Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Смирнов, М. А. Соловьев, О виковых степенных рядах, сходящихся к нелокальным полям, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 2, 268–283

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:05:14

О ВИКОВЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДАХ, СХОДЯЩИХСЯ К НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЯМ

Рассматриваются ряды по виковым степеням обобщенного свободного поля, сходящиеся при усреднении с аналитическими пробными функциями и реализующие нелокальное расширение классов эквивалентности Борхерса. Доказано, что нелокальные поля, к которым они сходятся, асимптотически коммутируют, что служит естественным обобщением взаимной локальности виковых полиномов. Доказательство основано на использовании аналитических свойств вакуумных средних в x -пространстве и применении теоремы Коши–Пуанкаре.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает исследование [1], [2] бесконечных рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k : \phi^k : (x) \quad (1)$$

по виковым степеням нейтрального свободного поля ϕ , основанное на систематическом использовании аналитических свойств вакуумных средних в x -пространстве. Развиваемый подход ориентирован, прежде всего, на приложения к калибровочной теории поля, когда двухточечная функция $w(x - x') = \langle \Psi_0, \phi(x) \phi(x') \Psi_0 \rangle$ не обязана удовлетворять условию положительности $w(f^* \otimes f) \geq 0$ (где f – пробная функция) и позволяет не только легко найти тот класс пробных функций, на котором заданный ряд сходится, но и установить свойства предельного поля φ . В случае положительной метрики традиционно используют другой метод [3], основанный на оценке членов ряда, представляющего вакуумное среднее $\langle \Psi_0, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Psi_0 \rangle$; причем оценка производится в импульсном представлении, где члены ряда выражаются через положительные меры. Бытует мнение, что это единственно возможный метод, когда сумма ряда φ оказывается нелокальным полем, ибо тогда область аналитичности его вакуумных средних в x -пространстве пуста. Тем не менее наш подход применим и в этом случае, если должным образом использовать свойства аналитичности каждого отдельного члена ряда (см. [1]). Существование, что он охватывает поля ϕ нулевой массы, не рассматривавшиеся в работе [3], и,

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: smirnov@lpi.ru, soloviev@lpi.ru

более того, обобщенные свободные поля в пространстве-времени произвольной размерности $\mathbf{d}$. Здесь мы докажем взаимную асимптотическую коммутативность нелокальных полей, к которым сходятся ряды по виковым степеням обобщенного свободного поля (о роли условия асимптотической коммутативности в квантовой теории нелокальных взаимодействий см. [4], где показано, что оно обеспечивает нормальную связь спина со статистикой и *CPT*-инвариантность). В рамках традиционного подхода свойства нелокальных виковых рядов свободного поля ненулевой массы рассматривались ранее в работе [5], а соотношение использовавшегося там условия существенной локальности с асимптотической коммутативностью обсуждается в [6]. Общая конструкция виковых степеней обобщенного свободного поля рассматривалась в [7]. Основными стимулами более глубокого анализа нелокальных виковых рядов (наряду с тем что они образуют расширение борхерсовского класса эквивалентности поля ϕ) являются связь нелокальных квантово-полевых моделей, обнаруживающих сингулярное ультрафиолетовое поведение, с теорией струн и М-теорией [8] (особенно в свете AdS/CFT соответствия [9]), а также использование нелокальных формфакторов для устранения ультрафиолетовых расходимостей в феноменологических моделях, предлагаемых как альтернатива теории струн [10]. В частности, излагаемая здесь техника может быть полезной при анализе вопроса о возможном нарушении *CPT*-симметрии в таких моделях, обсуждавшегося в работе [10].

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБОБЩЕННОГО СВОБОДНОГО ПОЛЯ

Далее считаем поле ϕ обобщенным нейтральным свободным полем умеренного роста [11]. Его n -точечные вакуумные средние выражаются через двухточечную функцию w тем же рекуррентным соотношением, что и в случае свободного поля, это позволяет определить виковы степени: $\phi^k : (x)$. Аналитическую функцию, граничным значением которой служит распределение $w(x)$, обозначим через $\mathbf{w}(z)$. Как показано в работе [1], при соблюдении условия положительности тот класс пробных функций, на котором сходится ряд (1), определяется поведением $\mathbf{w}(z)$ в мнимых направлениях, причем в локализуемом случае существен характер ее роста при $\text{Im } z \rightarrow 0$, а в нелокализуемом случае становится важным и поведение на бесконечности. В качестве характеристики этого поведения можно использовать ограничение функции $\mathbf{w}(z)$ на полусось $\text{Re } z = 0$, $\text{Im } z = (-\tau, 0, \dots, 0)$, $\tau > 0$, которое мы обозначим через $u(\tau)$. Из формулы преобразования Лапласа

$$\mathbf{w}(z) = (2\pi)^{-\mathbf{d}} \int \exp(-ipz) \hat{w}(p) dp,$$

где $\hat{w}(p)$ представляет собой полиномиально ограниченную положительную меру с носителем в замкнутом верхнем световом конусе $\overline{\mathbb{V}}_+$, видно, что $u(\tau)$ — строго положительная, невозрастающая функция, мажорирующая $|\mathbf{w}(z)|$ при $\text{Im } z$ указанного вида и любых $\text{Re } z$. Значит, в силу лоренц-инвариантности $\hat{w}(p)$ имеем

$$|\mathbf{w}(x + iy)| \leq u(\sqrt{y^2}) \quad \text{при всех } y \in \mathbb{V}_-, \quad (2)$$

где y^2 – лоренцев квадрат. Таким образом, $u(\tau)$ действительно может служить индикаторной функцией в согласии с определением [1], в котором использовалось иное обозначение $w_{UV}(\tau)$, чтобы отличать ее от функции, характеризующей инфракрасное поведение $\mathbf{w}$, что необходимо в теории с индефинитной метрикой. Более того, функция $u(\tau)$ является наименьшей среди всех функций, удовлетворяющих соотношению (2), и, следовательно, наилучшим образом характеризует поведение $\mathbf{w}(z)$. Отметим еще, что функция $u(\tau)$ бесконечно дифференцируема и неограниченно возрастает при уменьшении аргумента.

Как обычно, обозначаем через $L_+(\mathbb{C})$ компоненту единицы комплексной группы Лоренца и через $\mathbb{T}^{\text{ext}}$ расширенную область аналитичности $\mathbf{w}(z)$, получаемую из примитивной области $\mathbb{R}^d + i\mathbb{V}_-$ всевозможными преобразованиями из $L_+(\mathbb{C})$ по теореме Баргмана–Холла–Вайтмана, доказательство которой для произвольной размерности пространства-времени дано в [12]. Область $\mathbb{T}^{\text{ext}}$ инвариантна относительно полного отражения $z \rightarrow -z$. Действительно, при четном d оно содержится в $L_+(\mathbb{C})$, а в общем случае можно рассуждать следующим образом. Если z принадлежит $\mathbb{T}^{\text{ext}}$, то найдется преобразование $\Lambda \in L_+(\mathbb{C})$, которое переводит z в точку с мнимой частью на отрицательной y^0 -полуоси. Но тогда его композиция с частичным отражением $(z^0, z^1, z^2, \dots, z^{d-1}) \rightarrow (-z^0, -z^1, z^2, \dots, z^{d-1})$, также принадлежащим $L_+(\mathbb{C})$, переводит $-z$ в точку с такой же мнимой частью. В частности, имеет место включение $\mathbb{R}^d + i\mathbb{V} \subset \mathbb{T}^{\text{ext}}$. Следующая простая лемма позволяет оценить функцию $\mathbf{w}(z)$ в вещественной области исходя из ее поведения в мнимых направлениях.

ЛЕММА 1. Пусть $0 \leq \tau' < \tau$, $z = x + iy$ и $x^2 \leq -\tau^2$, $y^2 > -\tau'^2$. Тогда найдется такое преобразование $\Lambda \in L_+(\mathbb{C})$, что $\Lambda z \in \mathbb{R}^d + i\mathbb{V}_-$ и $(\text{Im } \Lambda z)^2 \geq \tau^2 - \tau'^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $y^2 > 0$, и пусть Λ_1 – вещественное преобразование Лоренца, переводящее y в вектор вида $(\tilde{y}^0, 0, \dots, 0)$. Пусть Λ_2 – чистое вращение, которое переводит $\Lambda_1 x$ в вектор $(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, 0, \dots, 0)$. Положим $\Lambda = \Lambda_3 \Lambda_2 \Lambda_1$, где $\Lambda_3(z^0, \dots, z^{d-1}) = (\pm i z^1, \pm i z^0, z^2, \dots, z^{d-1})$. Тогда $\text{Im } \Lambda z = (\pm \tilde{x}^1, \pm \tilde{x}^0, 0, \dots, 0)$ при надлежащем выборе знака принадлежит $\mathbb{V}_-$ и $(\text{Im } \Lambda z)^2 = -x^2 \geq \tau^2$. Пусть теперь $-\tau'^2 < y^2 \leq 0$. Тогда найдется преобразование Лоренца Λ_1 , переводящее y в вектор y_1 такой, что $\|y_1\| \leq \tau'$. Определим Λ_2 , Λ_3 и Λ , как и прежде, и обозначим $\tilde{x} = \Lambda_2 \Lambda_1 x$ и $\tilde{y} = \Lambda_2 \Lambda_1 y = \Lambda_2 y_1$. Тогда $\text{Im } \Lambda z = (\pm \tilde{x}^1, \pm \tilde{x}^0, \tilde{y}^2, \dots, \tilde{y}^{d-1})$ и $(\text{Im } \Lambda z)^2 \geq -x^2 - \|\tilde{y}\|^2 = -x^2 - \|y_1\|^2 \geq \tau^2 - \tau'^2$, а должный выбор знака в определении Λ_3 обеспечивает выполнение условия $\text{Im } \Lambda z \in \mathbb{V}_-$. Лемма доказана.

Как известно, все вещественные пространственноподобные векторы входят в $\mathbb{T}^{\text{ext}}$, что видно и из леммы 1. Для любого такого вектора x найдется $\Lambda \in L_+(\mathbb{C})$ такое, что $\Lambda x = -x$ и поэтому $\mathbf{w}(x) = \mathbf{w}(-x)$. Значит, в силу теоремы единственности

$$\mathbf{w}(z) = \mathbf{w}(-z), \quad z \in \mathbb{T}^{\text{ext}}. \quad (3)$$

В частности, на уровне двухточечных вакуумных средних локальность является следствием остальных аксиом Вайтмана. Вводя обозначения

$$G^\tau = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x^2 \leq -\tau^2\}, \quad V^\tau = \{y \in \mathbb{R}^d \mid y^2 > -\tau^2\} \quad (4)$$

и используя формулу (2) и лемму 1, мы получаем, что при условии $0 \leq \tau' < \tau$

$$|\mathbf{w}(z)| \leq u(\sqrt{\tau^2 - \tau'^2}), \quad z \in G^\tau + iV^{\tau'} \subset \mathbb{T}^{\text{ext}}. \quad (5)$$

3. ВАЙТМАНОВСКИЕ ФУНКЦИИ ВИКОВЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Обозначим ряд (1) через $\mathfrak{s}$. Мы будем рассматривать также подчиненные ему ряды и использовать обозначение $\mathfrak{s}' \triangleleft \mathfrak{s}$, подразумевая под этим, что для всех индексов k , за исключением, быть может, конечного подмножества, соблюдается неравенство $|d'_k| \leq C_{\mathfrak{s}'} |d_k|$, где $C_{\mathfrak{s}'}$ — положительная константа. На коэффициенты ряда (1) накладываются условия

$$d_k \geq 0, \quad d_k d_l \leq C h^{k+l} d_{k+l} \quad (6)$$

(C, h — константы), роль которых разъяснена в работе [1]; подчиненные ряды им удовлетворять не обязаны. В качестве пространств пробных функций используем пространство S^b Гельфанда–Шилова [13]. Индекс b можно считать индикаторной функцией, характеризующей поведение пробных функций в импульсном представлении. Именно, производные фурье-образа функции $f \in S^b(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\partial^\kappa \hat{f}(p)| b\left(\frac{|p|}{B}\right) \leq C_\kappa, \quad (7)$$

где положительные константы C_κ и B зависят от f . Норму $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$ для определенности считаем равномерной. В контексте квантовой теории поля функция b характеризует высокоэнергетическое поведение полей, определенных на S^b .

Пусть $\varphi_{\mathfrak{s}_1}, \dots, \varphi_{\mathfrak{s}_n}$ — поля, определяемые рядами $\mathfrak{s}_j \triangleleft \mathfrak{s}$. Формальное применение теоремы Вика дает для n -точечного вакуумного среднего $\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Psi_0, \varphi_{\mathfrak{s}_1}(x_1) \dots \varphi_{\mathfrak{s}_n}(x_n) \Psi_0 \rangle$ известное представление

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n} = \sum_K D_K W^K, \quad (8)$$

где K — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами $k_{j,m}$, $1 \leq j < m \leq n$, имеющими смысл числа спариваний между членами рядов $\mathfrak{s}_j$ и $\mathfrak{s}_m$, и использовано обозначение

$$W^K = \prod_{1 \leq j < m \leq n} w(x_j - x_m)^{k_{j,m}}. \quad (9)$$

Численные коэффициенты D_K выражаются через коэффициенты рядов $\mathfrak{s}_j$ следующим образом:

$$D_K = \frac{\kappa!}{K!} \prod_{1 \leq j \leq n} d_{\kappa_j}^{(j)}, \quad \text{где} \quad \kappa_j = k_{1,j} + \dots + k_{j-1,j} + k_{j,j+1} + \dots + k_{j,n}. \quad (10)$$

Если ряд распределений в правой части (8) сходится абсолютно на каждой пробной функции из пространства $S^b(\mathbb{R}^{n\mathbf{d}})$, то он безусловно суммируем по сильной топологии

сопряженного пространства, поскольку оно монтелиевское. Если это имеет место для любого набора рядов, подчиненных $\mathfrak{s}$, то, как показано в [1], поля $\varphi_{\mathfrak{s}'}$, $\mathfrak{s}' \triangleleft \mathfrak{s}$, корректно определены как операторнозначные обобщенные функции над $S^b(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ исходного поля ϕ . В частности, безусловно сходятся векторные ряды, определяющие повторное действие этих операторов на вакуум Ψ_0 , и линейная оболочка всевозможных векторов вида $\varphi_{\mathfrak{s}_1}(f_1) \dots \varphi_{\mathfrak{s}_n}(f_n) \Psi_0$, $f_i \in S^b(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, служит общей плотной инвариантной областью определения семейства полей $\{\varphi_{\mathfrak{s}'}\}_{\mathfrak{s}' \triangleleft \mathfrak{s}}$ в $\mathcal{H}$, которую мы обозначаем $D(\mathfrak{s})$.

Распределение (9) является граничным значением аналитической функции

$$\mathbf{W}^K(z) = \prod_{1 \leq j < m \leq n} \mathbf{w}(z_j - z_m)^{k_{j,m}} \quad (11)$$

из конуса

$$V_{n-} = \{y \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid y_j - y_m \in \mathbb{V}_-, 1 \leq j < m \leq n\},$$

и более точная запись представления (8) выглядит следующим образом:

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_K D_K \mathbf{b}_{V_{n-}} \mathbf{W}^K, \quad (12)$$

где $\mathbf{b}_{V_{n-}}$ – оператор взятия граничного значения. Отметим, что функция (11) определена и аналитична на открытом множестве $T_n = \{z \in \mathbb{C}^{n\mathbf{d}} \mid z_j - z_m \in \mathbb{T}^{\text{ext}}, j \neq m\}$ и, в частности, в трубе $\mathbb{R}^{n\mathbf{d}} + iV_n$, где $V_n = \{y \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid y_j - y_m \in \mathbb{V}, j \neq m\}$. В дальнейшем нам потребуется правило преобразования представления (12) при перестановке операторов $\varphi_{\mathfrak{s}_j}(x_j)$, входящих в вакуумное среднее.

ЛЕММА 2. *Предположим, что для любых рядов $\mathfrak{s}_j \triangleleft \mathfrak{s}$, $j \leq n$, ряд распределений в правой части (12) безусловно сходится в $S^b(\mathbb{R}^{n\mathbf{d}})$. Пусть π – перестановка индексов $(1, \dots, n)$. Тогда*

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_{\pi 1}, \dots, \mathfrak{s}_{\pi n}}(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi n}) = \sum_K D_K \mathbf{b}_{\pi V_{n-}} \mathbf{W}^K, \quad (13)$$

где $\pi V_{n-} = \{y \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid y_{\pi j} - y_{\pi m} \in \mathbb{V}_-, 1 \leq j < m \leq n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (12) имеем

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_{\pi 1}, \dots, \mathfrak{s}_{\pi n}}(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi n}) = \sum_K D'_K (\mathbf{b}_{V_{n-}} \mathbf{W}^K)(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi n}), \quad (14)$$

где D'_K – коэффициент, сопоставляемый в соответствии с (10) переставленному набору $\mathfrak{s}_{\pi 1}, \dots, \mathfrak{s}_{\pi n}$. Пусть K' – мультииндекс с компонентами $k'_{j,m}$, равными $k_{\pi j, \pi m}$ при $\pi j < \pi m$ и $k_{\pi m, \pi j}$ при $\pi j > \pi m$. Из формулы (11) видно, что функция $\mathbf{W}^{K'}(z_{\pi 1}, \dots, z_{\pi n})$ совпадает с произведением, определяющим $\mathbf{W}^K(z)$, с точностью до знака аргументов некоторых сомножителей, откуда согласно (3) вытекает, что $\mathbf{W}^K(z_1, \dots, z_n) = \mathbf{W}^{K'}(z_{\pi 1}, \dots, z_{\pi n})$ в T_n . Переходя в этом равенстве к граничным значениям из конуса πV_{n-} , получаем $(\mathbf{b}_{\pi V_{n-}} \mathbf{W}^K)(x_1, \dots, x_n) = (\mathbf{b}_{V_{n-}} \mathbf{W}^{K'})(x_{\pi 1}, \dots, x_{\pi n})$, а вытекающее из (10) соотношение $\kappa'_i = \kappa_{\pi i}$ позволяет заключить, что $D'_{K'} = D_K$. Делая замену индекса суммирования $K \rightarrow K'$ в безусловно сходящемся ряде (14) и подставляя указанные тождества, приходим к (13). Лемма доказана.

4. ОБОБЩЕНИЕ АКСИОМЫ ЛОКАЛЬНОСТИ

Если пространство S^b , на котором сходится ряд (1), содержит функции с компактным носителем, т.е. поле $\varphi_{\mathfrak{s}}$ является (операторнозначным) ультрараспределением, то проверка соблюдения для него аксиом Вайтмана не составляет труда и может быть выполнена по той же схеме, что и в работе [2], где рассмотрен даже более общий случай индефинитной метрики. В частности, локальность поля $\varphi_{\mathfrak{s}}$ и, более того, взаимная локальность полей $\varphi_{\mathfrak{s}'}, \mathfrak{s}' \triangleleft \mathfrak{s}$, прямо следуют из взаимной локальности виковых мономов $:\phi^k:(x)$. Это свойство можно установить и с помощью леммы 2, взяв в качестве π транспозицию τ_j соседних индексов j и $j+1$. Распределение $\mathbf{b}_{V_n-} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_n-} \mathbf{W}^K$ сосредоточено в замкнутом конусе

$$\bar{V}_{j,j+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid (x_j - x_{j+1})^2 \geq 0\}. \quad (15)$$

Значит, и носитель функционала

$$\mathcal{W}_{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_n}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - \mathcal{W}_{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_{j+1}, \mathfrak{s}_j, \dots, \mathfrak{s}_n}(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n) \quad (16)$$

содержится в нем, что влечет $[\varphi_{\mathfrak{s}_j}(f_j), \varphi_{\mathfrak{s}_{j+1}}(f_{j+1})]\Psi = 0$ при пространственноподобно разделенных носителях пробных функций $f_j, f_{j+1} \in S^b$ и произвольных $\Psi \in D(\mathfrak{s})$, поскольку n и остальные $\mathfrak{s}_i$ ($i \neq j, j+1$) в (16) можно взять любыми.

Требование локализуемости ограничивает поведение вакуумных средних в импульсном пространстве ростом медленнее любой линейной экспоненты (см., например, [11]). Поэтому пространство Гельфанда–Шилова, задаваемое индикаторной функцией $b(s) = e^s$, которое принято обозначать S^1 , универсально для локальных полей. Элементы S^1 допускают аналитическое продолжение в комплексную окрестность вещественного пространства и не могут иметь компактный носитель. Однако методы теории гиперфункций позволяют корректно определить носители функционалов из сопряженного пространства S'^1 . Подробнее об этом можно прочитать в работе [14], здесь отметим только, что носитель $v \in S'^1$ содержится в замкнутом конусе K в том и только том случае, если v допускает непрерывное продолжение на каждое пространство $S^1(U) = \bigcup_{B>0} S^{1,B}(U)$, где U – открытый конус, содержащий $K \setminus \{0\}$, а $S^{1,B}(U)$ состоит из функций, аналитических в комплексной $(1/B)$ -окрестности $\tilde{U}^{1/B}$ множества U и имеющих конечные нормы

$$\|f\|_{U,N,B} = \sup_{z \in \tilde{U}^{\frac{1}{B}}} |f(z)| (1 + |x|)^N.$$

Соответствующее обобщение локальной коммутативности для полей φ, φ' , определенных на $S^1(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, означает, что носители матричных элементов $\langle \Phi, [\varphi(x), \varphi'(x')] \Psi \rangle$ содержатся в замкнутом конусе

$$\bar{V}^{(2\mathbf{d})} = \{(x, x') \in \mathbb{R}^{2\mathbf{d}} \mid (x - x')^2 \geq 0\} \quad (17)$$

при любых Φ, Ψ из общей области определения этих полей. В рамках теории гиперфункций виковы степенные ряды свободного поля ненулевой массы в четырехмерном

пространстве-времени изучались ранее в работе [15]. Найденное там ограничение на коэффициенты ряда в наших обозначениях имеет вид

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (d_{2k} k!)^{\frac{1}{k}} = 0. \quad (18)$$

Соблюдение аксиом Вайтмана для (гипер)полей, определяемых виковыми рядами, устанавливалось в [15] косвенным образом, с помощью теоремы эквивалентности между модифицированной должным образом евклидовой теорией Остервальдера–Шрадера и теорией поля в пространстве Минковского, сформулированной в терминах фурье-гиперфункций. Ниже мы попутно получим простое прямое доказательство того, что предельные поля удовлетворяют в этом случае обобщенному условию локальной коммутативности.

Если функция $\ln b(s)$ растет быстрее, чем линейным образом, то элементы S^b являются целыми функциями и функционалы, принадлежащие S'^b , нелокальны. Однако при определенных ограничениях на b они сохраняют важную часть свойств гиперфункций, которая имеет смысл угловой локализуемости. В работе [14] соответствующая теория построена для пространств, индикаторными функциями которых служат экспоненты порядка > 1 , а в [2] она распространена на более общий случай. В работе [2] рассматривалась другая шкала пространств S_a^b , используемая в теории поля с индефинитной метрикой, но найденная конструкция применима и к S^b . Именно, пусть $\beta(\tau)$ – неотрицательная, выпуклая, дифференцируемая, неограниченно возрастающая функция на полуоси $\tau \geq 0$ и пусть U – открытый конус в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\delta_U(x)$ расстояние от точки x до конуса U и рассмотрим пространство $\mathcal{E}^\beta(U) = \bigcup_{B>0} \mathcal{E}^{\beta,B}(U)$, где $\mathcal{E}^{\beta,B}(U)$ состоят из целых аналитических функций на $\mathbb{C}^n$, для которых при любом $N = 0, 1, \dots$ конечна норма

$$\|f\|_{U,N,B} = \sup_{x,y} |f(x+iy)| (1+|x|)^N \exp\{-\beta(B|y|) - \beta \circ \delta_U(Bx)\}. \quad (19)$$

Топология пространства $\mathcal{E}^\beta(U)$ определяется как топология индуктивного предела счетнонормированных пространств $\mathcal{E}^{\beta,B}(U)$ по индексу $B \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3. *Пространство $\mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством S^b , задаваемым индикаторной функцией $b(s) = e^{\beta_*(s)}$, где $\beta_*(s) = \sup_{\tau>0} (s\tau - \beta(s))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая элементарные неравенства $1+|z| \leq (1+|x|)(1+|y|)$ и $\beta((1+\epsilon)\tau) - \beta(\tau) \geq C_\epsilon + h_\epsilon \tau$, где $\epsilon > 0$ сколь угодно мало, а константа h_ϵ положительна, мы видим, что замена в (19) фактора $(1+|x|)^N$ на $\max_{|\kappa| \leq N} |z^\kappa|$ дает эквивалентное определение $\mathcal{E}^\beta$. Пусть $f \in \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$|\partial^\kappa \hat{f}(p)| = \left| \int_{\text{Im } z=y} z^\kappa e^{ipz} f(z) dz \right| \leq C_\kappa \int (1+|x|)^{-(n+1)} e^{-py+\beta(B|y|)} dx.$$

Пользуясь произволом в выборе плоскости интегрирования, положим $y = \tau p/|p|$ и возьмем нижнюю грань по $\tau > 0$. В результате получаем оценку (7) с $b = e^{\beta_*}$. Обратно, если

соблюдается (7) с такой индикаторной функцией, то применив обратное преобразование Фурье–Лапласа, получаем

$$|z^\kappa f(z)| \leq (2\pi)^{-n} \int e^{n|p||y|} |\partial^\kappa \hat{f}(p)| dp \leq C_{\kappa, \epsilon} \sup_p e^{n|p||y| - \beta_* \left(\frac{(1-\epsilon)|p|}{B} \right)},$$

что влечет $f \in \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^n)$ ввиду инволютивности преобразования Лежандра. Лемма доказана.

Пространства S^b с индикаторными функциями указанного вида мы называем пространствами Гельфанда–Шилова–Гуревича, поскольку они входят также в класс пространств типа W , рассматривавшийся впервые Гуревичем. Выделенную роль среди них играет пространство, задаваемое функцией $\beta(\tau) = \tau$, которое принято обозначать S^0 и которое есть не что иное, как фурье-образ пространства Шварца D . Оно универсально для нелокальных полей, поскольку в этом случае $b(s) = 1$ при $0 \leq s \leq 1$ и $b(s) = \infty$ при $s > 1$, т.е. пробные функции имеют компактный носитель в импульсном представлении и с ними допускают усреднение поля со сколь угодно сингулярным ультрафиолетовым поведением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Замкнутый конус K называется несущим конусом функционала $v \in \mathcal{E}'^\beta$, если v обладает непрерывным продолжением на каждое пространство $\mathcal{E}^\beta(U)$, $U \supset K \setminus \{0\}$.

Оказывается, что для каждого функционала $v \in \mathcal{E}'^\beta$ существует единственный минимальный несущий замкнутый конус. Для пространств S^b , задаваемых экспонентами порядка > 1 , это доказано в работе [14], и в определение $\mathcal{E}^\beta$ включены как раз те свойства таких экспонент, которые фактически при этом использовались.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Поля φ, φ' , определенные над пространством пробных функций $\mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^d)$, называем асимптотически коммутирующими при пространственноподобном разделении аргументов, если конус (17) является несущим для матричных элементов $\langle \Phi, [\varphi(x), \varphi'(x')] \Psi \rangle$ при любых Φ, Ψ из общей области определения этих полей.

5. УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ ВИКОВЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОБНЫХ ФУНКЦИЯХ

В терминах введенной в разделе 2 функции $u(\tau)$, характеризующей поведение двухточечной функции $w(z)$, и индикаторной функции $b(s)$ общий критерий сходимости виковых рядов формулируется следующим образом. Ряд (1) сходится при усреднении с пробными функциями из S^b , если

$$\sum_{k=0}^{\infty} L^k k! d_{2k} \inf_{\tau > 0} u(\tau)^k e^{s\tau} \leq C_{L, \epsilon} b(\epsilon s) \quad (20)$$

при любых $L > 0$ и $\epsilon > 0$. Доказательство этого критерия такое же, как и вывод теоремы 4 работы [1], где он получен для случая свободного поля массы m и использован

явный вид соответствующей функции $u(\tau)$. Для пространств Гельфанда–Шилова–Гуревича возможна альтернативная формулировка в терминах функции β , которая понадобится ниже. Ее вывод значительно проще, чем в общем случае, рассмотренном в [1], когда адекватные пробные функции не обязательно аналитичны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ϕ – обобщенное скалярное нейтральное свободное поле и пусть

$$u(\tau) = (2\pi)^{-\mathbf{d}} \int e^{-\tau p^0} \widehat{w}(p) dp,$$

где $\widehat{w}$ – фурье-образ его двухточечной функции. Предположим, что соблюдаются ограничения (6) на коэффициенты викова степенного ряда $\mathfrak{s}$. Если задающая пространство $\mathcal{E}^\beta$ функция β удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} L^k k! d_{2k} \inf_{\tau>0} u(\tau)^k e^{\beta(B\tau)} < \infty \quad (21)$$

при сколь угодно больших $L, B > 0$, то поле $\varphi_{\mathfrak{s}}$ и все поля $\varphi_{\mathfrak{s}'}$, $\mathfrak{s}' \triangleleft \mathfrak{s}$, корректно определены как операторнозначные обобщенные функции над $\mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ исходного поля ϕ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно сказанному выше достаточно показать, что условие (21) влечет абсолютную сходимость ряда в правой части (8) на любой пробной функции $f \in \mathcal{E}^\beta$. Пусть $\eta = (\tau, 0, \dots, 0) \in \mathbb{V}_+$ и $y = (\eta, 2\eta, \dots, n\eta) \in V_{n-}$. Тогда

$$W^K(f) = \int \mathbf{W}^K(x + iy) f(x + iy) dx. \quad (22)$$

Используя (2), (19) и монотонность функции u , а также равенство $|\eta| = \sqrt{\eta^2} = \tau$, приходим к оценке

$$|\mathbf{W}^K(x + iy) f(x + iy)| \leq \frac{\|f\|_{2n\mathbf{d}, B}}{(1 + |x|)^{2n\mathbf{d}}} u(\tau)^{|K|} e^{\beta(Bn\tau)}, \quad f \in \mathcal{E}^{\beta, B}(\mathbb{R}^{n\mathbf{d}}).$$

Пользуясь произволом в выборе τ , получаем

$$|W^K(f)| \leq C(f) \inf_{\tau>0} u(\tau)^{|K|} e^{\beta(Bn\tau)}.$$

Таким образом, желаемая сходимость ряда (8) обеспечивается сходимостью числового ряда

$$\sum_K |D_K| \inf_{\tau>0} u(\tau)^{|K|} e^{\beta(B\tau)} \quad (23)$$

со сколь угодно большим $B > 0$. Из условий (6) и свойств полиномиальных коэффициентов легко выводится оценка $|D_K| \leq h^{|K|} |K|! d_{2|K|}$ (см. [1]). Учитывая, что число мультииндексов с нормой $|K| = k$ не превосходит $k^{n(n-1)/2}$, заключаем, что ряд (23) мажорируется рядом (21) при достаточно больших L . Теорема доказана.

ЛЕММА 4. *Критерий (20) равносильно условию (18) при $b(s) = e^s$ и условию (21) при $b(s) = e^{\beta_*(s)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b(s) = e^s$. При условии (18) ряд $\sum d_{2k} k! z^k$ сходится всюду. Мажорируя инфимум в левой части неравенства (20) значением функции при $\tau = \epsilon$, мы видим, что оно соблюдается с константой

$$C_{L,\epsilon} = \sum d_{2k} k! (Lu(\epsilon))^k.$$

Чтобы доказать обратную импликацию (20) $\Rightarrow$ (18), выберем $m > 0$ так, чтобы

$$C = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{V}_+ \cap \{p: p^0 \leq m\}} \hat{w}(p) dp > 0.$$

Тогда $u(\tau) \geq Ce^{-m\tau}$, и условие (20) влечет

$$(CL)^k |d_{2k}| k! \leq C_{L,\epsilon} e^{\epsilon s}$$

при $mk \leq s$. Полагая $s = mk$ и пользуясь произвольностью L , получаем (18).

Пусть теперь $b(s) = e^{\beta_*(s)}$. Если β растет линейным образом, то утверждение леммы проверяется непосредственно. Поэтому считаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\beta(\tau)}{\tau} = \infty.$$

Покажем, что

$$\inf_{\tau > 0} u(\tau)^k e^{\beta(\tau)} = \sup_{s \geq 0} \inf_{\tau > 0} u(\tau)^k e^{s\tau - \beta_*(s)}. \quad (24)$$

(Это соотношение обобщает утверждение леммы 1 работы [2], где $u(\tau) = 1/\tau$.) Если $k = 0$, то (24) вытекает из инволютивности преобразования Лежандра. Пусть $k > 0$. Поскольку $u(\tau) \geq Ce^{-m\tau}$, инфимум в левой части (24) достигается в некоторой конечной точке $\tau_k > 0$, удовлетворяющей уравнению $\beta'(\tau_k) = -ku'(\tau_k)/u(\tau_k)$. Положим $s_k = \beta'(\tau_k)$. Учитывая соотношение

$$\frac{d^2 \ln u(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{2u(\tau)^2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (p^0 - p'^0)^2 e^{-(p^0 + p'^0)\tau} \hat{w}(p) \hat{w}(p') dp dp' \geq 0$$

и пользуясь тем, что для выпуклых функций любая стационарная точка есть точка абсолютного минимума, заключаем, что экстремумы $\inf_{\tau > 0} e^{-s_k \tau + \beta(\tau)} = e^{-\beta_*(s_k)}$ и $\inf_{\tau > 0} u(\tau)^k e^{s_k \tau}$ достигаются при $\tau = \tau_k$. Минорируя супремум по s значением функции в точке s_k , получаем

$$\sup_{s \geq 0} \inf_{\tau > 0} u(\tau)^k e^{s\tau - \beta_*(s)} \geq e^{-s_k \tau_k + \beta(\tau_k)} \inf_{\tau > 0} u(\tau)^k e^{s_k \tau} = e^{\beta(\tau_k)} u(\tau_k)^k,$$

а так как $\inf_{\tau} \sup_s G(\tau, s) \geq \sup_s \inf_{\tau} G(\tau, s)$ для любой функции G , то верно и обратное неравенство, и, следовательно, (24) доказано. Предполагая выполненным неравенство (20) и учитывая (24), имеем

$$L^k d_{2k} k! \inf_{\tau > 0} u(\tau)^k e^{\beta(B\tau)} \leq C_{2L, \frac{1}{B}} 2^{-k},$$

откуда немедленно следует (21). Обратно, полагая в (21) $B = 1/\epsilon$, пользуясь (24) и минорируя супремумы по s значением функции в фиксированной точке, приходим к (20). Лемма доказана.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОММУТАТИВНОСТИ

Покажем теперь, что в случае сходимости виковых рядов на аналитических пробных функциях для определяемых ими полей выполняются те обобщения локальной коммутативности, о которых шла речь в разделе 4.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{s}$ – ряд по виковым степеням обобщенного свободного поля ϕ и соблюдается предположение (6) о его коэффициентах. Пусть $b(s)$ – индикаторная функция пространства пробных функций, удовлетворяющая условию (20). Если S^b является пространством Гельфанда–Шилова–Гуревича, то поля $\varphi_{\mathfrak{s}'}$, определяемые рядами $\mathfrak{s}' \triangleleft \mathfrak{s}$, асимптотически коммутируют. Если $S^b = S^1$, то они взаимно локальны в смысле теории гиперфункций.

ЛЕММА 5. Пусть соблюдается условие (21). Если для любого набора $\mathfrak{s}_j \triangleleft \mathfrak{s}$, $1 \leq j \leq n$, функционал (16) имеет непрерывное продолжение на пространство $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$, где $V_{j,j+1}$ есть открытый конус $\{x \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid (x_j - x_{j+1})^2 > 0\}$, то поля, определяемые подчиненными $\mathfrak{s}$ рядами, асимптотически коммутируют. Если выполнено условие (18) и функционал (16) допускает непрерывное продолжение на $S^1(V_{j,j+1})$, то они взаимно локальны в смысле теории гиперфункций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi = \varphi_{\mathfrak{s}_1}(f_1) \dots \varphi_{\mathfrak{s}_l}(f_l) \Psi_0$, $\Psi = \varphi_{\mathfrak{s}'_1}(g_1) \dots \varphi_{\mathfrak{s}'_m}(g_m) \Psi_0$, где $\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}'_k \triangleleft \mathfrak{s}$, $f_i, g_k \in \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^{\mathbf{d}})$. Тогда значение функционала $\langle \Phi, [\varphi_{\mathfrak{s}'}(x'), \varphi_{\mathfrak{s}''}(x'')] \Psi \rangle$ на пробной функции $f \in \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^{2\mathbf{d}})$ совпадает со значением функционала вида (16) с соответствующим набором индексов на пробной функции $\bar{f}_l \otimes \dots \otimes \bar{f}_1 \otimes f \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_m$. Если $f \in \mathcal{E}^\beta(V^{(2\mathbf{d})})$, то это тензорное произведение является элементом $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$, непрерывно зависящим от f . Таким образом, существование непрерывного продолжения функционалов вида (16) на $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$ обеспечивает возможность непрерывного продолжения рассматриваемых матричных элементов коммутатора на $\mathcal{E}^\beta(V^{(2\mathbf{d})})$ и, тем более, на $\mathcal{E}^\beta(U)$, где $U \supset \bar{V}^{(2\mathbf{d})} \setminus \{0\}$. Аналогичные утверждения, с должными переобозначениями, верны для пространства S^1 . Поскольку $D(\mathfrak{s})$ является линейной оболочкой векторов Φ, Ψ указанного вида, лемма доказана.

В приведенном выводе критерия сходимости (21) ключевую роль играет варьирование плоскости интегрирования в представлении (22) с целью получения наилучшей оценки для каждого члена ряда в правой части (8). Мы применим эту же идею при доказательстве асимптотической коммутативности сумм виковых рядов. При этом, однако, придется интегрировать соответствующие аналитические функции по поверхностям более сложного вида. Варьирование таких поверхностей в области аналитичности возможно в силу теоремы Коши–Пуанкаре [16], однако для получения конкретных оценок нам будет удобнее использовать непосредственно теорему Стокса, лежащую в основе ее вывода.

В силу леммы 2 функционал (16) представляется рядом

$$\sum_K D_K(\mathbf{b}_{V_n} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_n} \mathbf{W}^K). \quad (25)$$

Ввиду бочечности пространств $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$, $S^1(V_{j,j+1})$ для непрерывного продолжения на них этого функционала достаточно построить непрерывные продолжения каждого члена ряда (25) и показать, что он абсолютно сходится на любом элементе соответствующего пространства. Мы детально рассмотрим продолжение на $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$, а затем поясним, как доказательство переносится на случай гиперфункций.

Для $\tau \geq 0$ и $1 \leq j \leq n$ определим множества

$$\begin{aligned}\Gamma_j^\tau &= \{x \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid (x_j - x_{j+1})^2 \leq -\tau^2\} = \{x \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid x_j - x_{j+1} \in G^\tau\}, \\ U_j^\tau &= \{y \in \mathbb{R}^{n\mathbf{d}} \mid y_i - y_l \in \mathbb{V} \text{ при } i < l, (i, l) \neq (j, j+1); y_j - y_{j+1} \in V^\tau\}.\end{aligned}$$

Соотношения (2)–(5) показывают, что при $0 \leq \tau' < \tau$ множество $\Gamma_j^\tau + iU_j^{\tau'}$ лежит в области аналитичности $\mathbf{W}^K(z)$, причем при $z = x + iy \in \Gamma_j^\tau + iU_j^{\tau'}$ справедлива оценка

$$|\mathbf{W}^K(z)| \leq u(\sqrt{\tau^2 - \tau'^2})^{K_{j,j+1}} \prod_{i < l, (i,l) \neq (j,j+1)} u(\sqrt{(y_i - y_l)^2})^{K_{i,l}}. \quad (26)$$

ЛЕММА 6. Пусть $\tau > 0$, $\eta = (\tau, 0, \dots, 0) \in \mathbb{V}_+$ и $f \in \mathcal{E}^\beta(\mathbb{R}^{n\mathbf{d}})$. Введем обозначения

$$\begin{aligned}y(t) &= \left(\eta, \dots, \left(j + \frac{1-t}{2}\right)\eta, \left(j + \frac{1+t}{2}\right)\eta, (j+2)\eta, \dots, n\eta\right), \\ F(x, t) &= \mathbf{W}^K(x + iy(t))f(x + iy(t)).\end{aligned} \quad (27)$$

При любых K и $1 \leq j \leq n$ имеет место тождество

$$(\mathbf{b}_{V_{n-}} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_{n-}} \mathbf{W}^K)(f) = I_1 + I_2, \quad (28)$$

где

$$I_1 = \int_{\mathbb{C}\Gamma_j^\tau} (F(x, 1) - F(x, -1)) dx, \quad (29)$$

$$I_2 = i\tau \int_{-1}^1 dt \int_{\mathbb{R}^{(n-1)\mathbf{d}}} d\xi_1 \dots d\xi_{j-1} d\xi_{j+1} \dots d\xi_n \int_{\partial G^\tau} F(P^{-1}\xi, t) \nu^0 dS_\tau, \quad (30)$$

P – линейный оператор, переводящий $x = (x_1, \dots, x_n)$ в $Px = (x_1 - x_2, \dots, x_{n-1} - x_n, x_n)$, ν – единичный вектор внутренней нормали к ∂G^τ , dS_τ – поверхностная мера на ∂G^τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $y(1) \in V_{n-}$, а $y(-1) \in \tau_j V_{n-}$ и, следовательно,

$$(\mathbf{b}_{V_{n-}} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_{n-}} \mathbf{W}^K)(f) = \int_{\mathbb{R}^{n\mathbf{d}}} (F(x, 1) - F(x, -1)) dx.$$

Разбивая область интегрирования на Γ_j^τ и $\mathbb{C}\Gamma_j^\tau$, перепишем правую часть последнего равенства в виде $I_1 + J$, где

$$J = \int_{\Gamma_j^\tau} (F(x, 1) - F(x, -1)) dx,$$

и покажем, что $J = I_2$. Пусть $0 < \tau' < \tau$. Согласно (19) и (26) для любого компакта $Q \subset U_j^{\tau'}$ справедлива оценка

$$|\mathbf{W}^K(z)f(z)| \leq C_{N,Q}(1+|x|)^{-N}$$

при $z \in \Gamma_j^\tau + iQ$. Пользуясь интегральной формулой Коши, нетрудно показать, что аналогичные неравенства выполнены и для производных. Следовательно, функция

$$\Phi(y) = \int_{\Gamma_j^\tau} \mathbf{W}^K(x+iy)f(x+iy) dx$$

дифференцируема, и с учетом уравнений Коши–Римана мы имеем

$$\frac{\partial \Phi(y)}{\partial y_l} = i \int_{\Gamma_j^\tau} \frac{\partial [\mathbf{W}^K(x+iy)f(x+iy)]}{\partial x_l^0} dx, \quad y \in U_j^{\tau'}.$$

Учитывая, что $y(t) \in U_j^{\tau'}$ при $-1 \leq t \leq 1$ и

$$\int_{\Gamma_j^\tau} F(x, t) dx = \Phi(y(t)),$$

получаем

$$J = \int_{-1}^1 dt \frac{d}{dt} \Phi(y(t)) = \frac{i\tau}{2} \int_{-1}^1 dt \int_{\Gamma_j^\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial x_{j+1}^0}(x, t) - \frac{\partial F}{\partial x_j^0}(x, t) \right) dx.$$

Введем обозначение $\tilde{F}(\xi, t) = F(P^{-1}\xi, t)$ и сделаем замену переменных $x \rightarrow P^{-1}\xi$. Тогда, принимая во внимание, что $P(\Gamma_j^\tau) = \mathbb{R}^{(n-1)\mathbf{d}} \times G^\tau$, приходим к равенству

$$J = \frac{i\tau}{2} \int_{-1}^1 dt \int_{\mathbb{R}^{(n-1)\mathbf{d}} \times G^\tau} \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_{j+1}^0}(\xi, t) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_{j-1}^0}(\xi, t) - 2 \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_j^0}(\xi, t) \right) d\xi.$$

Из (19), (26) вытекает, что $\tilde{F}(\xi, t) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\xi \in \mathbb{R}^{(n-1)\mathbf{d}} \times G^\tau$, откуда следует обращение в нуль интегралов от $\partial \tilde{F}/\partial \xi_{j+1}$ и $\partial \tilde{F}/\partial \xi_{j-1}$. Сводя кратный интеграл к повторному, получаем

$$J = -i\tau \int_{-1}^1 dt \int_{\mathbb{R}^{(n-1)\mathbf{d}}} d\hat{\xi} \int_{G^\tau} d\xi_j \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \xi_j^0}(\xi, t),$$

где $d\hat{\xi} = d\xi_1 \dots d\xi_{j-1} d\xi_{j+1} \dots d\xi_n$. Интеграл по G^τ можно рассматривать как интеграл от дивергенции векторного поля с компонентами $(\tilde{F}, \mathbf{0})$. Применяя теорему Стокса, заключаем, что $J = I_2$.

ЛЕММА 7. Функционал $\mathbf{b}_{V_n-} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_n-} \mathbf{W}^K$ допускает непрерывное продолжение на $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$, причем для любых $B > 0$, $N \geq (n+1)\mathbf{d}$ найдутся такие B', C , что для всех $f \in \mathcal{E}^{\beta,B}(V_{j,j+1})$

$$|(\mathbf{b}_{V_n-} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_n-} \mathbf{W}^K)(f)| \leq C \|f\|_{V_{j,j+1}, N, B} \inf_{\tau > 0} u(\tau)^{|K|} e^{\beta(B'\tau)}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что формулы (28)–(30) определяют желаемое продолжение, если считать f элементом пространства $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$. Оценим сначала I_1 , считая, что $f \in \mathcal{E}^{\beta,B}(V_{j,j+1})$. Нетрудно видеть, что $\delta_{V_{j,j+1}}(x) \leq \tau$ при $x \in \mathbb{C}\Gamma_j^\tau$. Кроме того, $|y(t)| \leq n|\eta| = n\tau$ при $-1 \leq t \leq 1$, и ввиду (19) и монотонности $\beta(s)$ имеем

$$|f(x + iy(t))| \leq \|f\|_{V_{j,j+1}, N, B} (1 + |x|)^{-N} e^{2\beta(Bn\tau)}, \quad x \in \mathbb{C}\Gamma_j^\tau. \quad (32)$$

Учитывая, что $y(\pm 1) \in V_n$, и пользуясь соотношениями (2), (3), монотонностью u и равенством $\sqrt{\eta^2} = \tau$, имеем

$$|F(x, \pm 1)| \leq \|f\|_{V_{j,j+1}, N, B} (1 + |x|)^{-N} u(\tau)^{|K|} e^{2\beta(Bn\tau)}$$

при $x \in \mathbb{C}\Gamma_j^\tau$. Таким образом,

$$|I_1| \leq C_1 \|f\|_{V_{j,j+1}, N, B} u(\tau)^{|K|} \exp(2\beta(Bn\tau)). \quad (33)$$

Теперь оценим I_2 . Заметим, что если $\xi_j \in \partial G^\tau$, то $P^{-1}\xi \in \partial \Gamma_j^\tau$. Кроме того, $(1 + |P|)(1 + |P^{-1}\xi|) \geq (1 + |\xi|)$, где $|P| = \sup_{|x| \leq 1} |Px|$. Используя (32) и неравенство $|\xi| \geq \max(|\xi_j|, |\hat{\xi}|)$, получаем

$$|f(P^{-1}\xi + iy(t))| \leq \frac{\|f\|_{V_{j,j+1}, N, B} (1 + |P|)^N}{(1 + |\hat{\xi}|)^{N-\mathbf{d}} (1 + |\xi_j|)^{\mathbf{d}}} \exp(2\beta(Bn\tau)), \quad \xi_j \in \partial G^\tau. \quad (34)$$

Теперь применим оценку (26), учитывая, что $y(t) \in U_j^0$ при $t \neq 0$, и используя монотонность u . В результате находим

$$|\mathbf{W}^K(P^{-1}\xi + iy(t))| \leq u(\tau)^{|K|}, \quad \xi_j \in \partial G^\tau. \quad (35)$$

Далее, существует не зависящая от τ константа C такая, что

$$\int (1 + |x|)^{-\mathbf{d}} |\nu^0| dS_\tau \leq C.$$

В самом деле,

$$|\nu^0| dS_\tau = r^{\mathbf{d}-2} d\Omega dr, \quad (36)$$

где $r = \|\mathbf{x}\|$ и $d\Omega$ — элемент площади поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^{\mathbf{d}-1}$.

Обозначим

$$C_2 = C(1 + |P|)^N \int \frac{d\hat{\xi}}{(1 + |\hat{\xi}|)^{N-d}}$$

и подставим соотношения (34), (35) в (27), (30). В результате получаем

$$|I_2| \leq C_2 \tau \|f\|_{V_{j,j+1},N,B} u(\tau)^{|K|} \exp(2\beta(Bn\tau)). \quad (37)$$

Наличие множителя $\|f\|_{V_{j,j+1},N,B}$ в оценках (33), (37) показывает, что формулы (28)–(30) определяют непрерывное продолжение распределения $\mathbf{b}_{V_n} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_n} \mathbf{W}^K$ на $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$, а в силу теоремы Коши–Пуанкаре построенные продолжения при разных τ совпадают между собой. С учетом неограниченности сверху и выпуклости β имеем $C_1 + C_2 \tau \leq C' \exp(\beta(Bn\tau))$, где $C' > 0$. Кроме того, $3\beta(nB\tau) \leq \beta(3nB\tau) + 2\beta(0)$ ввиду выпуклости β . Подставляя эти неравенства в (33), (37) и переходя к нижней грани по τ , получаем (31) с $B' = 3nB$. Лемма доказана.

Из леммы 7 немедленно вытекает, что ряд (25) абсолютно сходится на каждой пробной функции из $\mathcal{E}^\beta(V_{j,j+1})$, если для всех $B > 0$ сходится числовой ряд (23). Как было установлено при доказательстве теоремы 1, для этого достаточно выполнения условия (21), которое в силу леммы 4 равносильно критерию (20). Таким образом, теорема 2 доказана для случая пространств $\mathcal{E}^\beta$.

Доказательство леммы 6 прямо переносится на случай $f \in S^{1,B}(\mathbb{R}^{nd})$, если считать, что $\tau < 1/(nB)$. Воспроизводя с соответствующими изменениями вывод леммы 7, убеждаемся, что формулы (28)–(30) при всех $\tau < 1/(nB)$ определяют одно и то же непрерывное продолжение функционала $\mathbf{b}_{V_n} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_n} \mathbf{W}^K$ на $S^{1,B}(V_{j,j+1})$, причем

$$|(\mathbf{b}_{V_n} \mathbf{W}^K - \mathbf{b}_{\tau_j V_n} \mathbf{W}^K)(f)| \leq C \|f\|_{V_{j,j+1},N,B} \left(\frac{1}{nB}\right)^{|K|}. \quad (38)$$

Продолжения при разных B , очевидно, согласованы между собой и, следовательно, определяют непрерывное продолжение на $S^1(V_{j,j+1})$. В силу (38) ряд (25) абсолютно сходится на всех $f \in S^1(V_{j,j+1})$, если $\sum_K L^{|K|} |D_K| < \infty$ для всех $L > 0$. Упомянутая выше оценка коэффициентов D_K показывает, что это условие обеспечивается условием (18), и для завершения доказательства остается применить лемму 4.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вместе с результатами работы [2] теорема 2 показывает, что нелокальные поля, определяемые рядами по виковым степеням обобщенного свободного поля, удовлетворяют всем требованиям вайтмановской формулировки с заменой аксиомы локальности условием асимптотической коммутативности. Отметим, что использование обобщенных пространств Гельфанда–Шилова позволяет рассматривать также ряды, сходящиеся на квазианалитических классах пробных функций, задаваемых индикаторными функциями b , растущими медленнее линейной экспоненты, но не удовлетворяющих условию строгой локализуемости

$$\int_1^\infty \frac{\beta(s)}{s^2} ds < \infty,$$

обеспечивающему наличие в S^b функций с компактным носителем. Теорема 2 фактически включает и этот случай, поскольку обобщенные функции, определенные на таких пространствах, имеют те же носители, что и их ограничения на S^1 [17].

Благодарности. Авторы благодарны за финансовую поддержку РФФИ (гранты № 99-01-00376, 99-02-17916, 00-15-96566), а также фонду INTAS (грант INTAS-99-1-590).

Список литературы

- [1] *А. Г. Смирнов, М. А. Соловьев.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 355.
- [2] *А. Г. Смирнов, М. А. Соловьев.* ТМФ. 2000. Т. 125. С. 57.
- [3] *A. Rieckers.* Int. J. Theor. Phys. 1971. V. 4. P. 55.
- [4] *М. А. Соловьев.* ТМФ. 1999. Т. 121. С. 139.
- [5] *W. Lücke.* J. Phys. A. 1974. V. 7. P. 2258.
- [6] *M. A. Soloviev.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 2635.
- [7] *E. Brünig.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 3064.
- [8] *A. Kapustin.* On the universality class of little string theories. hep-th/9912044.
- [9] *S. B. Giddings.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 106008.
- [10] *J. W. Moffat.* Quantum field theory solution to the gange hierarchy and cosmological constant problems. hep-ph/0003171.
- [11] *Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [12] *Р. Йост.* Общая теория квантованных полей. М.: Мир, 1967.
- [13] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев.* Обобщенные функции. Т. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
- [14] *M. A. Soloviev.* Beyond the theory of hyperfunctions. In: Developments in Mathematics: The Moscow School. Eds. V. Arnold, M. Monastyrsky. London: Chapman and Hall, 1993. P. 131.
- [15] *S. Nagamachi, N. Mugibayashi.* J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 832.
- [16] *В. С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
- [17] *L. Hörmander.* Astérisque. 1985. V. 1. P. 89.

Поступила в редакцию 17.I.2001 г.