения и сформулирован основной результат работы. В разделе 5 рассмотрена связь алгебры $\mathcal{F}$ элементов алгебры Грассмана с $*$ -произведением в качестве произведения в алгебре $\mathcal{F}$ и алгеброй Клиффорда.

Приведем некоторые соглашения в обозначениях, встречающиеся в основном тексте. ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n$, – нечетные антикоммутирующие образующие алгебры Грассмана:

$$\varepsilon(\xi^\alpha) = 1, \quad \xi^\alpha \xi^\beta + \xi^\beta \xi^\alpha = 0, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha},$$

$\varepsilon(A)$ означает грассманову четность величины A ;

$$\begin{aligned} [\xi^\alpha]^0 &\equiv 1, & [\xi^\alpha]^k &\equiv \xi^{\alpha_1} \dots \xi^{\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n, & [\xi^\alpha]^k &= 0, \quad k > n, \\ [\partial_\alpha]^0 &\equiv 1, & [\partial_\alpha]^k &\equiv \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n, & [\partial_\alpha]^k &= 0, \quad k > n, \\ [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k &\equiv \overleftarrow{\partial}_{\alpha_1} \dots \overleftarrow{\partial}_{\alpha_k}, \\ T_{\dots[\alpha]_k \dots} &\equiv T_{\dots\alpha_1 \dots \alpha_k \dots}, & T_{\dots\alpha_i \alpha_{i+1} \dots} &= -T_{\dots\alpha_{i+1} \alpha_i \dots}, \quad i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим грассманову алгебру $\mathcal{G}_K$ над полем $K = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ с образующими ξ^α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Общий элемент f алгебры (функция от образующих) имеет вид

$$f \equiv f(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f_{[\alpha]_k} [\xi^\alpha]^k, \quad f_{[\alpha]_0} \equiv f_0, f_{[\alpha]_k} \in K, \quad \forall k.$$

Введем также базис $\{e^I\}$ в алгебре $\mathcal{G}_K$:

$$\begin{aligned} I &= 0, \alpha_i, \alpha_{i_1} \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}, \dots, & i_1 < i_2 < \dots < i_k, \\ e^0 &= 1, & e^{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}} &= \xi^{\alpha_{i_1}} \xi^{\alpha_{i_2}} \dots \xi^{\alpha_{i_k}}, & k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Базис содержит 2^n элементов. Произвольный элемент f алгебры $\mathcal{G}_K$ можно однозначно представить в виде

$$f = \sum_I f_I e^I, \quad f_I \in K. \tag{2}$$

Интеграл по образующим нормирован следующим образом:

$$\begin{aligned} \int d\xi [\xi^\alpha]^k &= 0, \quad k \leq n-1, & \int d\xi [\xi^\alpha]^n &= \varepsilon^{[\alpha]_n}, & \varepsilon(d\xi) &= n \pmod{2}. \\ \int d\xi' \delta(\xi - \xi') f(\xi') &= f(\xi), & \varepsilon(\delta(\xi)) &= n \pmod{2}. \end{aligned}$$

Мы будем интересоваться общим видом ассоциативных четных *-произведений произвольных элементов f_1, f_2 :

$$f_3(\xi) = f_1 * f_2(\xi) \equiv P(\xi|f_1, f_2),$$

т.е. билинейных отображений $\mathcal{G}_K \times \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{G}_K$, удовлетворяющих уравнению ассоциативности:

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3, \quad (3)$$

и свойству четности:

$$\varepsilon(f_1 * f_2) = \varepsilon(f_1) + \varepsilon(f_2) \pmod{2}.$$

Уравнение ассоциативности (3) будем решать в терминах рядов по параметру деформации $\hbar$:

$$* = \sum_{k=0} \hbar^k *_k, \quad (4)$$

где $*_0$ -произведение (граничное условие) является обычным “поточечным” произведением:

$$f_1 *_0 f_2(\xi) = f_1(\xi)f_2(\xi). \quad (5)$$

Таким образом, мы рассматриваем задачу отыскания общего вида возможных четных ассоциативных деформаций “поточечного” произведения на алгебре Грассмана.

Нетрудно проверить, что *-произведение (как и любое билинейное отображение) можно записать в форме координатного представления

$$f_3(\xi) = \int d\xi_2 d\xi_1 P(\xi|\xi_1, \xi_2) f_1(\xi_1) f_2(\xi_2), \quad \varepsilon(P(\xi|\xi_1, \xi_2)) = 0, \quad (6)$$

с некоторой функцией (ядром) $P(\xi|\xi_1, \xi_2)$ или в форме импульсного представления

$$f_3(\xi) = f_1(\xi) \sum_{k_1, k_2=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\beta]^{k_1} P^{[\beta]_{k_1} | [\gamma]_{k_2}}(\xi) [\partial_\gamma]^{k_2} f_2(\xi),$$

$$\varepsilon(P^{[\beta]_{k_1} | [\gamma]_{k_2}}(\xi)) = k_1 + k_2 \pmod{2},$$

с некоторыми коэффициентными функциями $P^{[\beta]_{k_1} | [\gamma]_{k_2}}(\xi)$.

Пусть имеется некоторое ассоциативное четное *-произведение и пусть T – неособенное четное линейное отображение $\mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{G}_K$:

$$Tf(\xi) \equiv T(\xi|f) = \int d\xi_1 T(\xi|\xi_1) f(\xi_1) = \sum_{k=0}^n T^{[\alpha]_k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f(\xi),$$

$$\varepsilon(T(\xi|\xi_1)) = n \pmod{2}, \quad \varepsilon(T^{[\alpha]_k}(\xi)) = k \pmod{2}.$$

Тогда $*_T$ -произведение

$$f_1 *_T f_2(\xi) = P_T(\xi|f_1, f_2) \equiv T^{-1}(Tf_1 * Tf_2)(\xi)$$

также является ассоциативным четным произведением. Мы будем говорить, что такие $*_T$ -произведение и $*$ -произведение (T -)эквивалентны или связаны (T -)преобразованием подобия. Отметим, что неособенные четные замены образующих

$$\begin{aligned} T_\eta \xi^\alpha &= \eta^\alpha(\xi), & T_\eta^{-1} \xi^\alpha &= T_\zeta \xi^\alpha = \zeta^\alpha(\xi), & T_\eta f(\xi) &= f(\eta(\xi)), \\ T_\eta^{-1} f(\xi) &= T_\zeta f(\xi) = f(\zeta(\xi)) \end{aligned} \quad (7)$$

(где $\zeta^\alpha(\xi)$ отвечают обратной замене: $\eta^\alpha(\zeta(\xi)) = \xi^\alpha$, $\varepsilon(\eta^\alpha) = \varepsilon(\zeta^\alpha) = 1$) принадлежат операторам T , генерирующим преобразования подобия. При этом произвольная неособенная четная замена может быть представлена в виде

$$T = e^{u^\alpha(\xi) \partial_\alpha}$$

с некоторыми функциями $u^\alpha(\xi)$, $\varepsilon(u^\alpha(\xi)) = 1$.

Для деформации первого порядка $*_1$ уравнение ассоциативности принимает вид

$$(f_1 *_1 (f_2 f_3))(\xi) + f_1(\xi)(f_2 *_1 f_3)(\xi) - (f_1 *_1 f_2)(\xi)f_3(\xi) - ((f_1 f_2) *_1 f_3)(\xi) = 0. \quad (8)$$

Тривиальным решением уравнения (8) является $*_{1 \text{ трив}}$ – приближение первого порядка для $*_0 T$ -произведения, полученного из обычного произведения T -преобразованием подобия с $T = I + \hbar t_1 + O(\hbar^2)$, I означает тождественное отображение. Это решение имеет вид

$$f_1 *_1 \text{ трив} f_2 = (t_1 f_1) f_2 + f_1 (t_1 f_2) - t_1 (f_1 f_2). \quad (9)$$

Задача состоит в описании всех нетривиальных решений уравнения (8). Этого окажется достаточно для описания всех решений уравнения ассоциативности (3).

Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = \sum_{\oplus} \mathcal{A}_k$ четных k -линейных функционалов $\Phi_k(\xi|f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{A}_k$ (k -линейных отображений $(\mathcal{G}_K \times)^k \rightarrow \mathcal{G}_K$), $\varepsilon(\Phi_k(\xi|f_1, \dots, f_k)) = \varepsilon(f_1) + \dots + \varepsilon(f_k) \pmod{2}$, $k \geq 1$, $\mathcal{A}_0 = K$, с (некоммутативным) умножением (отображением $\mathcal{A}_k \times \mathcal{A}_p \rightarrow \mathcal{A}_{k+p}$)

$$\Phi_k \Psi_p(\xi|f_1, \dots, f_{k+p}) = \Phi_k(\xi|f_1, \dots, f_k) \Psi_p(\xi|f_{k+1}, \dots, f_{k+p}).$$

В этой алгебре существуют естественная градуировка $g: g(\Phi_k) = k$, превращающая алгебру $\mathcal{A}$ в градуированную алгебру: $g(\mathcal{A}_k) = k$, и линейный оператор d_H – дифференциал, кограничный оператор Хохшильда $\mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_{k+1}$, $g(d_H) = 1$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} d_H \Phi_k(\xi|f_1, \dots, f_{k+1}) &= f_1(\xi) \Phi_k(\xi|f_2, \dots, f_{k+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^k (-1)^i \Phi_k(\xi|f_1, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, \dots, f_{k+1}) + \\ &+ (-1)^{k+1} \Phi_k(\xi|f_1, \dots, f_k) f_{k+1}(\xi), \\ d_H \mathcal{A}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что оператор d_H является градуированно нечетным дифференцированием:

$$d_H(\Phi_k \Psi_p) = (d_H \Phi_k) \Psi_p + (-1)^{g(\Phi_k)} \Phi_k d_H \Psi_p,$$

и нильпотентен:

$$d_H^2 = 0.$$

В терминах оператора d_H уравнения (8) и (9) переписываются следующим образом:

$$d_H *1 = 0, \quad (10)$$

$$*1_{\text{трив}} = d_H t_1, \quad (11)$$

т.е. $*1$ принадлежит второй группе когомологий Хохшильда, а тривиальные деформации первого порядка “поточечного” произведения являются кограницами, т.е. принадлежат нулевой когомологии Хохшильда.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ АССОЦИАТИВНОСТИ

Найдем общее решение уравнения (8) для деформации “поточечного” произведения в первом порядке по $\hbar$. Мы будем следовать методу [15]. Удобно использовать координатное представление (6). Уравнение ассоциативности (3) для *-произведения сводится к следующему уравнению для ядра:

$$\int d\xi_4 P(\xi|\xi_4, \xi_3) P(\xi_4|\xi_1, \xi_2) = (-1)^n \int d\xi_4 P(\xi|\xi_1, \xi_4) P(\xi_4|\xi_2, \xi_3). \quad (12)$$

С учетом граничного условия ядро *-умножения имеет следующее разложение в ряд по $\hbar$:

$$P(\xi|\xi_1, \xi_2) = \delta(\xi - \xi_1) \delta(\xi - \xi_2) + \hbar m_1(\xi|\xi_1, \xi_2) + O(\hbar^2).$$

Из (12) вытекает уравнение для ядра m_1 :

$$\begin{aligned} \delta(\xi_1) \tilde{m}_1(\xi|\xi_2, \xi_3) + \delta(\xi_3 - \xi_2) \tilde{m}_1(\xi|\xi_1, \xi_3) = \\ = \delta(\xi_3) \tilde{m}_1(\xi|\xi_1, \xi_2) + \delta(\xi_1 - \xi_2) \tilde{m}_1(\xi|\xi_1, \xi_3), \\ \tilde{m}_1(\xi|\xi_1, \xi_2) \equiv m_1(\xi|\xi_1 + \xi, \xi_2 + \xi). \end{aligned} \quad (13)$$

Умножим уравнение (13) на ξ_1^α и проинтегрируем по $d\xi_1$. Получим соотношение

$$\begin{aligned} \xi_1^\alpha \tilde{m}_1(\xi|\xi_1, \xi_2) &= [(-1)^n \delta(\xi_1 - \xi_2) - \delta(\xi_2)] a_1^\alpha(\xi|\xi_1), \\ a_1^\alpha(\xi|\xi_1) &= \int d\xi_2 \xi_2^\alpha \tilde{m}_1(\xi|\xi_2, \xi_1), \quad \varepsilon(a_1^\alpha) = n + 1 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Умножая соотношение (14) на ξ_1^β и учитывая антисимметрию левой части получающегося равенства по α и β , находим

$$[(-1)^n \delta(\xi_1 - \xi_2) - \delta(\xi_2)](\xi_1^\alpha a_1^\beta(\xi|\xi_1) + \xi_1^\beta a_1^\alpha(\xi|\xi_1)) = 0,$$

откуда следует

$$\xi_1^\alpha a_1^\beta(\xi|\xi_1) + \xi_1^\beta a_1^\alpha(\xi|\xi_1) = -2\delta(\xi_1)\omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \quad (15)$$

с некоторой функцией $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi)$, $\omega_1^{\alpha\beta} = \omega_1^{\beta\alpha}$, $\varepsilon(\omega_1^{\alpha\beta}) = 0$. Представим функцию $a_1^\alpha(\xi|\xi_1)$ в виде

$$a_1^\alpha(\xi|\xi_1) = -\omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_1^\beta} \delta(\xi_1) + \bar{a}_1^\alpha(\xi|\xi_1).$$

Из уравнения (15) получаем

$$\xi_1^\alpha \bar{a}_1^\beta(\xi|\xi_1) + \xi_1^\beta \bar{a}_1^\alpha(\xi|\xi_1) = 0,$$

откуда находим

$$\bar{a}_1^\alpha(\xi|\xi_1) = \xi_1^\alpha \bar{a}_1(\xi|\xi_1), \quad \varepsilon(\bar{a}_1) = n \pmod{2}.$$

Подставляя найденное представление для a_1^α в соотношение (14), получаем

$$\xi_1^\alpha \tilde{m}_1(\xi|\xi_1, \xi_2) = \xi_1^\alpha \left[\delta(\xi_1 - \xi_2) \bar{a}_1(\xi|\xi_1) - (-1)^n \delta(\xi_2) \bar{a}_1(\xi|\xi_1) + \delta(\xi_1) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi_1^\beta}} \omega_1^{\beta\gamma}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_2^\gamma} \delta(\xi_2) \right],$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \tilde{m}_1(\xi|\xi_1, \xi_2) &= \delta(\xi_1 - \xi_2) \bar{a}_1(\xi|\xi_1) - (-1)^n \delta(\xi_2) \bar{a}_1(\xi|\xi_1) + \delta(\xi_1) \bar{b}_1(\xi|\xi_2) + \\ &+ \delta(\xi_1) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi_1^\beta}} \omega_1^{\beta\gamma}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_2^\gamma} \delta(\xi_2) \end{aligned}$$

с некоторой функцией $\bar{b}_1(\xi|\xi_2)$, $\varepsilon(\bar{b}_1) = n \pmod{2}$.

Таким образом, деформация “поточечного” произведения в первом порядке по $\hbar$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} f_1 * f_2(\xi) &= m_1(\xi|f_1, f_2) = \\ &= f_1(\xi) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \alpha}} \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + f_1(\xi) t_1(\xi|f_2) - t_1(\xi|f_1 f_2) + \\ &+ t_1(\xi|f_1) f_2(\xi) + c_1(\xi|f_1 f_2) - c_1(\xi|f_1) f_2(\xi), \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} t_1(\xi|\xi_1) &= \bar{b}_1(\xi|\xi_1 - \xi), & c_1(\xi|\xi_1) &= \bar{a}_1(\xi|\xi_1 - \xi) + \bar{b}_1(\xi|\xi_1 - \xi), \\ t_1(\xi|f) &\equiv \int d\xi_1 t_1(\xi|\xi_1) f(\xi_1), & c_1(\xi|f) &\equiv \int d\xi_1 c_1(\xi|\xi_1) f(\xi_1). \end{aligned}$$

Подставляя найденное представление для $*_1$ -произведения в уравнение (8) (или в (13)), получаем

$$f_1(\xi)[c_1(\xi|f_2f_3) - c_1(\xi|f_2)f_3(\xi)] = 0$$

или

$$c_1(\xi|f_1f_2) - c_1(\xi|f_1)f_2(\xi) = 0.$$

Проверим, что выражение $f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi)$ не может быть представлено в виде $d_H t(\xi|f_1, f_2)$. Воспользуемся для функционала $t(\xi|f)$ импульсным представлением

$$t(\xi|f) = \sum_{k=0} t^{[\alpha]_k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f(\xi), \quad \varepsilon(t^{[\alpha]_k}) = k \pmod{2}.$$

Слагаемое в $d_H t(\xi|f_1, f_2)$, имеющее полный порядок производных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$, равный 2, может возникнуть только из слагаемого в $t(\xi|f)$ с коэффициентом $t^{[\alpha]_2}(\xi)$. Выбирая

$$t(\xi|f) = \frac{1}{2} t^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\alpha \partial_\beta f(\xi), \quad t^{\alpha\beta} = -t^{\beta\alpha}, \quad \varepsilon(t^{\alpha\beta}) = 0,$$

получаем, что должно выполняться равенство

$$f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) = d_H t(\xi|f_1, f_2) = f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha t^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi),$$

или

$$\omega_1^{\alpha\beta}(\xi) = t^{\alpha\beta}(\xi).$$

Последнее равенство возможно только при $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi) = 0$, поскольку $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi)$ – симметричная матрица, а $t^{\alpha\beta}(\xi)$ – антисимметричная матрица.

Окончательно мы нашли, что общее решение уравнения (8) имеет вид

$$\begin{aligned} f_1 *_1 f_2(\xi) &= m_1(\xi|f_1, f_2) = \\ &= f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + f_1(\xi) t_1(\xi|f_2) - t_1(\xi|f_1 f_2) + t_1(\xi|f_1) f_2(\xi) = \\ &= f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + d_H t_1(\xi|f_1, f_2). \end{aligned}$$

Выполним над $*$ -произведением преобразование подобия:

$$f_1 * f_2 \longrightarrow f_1 *_{T_1} f_2 = T_1^{-1}(T_1 f_1 * T_1 f_2),$$

с оператором T_1 , равным¹⁾

$$T_1 = e^{-\hbar \hat{t}_1}.$$

¹⁾Заметим, что преобразование подобия “поточечного” произведения $*_0$ с оператором $T = 1 + \hbar t_1 + 0(\hbar^2)$ имеет вид $*_{0T} = *_0 + \hbar d_H t_1 + O(\hbar^2)$.

Нетрудно проверить, что P_{T_1} имеет следующее разложение в ряд по $\hbar$:

$$\begin{aligned} P_{T_1}(\xi|f_1, f_2) &= f_1(\xi)f_2(\xi) + \hbar m_1(\xi|f_1, f_2) - \\ &\quad - \hbar d_H t_1(\xi|f_1, f_2) + \hbar^2 m_{T_1 2}(\xi|f_1, f_2) + O(\hbar^3) = \\ &= f_1(\xi)f_2(\xi) + \hbar f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + \\ &\quad + \hbar^2 m_{T_1 2}(\xi|f_1, f_2) + O(\hbar^3). \end{aligned} \quad (16)$$

Далее индекс “ T_1 ” у $*_{T_1}$ -произведения и у ядер P_{T_1} и $m_{T_1 2}$ мы опустим.

Для дальнейшего полезно ввести $*$ -коммутатор $[f_1, f_2]_*(\xi)$ двух функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$:

$$[f_1, f_2]_*(\xi) \equiv \frac{1}{2\hbar} (f_1 * f_2(\xi) - (-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_2)} f_2 * f_1(\xi)),$$

и определить якобиан $J(\xi|f_1, f_2, f_3)$ трех функций $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ и $f_3(\xi)$:

$$J(\xi|f_1, f_2, f_3) \equiv (-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)} [[f_1, f_2]_* f_3]_*(\xi) + \text{цикл } (1, 2, 3). \quad (17)$$

Как следствие уравнения ассоциативности (3) имеет место соотношение

$$J(\xi|f_1, f_2, f_3) = 0 \quad (18)$$

($*$ -коммутатор удовлетворяет тождеству Якоби).

Непосредственное вычисление якобиана $J(\xi|f_1, f_2, f_3)$ для $*$ -произведения (16) дает

$$\begin{aligned} J(\xi|f_1, f_2, f_3) &= -(-1)^{\varepsilon(f_2)+\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)} \Omega_1^{\alpha\beta\gamma}(\xi) \partial_\alpha f_1(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) \partial_\gamma f_3(\xi) + O(\hbar), \\ \Omega_1^{\alpha\beta\gamma}(\xi) &= \omega_1^{\alpha\delta}(\xi) \partial_\delta \omega_1^{\beta\gamma}(\xi) + \omega_1^{\gamma\delta}(\xi) \partial_\delta \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) + \omega_1^{\beta\delta}(\xi) \partial_\delta \omega_1^{\gamma\alpha}(\xi). \end{aligned}$$

Из уравнения (18) следует, что функция $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi)$ удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\omega_1^{\alpha\delta}(\xi) \partial_\delta \omega_1^{\beta\gamma}(\xi) + \omega_1^{\gamma\delta}(\xi) \partial_\delta \omega_1^{\alpha\beta}(\xi) + \omega_1^{\beta\delta}(\xi) \partial_\delta \omega_1^{\gamma\alpha}(\xi) = 0.$$

Отметим, что при замене образующих $\xi^\alpha \rightarrow \eta^\alpha(\xi)$ функция $\omega^{\alpha\beta}(\xi)$ преобразуется как тензор в следующем смысле. Пусть оператор T_η (см. (7)) описывает замену образующих. Разложение в ряд по $\hbar$ $*$ -произведения $T_\eta^{-1} P(\xi|T_\eta f_1, T_\eta f_2)$, где $P(\xi|f_1, f_2)$ задается формулой (16), есть

$$\begin{aligned} T_\eta^{-1} P(\xi|T_\eta f_1, T_\eta f_2) &= f_1(\xi)f_2(\xi) + \hbar f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_1^{\prime\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + O(\hbar^2), \\ \omega_1^{\prime\alpha\beta}(\xi) &= \xi^\alpha \overleftarrow{\partial}_{\zeta^\gamma} \omega_1^{\gamma\delta}(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta^\delta} \xi^\beta. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, тензорная функция $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi)$ является симплектической метрикой скобки Пуассона. Мы предположим, что метрика $\omega_1^{\alpha\beta}$ невырождена. Как известно, в этом

случае существует замена образующих $\xi^\alpha \rightarrow \eta^\alpha(\xi)$, приводящая симплектическую метрику к каноническому виду

$$\omega_1'^{\alpha\beta}(\xi) = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad (20)$$

где $\lambda_\alpha = 1$ в случае алгебры Грассмана над комплексными числами ($\mathcal{G}_\mathbb{C}$) и $\lambda_\alpha = \pm 1$ в случае алгебры Грассмана над вещественными числами ($\mathcal{G}_\mathbb{R}$). Мы будем считать, что соответствующее преобразование подобия выполнено, так что тензорная функция в формуле (16) имеет канонический вид (20).

Введем оператор

$$Q_\lambda = \sum_\alpha \lambda_\alpha \overleftarrow{\partial}_\alpha \partial_\alpha.$$

Представим *-произведение в виде

$$P(\xi|f_1, f_2) = P_G^{\hbar\lambda}(\xi|f_1, f_2) + \hbar^2 m'_2(\xi|f_1, f_2) + O(\hbar^3), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} P_G^{\hbar\lambda}(\xi|f_1, f_2) &\equiv f_1 *_{G(\hbar\lambda)} f_2(\xi) = f_1(\xi) e^{\hbar Q_\lambda} f_2(\xi) = \\ &= f_1(\xi) f_2(\xi) + \hbar f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha f_2(\xi) + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (22)$$

удовлетворяет уравнению ассоциативности (см. приложение). Подставляя разложение (21) в уравнение (12), получим, что ядро m'_2 удовлетворяет в точности уравнению (13), откуда следует

$$m'_2(\xi|f_1, f_2) = f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_2^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + d_H t_2(\xi|f_1, f_2)$$

с некоторой функцией $\omega_2^{\alpha\beta}(\xi) = \omega_2^{\beta\alpha}(\xi)$, $\varepsilon(\omega_2^{\alpha\beta}) = 0$, и ядром $t_2(\xi|\xi_1)$, $\varepsilon(t_2) = n \pmod{2}$. Слагаемое $d_H t_2(\xi|f_1, f_2)$ может быть удалено преобразованием подобия с оператором $T = \exp(-\hbar^2 \hat{t}_2)$. Предполагая, что это преобразование подобия уже выполнено, получаем, что *-умножение можно представить в виде

$$P(\xi|f_1, f_2) = P_G^{\hbar\lambda}(\xi|f_1, f_2) + \hbar^2 f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_2^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + \hbar^3 m'_3(\xi|f_1, f_2) + O(\hbar^4). \quad (23)$$

Пусть показано, что после соответствующего преобразования подобия *-произведение можно представить в виде

$$\begin{aligned} P(\xi|f_1, f_2) &= P_G^{\hbar\lambda}(\xi|f_1, f_2) + \hbar^k f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega_k^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) + \\ &+ \hbar^{k+1} m_{k+1}(\xi|f_1, f_2) + O(\hbar^{k+2}), \\ \omega_k^{\alpha\beta} &= \omega_k^{\beta\alpha}, \quad \varepsilon(\omega_k^{\alpha\beta}) = 0, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (24)$$

Непосредственное вычисление якобиана $J(\xi|f_1, f_2, f_3)$ для такого $*$ -произведения (24) дает

$$J(\xi|f_1, f_2, f_3) = -(-1)^{\varepsilon(f_2)+\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)} \hbar^{k-1} \Omega_k^{\alpha\beta\gamma}(\xi) \partial_\alpha f_1(\xi) \partial_\beta f_2(\xi) \partial_\gamma f_3(\xi) + O(\hbar^k),$$

$$\Omega_k^{\alpha\beta\gamma}(\xi) = \lambda_\alpha \partial_\alpha \omega_k^{\beta\gamma}(\xi) + \lambda_\gamma \partial_\gamma \omega_k^{\alpha\beta}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta \omega_k^{\gamma\alpha}(\xi).$$

Из уравнения (18) следует, что функция $\omega_k^{\alpha\beta}(\xi)$ удовлетворяет соотношению (тождеству Бианки)

$$\lambda_\alpha \partial_\alpha \omega_k^{\beta\gamma}(\xi) + \lambda_\gamma \partial_\gamma \omega_k^{\alpha\beta}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta \omega_k^{\gamma\alpha}(\xi) = 0,$$

откуда находим

$$\omega_k^{\alpha\beta}(\xi) = \lambda_\alpha \partial_\alpha \omega_k^\beta(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta \omega_k^\alpha(\xi), \quad \varepsilon(\omega_k^\alpha) = 1.$$

Выполним преобразование подобия $*$ -произведения (24), выбирая в качестве T оператор $T = \exp(-\hbar^{k-1} \omega_k^\alpha(\xi) \partial_\alpha)$. Воспользовавшись соотношениями

$$e^{-\hat{t}}(e^{\hat{t}} f_1(\xi) e^{\hat{t}} f_2(\xi)) = f_1(\xi) f_2(\xi), \quad \hat{t} = \omega^\alpha(\xi) \partial_\alpha, \quad \varepsilon(\omega^\alpha) = 1,$$

$$e^{-\hbar^k \hat{t}} P_G^{\hbar\lambda}(\xi|e^{\hbar^k \hat{t}} f_1, e^{\hbar^k \hat{t}} f_2) = P_G^{\hbar\lambda}(\xi|f_1, f_2) + \hbar^{k+1} f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha (\lambda_\alpha \partial_\alpha \omega^\beta(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta \omega^\alpha(\xi)) \partial_\beta f_2(\xi) + O(\hbar^{k+2}), \quad k \geq 1,$$

получаем, что преобразованное $*$ -произведение имеет вид (индекс T опускаем)

$$P(\xi|f_1, f_2) = P_G^{\hbar\lambda}(\xi|f_1, f_2) + \hbar^{k+1} m'_{k+1}(\xi|f_1, f_2) + O(\hbar^{k+2}),$$

а m'_{k+1} удовлетворяет уравнению (13). Далее остается применить метод индукции.

Таким образом, мы показали, что произвольное ассоциативное $*$ -произведение на алгебре Грассмана с граничным условием (5) может быть получено из $*_{G(\hbar\lambda)}$ -произведения с помощью преобразования подобия.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ

Итак, выше мы установили, что преобразованиями подобия, генерируемыми операторами типа

$$T = T_\eta(1 + \hbar t_1 + O(\hbar^2)) \quad (25)$$

(T_η – оператор неособенной замены образующих), произвольное $*$ -произведение с граничным условием (5) и неособенной симплектической метрикой в деформации первого порядка может быть приведено к форме $*_{G(\hbar\lambda)}$ -произведения. Существенно, что преобразованиями подобия такого типа невозможно трансформировать $*$ -произведение с невырожденным тензором $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi)$ к “поточечному” произведению, поскольку t_1 не дает вклада в $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi)$, а T_η не меняет свойства невырожденности тензора $\omega_1^{\alpha\beta}(\xi)$ (см. (19)). Существуют ли преобразования подобия, генерируемые операторами T более общего

вида, с помощью которых $*_{G(\hbar\lambda)}$ -произведение можно свести к “поточечному”? Мы сейчас покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный.

Действительно, произвольный неособенный оператор T может быть представлен в форме

$$T = T'(1 + O(\hbar))$$

с некоторым неособенным оператором $T' = T|_{\hbar=0}$. В силу граничного условия для $*$ -произведения (см. (4) и (5)) T' -преобразование подобия должно оставлять инвариантным “поточечное” произведение, т.е. оператор T' должен удовлетворять уравнению

$$T'(\xi|f_1)T'(\xi|f_2) = T'(\xi|f_1f_2). \quad (26)$$

Покажем, что общее решение уравнения (26) дается неособенными заменами образующих:

$$T'(\xi|f) = T_\eta(\xi|f) = f(\eta(\xi)),$$

с некоторыми функциями $\eta^\alpha(\xi)$, $\varepsilon(\eta^\alpha) = 1$.

Положим $f_2(\xi) = 1$. Из (26) следует

$$T'(\xi|f_1)(1 - T'(\xi|1)) = 0 \implies T'(\xi|1) = \int d\xi' T'(\xi|\xi') = 1,$$

поскольку мы предполагаем, что T' – обратимый оператор.

Далее, выберем $f_1(\xi) = \exp(\xi^\alpha p_\alpha)$, $f_2(\xi) = \exp(\xi^\alpha q_\alpha)$, p_α и q_α – нечетные образующие (в более широкой алгебре Грассмана), и введем обозначение

$$\int d\xi f(\xi) e^{\xi^\alpha p_\alpha} \equiv \tilde{f}(p).$$

Из соотношения (26) следует

$$\tilde{T}'(\xi|p)\tilde{T}'(\xi|q) = \tilde{T}'(\xi|p+q), \quad \tilde{T}'(\xi|0) = 1,$$

откуда получаем

$$\tilde{T}'(\xi|p) = e^{\eta^\alpha(\xi)p_\alpha}, \quad \eta^\alpha(\xi) \equiv \tilde{T}'(\xi|p) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_\alpha} \Big|_{p=0}.$$

Восстанавливая оператор $T'(\xi|\xi')$ по его фурье-образу $\tilde{T}'(\xi|p)$, находим

$$T'(\xi|\xi') = \delta(\eta(\xi) - \xi').$$

Таким образом доказана

ТЕОРЕМА. *Произвольное ассоциативное *-произведение на алгебре Грассмана $\mathcal{G}_K$ с граничным условием (5) и невырожденной симплектической метрикой, появляющейся в деформации первого порядка $*_1$, эквивалентно (связано преобразованием подобия) *-произведению $P_G^{\hbar\lambda}(\xi|f_1, f_2)$, которое при $\hbar \neq 0$ не эквивалентно “поточечному” произведению.*

Отметим также, что $*_{G(\hbar\lambda)}$ -произведения с разными значениями параметра $\hbar$ могут быть связаны преобразованием подобия (генерируемым преобразованием растяжения образующих ξ^α).

5. СВЯЗЬ С АЛГЕБРОЙ КЛИФФОРДА

В этом разделе будет установлена связь между алгеброй $\mathcal{F}_K$ – алгеброй элементов (функций от образующих) алгебры Грассмана $\mathcal{G}_K$ с $*$ -произведением в качестве произведения в $\mathcal{F}_K$ – и алгеброй Клиффорда $\mathcal{K}_K$ над полем K .

Вначале в качестве произведения в алгебре $\mathcal{F}_K$ мы возьмем $*_{G(\lambda)}$ -произведение²⁾. Случай произвольного $*$ -произведения будет прокомментирован в конце раздела.

Нетрудно проверить, что для $*_{G(\lambda)}$ -произведения выполняются соотношения

$$c *_{G(\lambda)} f(\xi) = f *_{G(\lambda)} c(\xi) = cf(\xi) \quad (27)$$

для произвольных функции $f(\xi)$ и константы c ,

$$\xi^{\alpha_1} *_{G(\lambda)} \xi^{\alpha_2} *_{G(\lambda)} \cdots *_{G(\lambda)} \xi^{\alpha_k} = \xi^{\alpha_1} \xi^{\alpha_2} \cdots \xi^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k. \quad (28)$$

Вычислим явно $\xi^\alpha *_{G(\lambda)} \xi^\beta$:

$$\xi^\alpha *_{G(\lambda)} \xi^\beta = \xi^\alpha \xi^\beta + \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, имеет место соотношение

$$\xi^\alpha *_{G(\lambda)} \xi^\beta + \xi^\beta *_{G(\lambda)} \xi^\alpha = 2\lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \quad (29)$$

т.е. относительно $*_{G(\lambda)}$ -произведения ξ^α образуют алгебру Клиффорда.

Собирая вместе определение (1) и свойства (2), (27)–(29), мы получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Алгебра $\mathcal{F}_K$ с $*_{G(\lambda)}$ -произведением в качестве умножения изоморфна алгебре Клиффорда $\mathcal{K}_K$ над K с образующими γ^α , $\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha = 2\lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. Изоморфизм $\mathcal{F}_K \iff \mathcal{K}_K$ задается отображением*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_K \ni f(\xi) = \sum_I f_I e^I &\iff K_f = \sum_I f_I \Gamma^I \in \mathcal{K}_K, \\ f_1 *_{G(\lambda)} f_2(\xi) &\iff K_{f_1} K_{f_2}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\Gamma^0 = 1, \quad \Gamma^\alpha = \gamma^\alpha, \quad \Gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_k}, \quad k \geq 2.$$

Заметим, что в алгебре $\mathcal{F}_K$ имеется естественная Z_2 -градуировка $g: g(f)$ для функции f , рассматриваемой как элемент алгебры $\mathcal{F}_K$, совпадает с четностью $\varepsilon(f)$ этой

²⁾ В этом разделе мы положим $\hbar = 1$, что эквивалентно переходу к новым переменным $\xi'^\alpha = \sqrt{\hbar} \xi^\alpha$.

функции, рассматриваемой как элемент алгебры $\mathcal{G}_K$. Если в алгебре Клиффорда ввести Z_2 -градуировку g :

$$g(\Gamma^I) = k \pmod{2}, \quad I = \alpha_1 \dots \alpha_k,$$

то изоморфизм (30) сохраняет градуировку.

Что можно сказать о представлениях алгебры $\mathcal{F}_K$, которые, конечно, в то же самое время являются представлениями алгебры Клиффорда? Естественно рассматривать точные представления.

Как хорошо известно, алгебры $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ при четных размерностях $n = 2m$ и алгебры $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ при нечетных размерностях $n = 2k + 1$ и $\delta\lambda_{(n)} \equiv \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 3 \pmod{4}$ ³⁾ имеют по одному (при фиксированных n и $\delta\lambda_{(n)}$) неприводимому представлению, являющемуся точным⁴⁾. В этих случаях алгебры $\mathcal{F}_K$ имеют одно точное неприводимое представление, совпадающее с неприводимым представлением алгебры $\mathcal{K}_K$.

Алгебры $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ при нечетных $n = 2k + 1$ и алгебры $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ при нечетных $n = 2k + 1$ и $\delta\lambda_{(n)} = 1 \pmod{4}$ ⁵⁾ разлагаются в прямую сумму двух простых подалгебр. В неприводимых представлениях таких алгебр одна из подалгебр реализуется нулем. Поэтому неприводимые представления алгебры Клиффорда не могут быть точными представлениями алгебры $\mathcal{F}_K$ (а также и алгебры $\mathcal{K}_K$). Минимальное точное представление V алгебры $\mathcal{F}_K$ разлагается в прямую сумму двух неприводимых неэквивалентных представлений $V = V_+ + V_-$, проекторы $P_{\pm}$ на которые равны $P_{\pm} = (1 \pm \Gamma^{12\dots n})/2$.

Рассмотрим, наконец, случай общего *-произведения. Пусть T – оператор, генерирующий преобразование подобия между *-произведением и $*_{G(\lambda)}$ -произведением:

$$f_1 * f_2 = T^{-1}(T f_1 *_{G(\lambda)} T f_2).$$

Тогда изоморфизм $\mathcal{F}_K \Longleftrightarrow \mathcal{K}_K$ задается отображением

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_K \ni f(\xi) = \sum_I f_I e^I &\Longleftrightarrow K_f = \sum_I f_I T_J^I \Gamma^J \in \mathcal{K}_K, \\ f_1 * f_2(\xi) &\Longleftrightarrow K_{f_1} K_{f_2}, \end{aligned} \tag{31}$$

где матрица T_J^I определяется соотношением

$$T e^I = T_J^I e^J.$$

Отметим, что, поскольку мы рассматриваем только четные операторы T , изоморфизм (31) сохраняет введенную выше градуировку алгебр $\mathcal{F}_K$ и $\mathcal{K}_K$.

³⁾ Для таких алгебр $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ имеет место $(\Gamma^{12\dots n})^2 = -1$.

⁴⁾ Матрицы, реализующие базис Γ^I , линейно независимы.

⁵⁾ Для таких алгебр $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ имеет место $(\Gamma^{12\dots n})^2 = 1$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для полноты мы докажем, что при произвольных $\lambda_\alpha *_{G(\lambda)}$ -произведение (22) ($\hbar = 1$, λ_α произвольны) удовлетворяет уравнению ассоциативности (3). Далее мы опустим нижний индекс “ $G(\lambda)$ ” у $*$ -произведения, но зато будем писать верхний индекс “ (n) ”, где n равно числу образующих алгебры Грассмана. Аналогично мы опустим нижний индекс “ λ ” у оператора Q , входящего в определение $*_G$ -произведения, но будем писать верхний индекс “ (n) ”. Для оператора $Q^{(n)}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &= Q^{(n-1)} + \lambda_n \overleftarrow{\partial}_n \partial_n, \\ e^{Q^{(n)}} &= (1 + \lambda_n \overleftarrow{\partial}_n \partial_n) e^{Q^{(n-1)}}. \end{aligned}$$

Доказательство проведем индукцией по числу образующих n .

Элементы алгебры Грассмана, не зависящие от образующей ξ^n , будем обозначать $\varphi(\xi)$ и $\overline{\varphi}(\xi)$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^n} \varphi(\xi) \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi^n} \overline{\varphi}(\xi) \equiv 0.$$

Произвольный элемент $f(\xi)$ представим в виде

$$f(\xi) = \varphi(\xi) + \xi^n \overline{\varphi}(\xi), \quad \varepsilon(\varphi) = \varepsilon(f), \quad \varepsilon(\overline{\varphi}) = \varepsilon(f) + 1 \pmod{2}.$$

В терминах φ и $\overline{\varphi}$ $*^{(n)}$ -произведение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1 *^{(n)} f_2(\xi) &= \varphi_{12}(\xi) + \xi^n \overline{\varphi}_{12}(\xi), \\ \varphi_{12}(\xi) &= \varphi_1 *^{(n-1)} \varphi_2(\xi) + \lambda_n (-1)^{\varepsilon(\overline{\varphi}_1)} \overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_2(\xi), \\ \overline{\varphi}_{12}(\xi) &= \overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} \varphi_2(\xi) + (-1)^{\varepsilon(\varphi_1)} \varphi_1 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_2(\xi). \end{aligned}$$

Ассоциатор $*^{(n)}$ -произведения есть

$$\begin{aligned} (f_1 *^{(n)} f_2) *^{(n)} f_3(\xi) - f_1 *^{(n)} (f_2 *^{(n)} f_3)(\xi) &= \varphi(\xi) + \xi^n \overline{\varphi}(\xi), \\ \varphi &= \varphi_{(12)3} - \varphi_{1(23)} = [(\varphi_1 *^{(n-1)} \varphi_2) *^{(n-1)} \varphi_3 - \varphi_1 *^{(n-1)} (\varphi_2 *^{(n-1)} \varphi_3)] + \\ &+ \lambda_n (-1)^{\varepsilon(\overline{\varphi}_1)} [(\overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_2) *^{(n-1)} \varphi_3 - \overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} (\overline{\varphi}_2 *^{(n-1)} \varphi_3)] + \\ &+ \lambda_n (-1)^{\varepsilon(\overline{\varphi}_1) + \varepsilon(\varphi_2)} [(\overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} \varphi_2) *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3 - \overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} (\varphi_2 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3)] + \\ &+ \lambda_n (-1)^{\varepsilon(\overline{\varphi}_2)} [(\varphi_1 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_2) *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3 - \varphi_1 *^{(n-1)} (\overline{\varphi}_2 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3)], \\ \overline{\varphi} &= \overline{\varphi}_{(12)3} - \overline{\varphi}_{1(23)} = [(\overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} \varphi_2) *^{(n-1)} \varphi_3 - \overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} (\varphi_2 *^{(n-1)} \varphi_3)] + \\ &+ (-1)^{\varepsilon(\varphi_1)} [(\varphi_1 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_2) *^{(n-1)} \varphi_3 - \varphi_1 *^{(n-1)} (\overline{\varphi}_2 *^{(n-1)} \varphi_3)] + \\ &+ (-1)^{\varepsilon(\varphi_1) + \varepsilon(\varphi_2)} [(\varphi_1 *^{(n-1)} \varphi_2) *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3 - \varphi_1 *^{(n-1)} (\varphi_2 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3)] + \\ &+ \lambda_n (-1)^{\varepsilon(\overline{\varphi}_2)} [(\overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_2) *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3 - \overline{\varphi}_1 *^{(n-1)} (\overline{\varphi}_2 *^{(n-1)} \overline{\varphi}_3)]. \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что если $*^{(n-1)}$ -произведение ассоциативно, то и $*^{(n)}$ -произведение также ассоциативно. Кроме того, легко видеть из этих же формул, что $*^{(1)}$ -произведение ассоциативно (все φ_i и $\overline{\varphi}_i$ — числа, $\varepsilon(\varphi_i) = \varepsilon(\overline{\varphi}_i) = 0$, $*^{(0)}$ -произведение — обычное произведение чисел).

Благодарности. Автор благодарит Б. Л. Воронова и И. Ю. Типунина за полезные обсуждения и Российский фонд фундаментальных исследований (грант № 99-02-17916 и грант № 00-15-96566 поддержки научных школ).

Список литературы

- [1] *М. В. Карасев, В. П. Маслов.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [2] *V. Flato, D. Sternheimer.* Lett. Math. Phys. 1991. V. 22. P. 155.
- [3] *P. Bonneau, V. Flato, G. Pinczon.* Lett. Math. Phys. 1992. V. 25. P. 75.
- [4] *N. Nekrasov.* Trieste lectures on solitons in noncommutative gauge theories. hep-th/0011095.
- [5] *A. Schwarz.* Gauge theories on noncommutative spaces. hep-th/0011261.
- [6] *B. Fedosov.* Deformation Quantization and Index Theory. Berlin: Akademie, 1996.
- [7] *M. Kontsevich.* Deformation quantization of Poisson manifolds. I. q-alg/9709040.
- [8] *M. Grigoriev, S. Lyakhovich.* Fedosov deformation quantization as BRST theory. hep-th/0003114.
- [9] *B. Fedosov.* J. Diff. Geom. 1994. V. 40. P. 213.
- [10] *H. Groenewold.* Physica. 1946. V. 12. P. 405.
- [11] *Ф. А. Бerezин.* УФН. 1980. Т. 132. С. 497.
- [12] *I. A. Batalin, E. S. Fradkin.* Riv. Nuovo Cim. 1986. V. 9. P. 1.
- [13] *E. Fradkin, V. Linetsky.* Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 217.
- [14] *E. Gozzi, M. Reuter.* Mod. Phys. Lett. A. 1993. V. 8. P. 1433.
- [15] *I. A. Batalin, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 369.

Поступила в редакцию 15.I.2001 г.