Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков, К теории раствора квантовых ферми-жидкостей с векторным параметром порядка, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 2, 317–335

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:51:49

© 2001 г.

М. Ю. Ковалевский*, А. А. Рожков†

К ТЕОРИИ РАСТВОРА КВАНТОВЫХ ФЕРМИ-ЖИДКОСТЕЙ С ВЕКТОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОРЯДКА

Построена термодинамика и дан вывод уравнений гидродинамики раствора сверхтекучих ферми-жидкостей с векторным параметром порядка. Термодинамические величины, связанные со спонтанным нарушением фазовой симметрии и спиновых вращений, представлены в терминах оператора параметра порядка. Предсказан новый эффект увлечения, связанный со взаимным влиянием магнитных и орбитальных степеней свободы. Получены спектры коллективных возбуждений, и обсуждены отличия рассматриваемого состояния от состояний со скалярным и тензорным параметрами порядка.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные тенденции развития теории квантовых жидкостей связаны с изучением состояний, характеризующихся различными параметрами порядка (ПП). Такие конденсированные среды, как сверхтекучая фаза He-3, многокомпонентная электронная жидкость в 3d-металлах, сверхтекучая ядерная материя, описываются в терминах векторного или тензорного ПП. Наиболее изученные примеры квантовых бозе- и ферми-жидкостей в сверхтекучем состоянии характеризуются скалярным ПП [1], [2]. В однокомпонентной сверхтекучей ферми-жидкости с триплетным спариванием имеет место спонтанное нарушение симметрии относительно фазовых преобразований и групп вращений в конфигурационном и спиновом пространствах. Эти состояния описываются тензорным ПП [3]–[6]. Построению термодинамики и выводу уравнений гидродинамики таких систем посвящены работы [3], [4], [7], [8], где, как правило, используются различного рода модельные гамильтонианы.

Явление сверхтекучести в случае конденсированных сред с несколькими законами сохранения числа частиц для скалярного ПП изучалось в работах [9]–[11]. Для раствора ферми-жидкостей, помимо скалярных и тензорных ПП, характерных для однокомпонентной жидкости, можно ввести ПП векторного типа в конфигурационном или спиновом пространстве. В этом случае возникают задачи описания равновесия и гидро-

* Харьковский физико-технический институт, Харьков, Украина

† Научный физико-технологический центр НАН и МО Украины, Харьков, Украина

динамического этапа с векторным ПП, сравнения с другими возможными физическими состояниями со скалярным и тензорным ПП.

Эффективным инструментом построения теории квантовых жидкостей является ферми-жидкостный подход [12], применявшийся для описания сверхтекучих жидкостей с синглетным спариванием [13], триплетным спариванием [14], [15], магнитных систем со спонтанным нарушением симметрии [16]. Ферми-жидкостный подход для многокомпонентных систем был использован при описании сверхпроводимости двухзонных сверхпроводников [17] и сверхтекучести электрон-позитронной плазмы [18]. В рамках этого подхода в работах [19]–[21] исследованы возможные фазовые переходы со скалярными и тензорными ПП, найдены энергетические спектры квазичастиц и температуры фазовых переходов в сверхтекучей ядерной материи.

В данной работе изучено состояние равновесия и сформулированы свойства симметрии растворов ферми-жидкостей с векторным ПП. Введены дополнительные термодинамические параметры на основе векторного ПП, получен второй закон термодинамики и найдены плотности потоков аддитивных интегралов движения в терминах плотности термодинамического потенциала в состоянии локального равновесия. Дан вывод уравнений идеальной гидродинамики без использования конкретной динамической симметрии функционала энергии и получены спектры собственных колебаний. Проведено сравнение полученных уравнений с известными уравнениями гидродинамики растворов сверхтекучих жидкостей, описываемых скалярным и тензорным ПП. Показано, что в рассматриваемых растворах ферми-жидкостей возникают эффекты увлечения, связанные с влиянием сверхтекучего движения одной компоненты на движение другой. Кроме того, имеют место эффекты увлечения нового типа, которые проявляются во взаимном влиянии спиновых и орбитальных степеней свободы. Изучено влияние этих эффектов на спектры коллективных возбуждений рассматриваемой системы.

2. ПАРАМЕТРЫ ПОРЯДКА В КВАНТОВЫХ ФЕРМИ-ЖИДКОСТЯХ И ИХ РАСТВОРАХ

При построении термодинамики и получении уравнений гидродинамики квантовых систем со спонтанно нарушенной симметрией полный набор параметров сокращенного описания содержит, кроме плотностей аддитивных интегралов движения, также дополнительные термодинамические величины, связанные с нарушенной симметрией и определяемые в терминах ПП. Поэтому возникает необходимость изучения влияния структуры возможных ПП на термодинамику, уравнения гидродинамики и спектры коллективных возбуждений в каждом конкретном случае нарушения симметрии состояния равновесия.

В случае однокомпонентной ферми-жидкости с синглетным спариванием скалярный оператор ПП имеет вид

$$\hat{\Delta}(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \psi(\mathbf{x}) \sigma_2 \psi(\mathbf{x}).$$

Случай триплетного спаривания описывается тензорным ПП [3], [4], [22]

$$\hat{\Delta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) = (\nabla_k \psi(\mathbf{x})) \sigma_2 \sigma_\alpha \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \sigma_2 \sigma_\alpha \nabla_k \psi(\mathbf{x}),$$

где σ_α — матрицы Паули, $\psi, \psi^\dagger$ — полевые ферми-операторы.

Рассмотрим теперь раствор двух ферми-жидкостей. Здесь возможны новые типы ПП по сравнению с однокомпонентным случаем. Помимо “*скалярных*”

$$\hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \psi_a(\mathbf{x}) \sigma_2 \psi_a(\mathbf{x}), \quad a = 1, 2, \quad (1)$$

и “*тензорных*”

$$\hat{\Delta}_{a,\alpha k}(\mathbf{x}) = (\nabla_k \psi_a(\mathbf{x})) \sigma_2 \sigma_\alpha \psi_a(\mathbf{x}) - \psi_a(\mathbf{x}) \sigma_2 \sigma_\alpha \nabla_k \psi_a(\mathbf{x}) \quad (2)$$

ПП, описывающих каждую компоненту в отдельности, могут быть введены также “*векторные*” ПП двух типов

$$\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) = \psi_1(\mathbf{x}) \sigma_2 \sigma_\alpha \psi_2(\mathbf{x}), \quad (3)$$

$$\hat{\Delta}_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} [(\nabla_k \psi_1(\mathbf{x})) \sigma_2 \psi_2(\mathbf{x}) - \psi_1(\mathbf{x}) \sigma_2 \nabla_k \psi_2(\mathbf{x})], \quad (4)$$

которые строятся из полевых операторов обеих компонент раствора. Векторный ПП (4) описывает пространственно-анизотропные жидкокристаллические и изотропные в спиновом пространстве сверхтекучие состояния. ПП (3) описывает анизотропные в спиновом и изотропные в конфигурационном пространствах сверхтекучие состояния.

В этой работе мы рассмотрим состояния раствора сверхтекучих ферми-жидкостей, описываемые только ПП типа (3), и обсудим возникающие отличия в термодинамике и уравнениях гидродинамики от состояний растворов ферми-жидкостей со скалярным (1) и тензорным (2) ПП.

Используя представление операторов плотностей аддитивных интегралов движения в терминах ферми-операторов рождения–уничтожения и коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} \{\psi_{a\mu}(\mathbf{x}), \psi_{a\nu}^\dagger(\mathbf{x}')\} &= \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \{\psi_{a\mu}(\mathbf{x}), \psi_{a\nu}(\mathbf{x}')\} = 0, \\ [\psi_{1\mu}(\mathbf{x}), \psi_{2\mu}^\dagger(\mathbf{x}')] &= [\psi_{1\mu}(\mathbf{x}), \psi_{2\mu}(\mathbf{x}')] = 0, \quad a = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

легко видеть, что для оператора ПП (3) справедливы равенства

$$\begin{aligned} [\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x}')] &= i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Delta}_\gamma(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\hat{n}_1(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}')] &= [\hat{n}_2(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}')] = -\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}')] &= -i \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) \nabla_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (6) позволяют найти законы преобразования векторного ПП при локальных преобразованиях, где генераторами являются плотности аддитивных интегралов движения.

При локальных фазовых $U_{\varphi a} \equiv \exp(-i \int d^3 x \varphi_a(\mathbf{x}) \hat{n}_a(\mathbf{x}))$, $a = 1, 2$, и спиновых $U_\theta \equiv \exp(-i \int d^3 x \theta_\alpha(\mathbf{x}) \hat{s}_\alpha(\mathbf{x}))$ преобразованиях полевые ферми-операторы подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} U_\theta^+ \psi_{a\mu}(\mathbf{x}) U_\theta &= \exp\left(\frac{i}{2} \sigma_\alpha \theta_\alpha(\mathbf{x})\right) \psi_{a\mu}(\mathbf{x}), \\ U_{\varphi a}^+ \psi_{a\mu}(\mathbf{x}) U_{\varphi a} &= \psi_{a\mu}(\mathbf{x}) e^{-i\varphi_a(\mathbf{x})}, \\ U_{\varphi a}^+ \psi_{b\mu}(\mathbf{x}) U_{\varphi a} &= \psi_{b\mu}(\mathbf{x}), \quad a \neq b. \end{aligned} \quad (7)$$

При локальных преобразованиях $U_{\varphi a}$, U_θ векторный оператор ПП (3) в силу (7) изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} U_\theta^+ \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) U_\theta &= a_{\alpha\beta}(\theta(\mathbf{x})) \hat{\Delta}_\beta(\mathbf{x}), \\ U_{\varphi a}^+ \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) U_{\varphi a} &= \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) \exp(-2i\varphi_a(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (8)$$

В соответствии с (5) скалярные операторы ПП (1) подчиняются коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}')] &= 0, \quad [\hat{n}_a(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_b(\mathbf{x}')] = -2\delta_{ab} \hat{\Delta}_b(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}')] &= -i \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) \nabla_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad a, b = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

При локальных спиновых и фазовых преобразованиях операторы (1) согласно (7) изменяются по законам

$$\begin{aligned} U_\theta^+ \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) U_\theta &= \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}), \quad U_{\varphi a}^+ \hat{\Delta}_b(\mathbf{x}) U_{\varphi a} = \hat{\Delta}_b(\mathbf{x}), \quad a \neq b, \\ U_{\varphi a}^+ \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) U_{\varphi a} &= \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) \exp(-2i\varphi_a(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (10)$$

Тензорные параметры порядка (2) ввиду формул (5) удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} i[\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_{a,\beta i}(\mathbf{x}')] &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Delta}_{a,\gamma i}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \delta_{\alpha\beta} \nabla_i (\hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')), \\ [\hat{n}_a(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_{b,\beta i}(\mathbf{x}')] &= -2\delta_{ab} \hat{\Delta}_{b,\beta i}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ i[\hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \hat{\Delta}_{a,\alpha i}(\mathbf{x}')] &= \hat{\Delta}_{a,\alpha i}(\mathbf{x}) \nabla_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \nabla_i (\hat{\Delta}_{a,\alpha k}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')). \end{aligned} \quad (11)$$

При локальных спиновых U_θ и фазовых $U_{\varphi 1}$, $U_{\varphi 2}$ преобразованиях с учетом (7) тензорные операторы ПП (2) изменяются по законам

$$\begin{aligned} U_\theta^+ \hat{\Delta}_{a,\alpha i}(\mathbf{x}) U_\theta &= a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_{a,\beta i}(\mathbf{x}) - \underline{\omega}_{\alpha i}(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}), \\ U_{\varphi a}^+ \hat{\Delta}_{a,\alpha i}(\mathbf{x}) U_{\varphi a} &= \hat{\Delta}_{a,\alpha i}(\mathbf{x}) \exp(-2i\varphi_a(\mathbf{x})), \\ U_{\varphi a}^+ \hat{\Delta}_{b,\alpha i}(\mathbf{x}) U_{\varphi a} &= \hat{\Delta}_{b,\alpha i}(\mathbf{x}), \quad a \neq b. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь ортогональная матрица поворота $a_{\alpha\beta}(\theta)$ связана с локальным углом поворота θ_α соотношением $a_{\alpha\beta}(\theta) = (\exp(-\varepsilon\theta))_{\alpha\beta}$, где $(\varepsilon\theta)_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \theta_\gamma$. В терминах матрицы поворота правая форма Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}$ [23] определяется равенством

$$\underline{\omega}_{\alpha k}(a) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (a \nabla_k \tilde{a})_{\gamma\beta}.$$

Преобразования произвольных деформаций задаются унитарным оператором

$$U_\eta \equiv \exp\left(-i \int d^3x \eta_i(\mathbf{x}) \hat{\pi}_i(\mathbf{x})\right), \quad (13)$$

где $\eta_i(\mathbf{x})$ – параметр преобразования. При преобразовании (13) операторы $\psi_a(\mathbf{x})$ изменяются согласно законам

$$U_\eta^+ \psi_a(\mathbf{x}) U_\eta = \alpha^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) \psi_a(\mathbf{x}'(\mathbf{x})), \quad a = 1, 2, \quad (14)$$

где вектор $x'_i(\mathbf{x}) \equiv x_i - u_i(\mathbf{x})$ ($u_i(\mathbf{x})$ – вектор смещения) является функционалом параметра преобразования $\eta_i(\mathbf{x})$ и переходит в x_i при $\eta_i = 0$, $\alpha(\mathbf{x}) = |\det(\hat{\alpha}(\mathbf{x}))|$, $\alpha_{ik}(\mathbf{x}) = \partial x'_i(\mathbf{x}) / \partial x_k$. Тогда операторы ПП типа (1)–(3) преобразуются по законам

$$\begin{aligned} U_\eta^+ \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) U_\eta &= \alpha(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}'(\mathbf{x})), & U_\eta^+ \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) U_\eta &= \alpha(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}'(\mathbf{x})), \\ U_\eta^+ \hat{\Delta}_{ai}(\mathbf{x}) U_\eta &= \alpha(\mathbf{x}) \alpha_{ki}(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_{ak}(\mathbf{x}'(\mathbf{x})), & a &= 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученные в этом разделе соотношения необходимы при построении термодинамики, нахождении плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах термодинамического потенциала и выводе уравнений гидродинамики.

3. ОПИСАНИЕ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ

В соответствии с общим ферми-жидкостным подходом энергия системы представляет собой функционал статистического оператора

$$E = E(\hat{f}) \equiv \int d^3x e(\mathbf{x}, \hat{f}),$$

где $e(\mathbf{x}, \hat{f})$ – плотность функционала энергии системы, $\hat{f}$ – статистический оператор. Операторы энергии $\hat{\varepsilon}(\hat{f})$ и плотности энергии квазичастиц $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f})$ задаются соотношением

$$\hat{\varepsilon}(\hat{f}) = \frac{\delta E}{\delta \hat{f}} = \int d^3x \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}).$$

Дифференциальные законы сохранения для плотностей аддитивных интегралов движения ζ_r можно записать в виде [13]

$$\dot{\zeta}_r(\mathbf{x}, \hat{f}) = -\nabla_k \zeta_{rk}(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad (16)$$

где $\zeta_r(\mathbf{x}, \hat{f}) = \text{Sp } \hat{f} \hat{\zeta}_r(\mathbf{x})$ ($r = 0, i, \alpha, a$; $a = 1, 2$) и $\zeta_{rk}(\mathbf{x}, \hat{f}) = \text{Sp } \hat{f} \hat{\zeta}_{rk}(\mathbf{x})$ – плотности аддитивных интегралов движения и соответствующие им потоки ($\hat{\zeta}_r(\mathbf{x}, \hat{f}) = \{\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, \hat{f}),$

$\hat{\pi}_i(\mathbf{x}), \hat{s}_\alpha(\mathbf{x}), \hat{n}_a(\mathbf{x})\}$ – операторы плотностей). Операторы $\hat{\zeta}_{rk}(\mathbf{x})$ в соответствии с [13] можно представить в терминах операторов $\hat{\zeta}_r(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_{0k}(\mathbf{x}, \hat{f}) &= \frac{i}{2} \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\lambda [\hat{\zeta}_0(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\zeta}_0(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}')], \\ \hat{\zeta}_{r'k}(\mathbf{x}, \hat{f}) &= i \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\lambda [\hat{\zeta}_0(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\zeta}_{r'}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}')], \quad r' = \alpha, a, \\ \text{Sp } \hat{f} \hat{\zeta}_{kj}(\mathbf{x}, \hat{f}) &= -e(\mathbf{x}, \hat{f}) \delta_{kj} + i \int d^3 x' x'_k \times \\ &\quad \times \int_0^1 d\lambda \text{Sp } \hat{f} [\hat{\zeta}_0(\mathbf{x} - (1-\lambda)\mathbf{x}', \hat{f}), \hat{\zeta}_j(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}')].\end{aligned}\tag{17}$$

Равновесный статистический оператор нормального состояния раствора двух ферми-жидкостей $\hat{f}$ может быть найден исходя из требования максимума энтропии при фиксированных значениях аддитивных интегралов движения γ_r . Из условия экстремума для термодинамического потенциала Ω (варьирование производится по статистическому оператору $\hat{f}_0$)

$$\begin{aligned}\delta\Omega(\hat{f}_0, Y) &= 0, \quad \Omega(\hat{f}_0, Y) = -\mathcal{S}(\hat{f}_0) + Y_r \gamma_r, \\ \mathcal{S}(\hat{f}_0) &= -\text{Sp}\{\hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 + (1 - \hat{f}_0) \ln(1 - \hat{f}_0)\}\end{aligned}$$

приходим к уравнению самосогласования для равновесного оператора

$$\hat{f}_0 = [\exp(Y_r \hat{\gamma}_r(\hat{f})) + 1]^{-1}.\tag{18}$$

Здесь $Y_r = (Y_0, Y_\alpha, Y_k, Y_a)$ – термодинамические силы, соответствующие величинам $\gamma_r = (E(\hat{f}), S_\alpha, \mathcal{P}_k, N_a)$. Равновесное состояние нормального раствора ферми-жидкостей характеризуется только термодинамическими параметрами Y_r . Состояние, описываемое статистическим оператором (18), обладает свойствами симметрии

$$[\hat{f}_0, \hat{\mathcal{P}}_i] = [\hat{f}_0, \hat{S}'_\alpha] = [\hat{f}_0, \hat{\varepsilon}(\hat{f}_0)] = [\hat{f}_0, \hat{N}_a] = [\hat{f}_0, \hat{L}'_i] = 0.\tag{19}$$

Здесь $\hat{S}'_\alpha = \hat{S}_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\beta \partial/\partial Y_\gamma$, $\hat{L}'_i = \hat{L}_i - i\varepsilon_{ikl} Y_k \partial/\partial Y_l$ – обобщенные операторы спина и орбитального момента, а $\hat{L}_i = \int d^3 x \varepsilon_{ijk} x_j \hat{\pi}_k(\mathbf{x})$ – орбитальный момент. Для описания сверхтекучих состояний в соответствии с концепцией квазисредних [24] определим равновесное среднее равенством

$$\begin{aligned}a(\mathbf{x}, \hat{f}) &= \text{Sp } \hat{f} \hat{a}(\mathbf{x}) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Sp } \hat{f}_\nu \hat{a}(\mathbf{x}), \\ \hat{f}_\nu &= [\exp(Y_r \hat{\gamma}_r + \nu Y_0 \hat{G}) + 1]^{-1},\end{aligned}\tag{20}$$

где $\hat{a}(\mathbf{x})$ – произвольный квазилокальный оператор. Источник $\hat{G}$ нарушает соотношения симметрии (19) и представляет собой линейный функционал операторов ПП

$$\hat{G} = \int d^3 x \{g_\alpha(\mathbf{x}, t) \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}) + g_a(\mathbf{x}, t) \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) + g_{a,\alpha k}(\mathbf{x}, t) \hat{\Delta}_{a,\alpha k}(\mathbf{x}) + \text{э.с.}\}.$$

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Конкретный вид функций $g_a(\mathbf{x}, t)$, $g_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $g_{a,\alpha k}(\mathbf{x}, t)$ определяется свойствами симметрии состояния равновесия.

Рассмотрим одно из возможных состояний равновесия раствора ферми-жидкостей, обладающее свойствами симметрии [11]

$$\begin{aligned} [\hat{f}^s, \hat{\mathcal{P}}_k - p_{ak}\hat{N}_a] &= 0, \quad [\hat{f}^s, \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + p_{a0}\hat{N}_a] = 0, \quad [\hat{f}^s, \hat{S}'_\alpha] = 0, \\ [\hat{f}^s, \hat{L}''_k] &= 0, \quad \hat{L}''_i = \hat{L}'_i - i\varepsilon_{ikl}p_{ak}\frac{\partial}{\partial p_{al}}, \quad p_{20} = Y_0^{-1}(Y_a + Y_k p_{ak}). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь p_{ak} – сверхтекучие импульсы в равновесном состоянии. Легко видеть, что вследствие коммутационных соотношений (6), (11) и свойств симметрии состояния (21) средние значения векторного и тензорных ПП в этом состоянии обращаются в ноль (ПП (2), (3) обращаются в ноль в силу третьего соотношения свойств симметрии (21)). Равновесное значение скалярного ПП можно представить в виде

$$\Delta_a^{(s)}(\mathbf{x}) = \Delta_a(\text{inv})e^{i(\mathbf{p}_a\mathbf{x} + \theta_a)}, \quad \Delta_\alpha^{(s)} = \Delta_{a,\alpha k}^{(s)} = 0, \quad a = 1, 2, \quad (22)$$

где индекс “s” соответствует равновесному состоянию (21). Назовем такие состояния *синглетными*, т.к. они характеризуются ненулевым синглетным ПП в этом состоянии. Такого типа состояния исследовались в работах [9], [11].

Другим возможным равновесным состоянием раствора ферми-жидкостей является состояние, обладающее свойствами симметрии [14]

$$\begin{aligned} [\hat{f}^t, \hat{\mathcal{P}}_k - q_k n_\alpha \hat{S}'_\alpha - p_{ak}\hat{N}_a] &= 0, \quad [\hat{f}^t, \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + \omega_{\alpha 0}\hat{S}'_\alpha + p_{a0}\hat{N}_a] = 0, \\ [\hat{f}^t, \hat{L}''_k + a'_{k\alpha}\hat{S}'_\alpha] &= 0, \quad \hat{L}''_i = \hat{L}'_i - i\varepsilon_{ikl}\left(p_{ak}\frac{\partial}{\partial p_{al}} + q_k\frac{\partial}{\partial q_l}\right), \\ \omega_{\alpha 0} &= Y_0^{-1}(Y_\alpha + Y_k q_k n_\alpha), \quad p_{a0} = Y_0^{-1}(Y_a + Y_k p_{ak}). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $n_\alpha = Y_\alpha/|Y|$ определяется из условия совместности соотношений пространственной однородности и стационарности (первое и второе соотношения из свойств (23)). Было найдено, что для такого состояния в силу соотношений (6), (9) и свойств симметрии (23) скалярные и векторный ПП обращаются в ноль (в силу третьего из соотношений симметрии (23)), а тензорные ПП в этом состоянии представимы в форме

$$\Delta_{a,\alpha k}^{(t)}(\mathbf{x}) = \Delta_a(\text{inv})a'_{k\beta}a_{\beta\alpha}e^{i(\mathbf{p}_a\mathbf{x} + \theta_a)}, \quad \Delta_a^{(t)} = \Delta_\alpha^{(t)} = 0, \quad a = 1, 2. \quad (24)$$

Индекс “t” соответствует равновесному состоянию (23). Его по аналогии можно называть *триплетным*. Оно описывает класс возможных равновесных состояний типа В-фазы сверхтекучего He-3, в котором отличны от нуля равновесные значения спина и вектора магнитной спирали в растворе двух квантовых ферми-жидкостей.

При формулировке свойств симметрии состояния равновесия раствора ферми-жидкостей с векторным ПП мы исходим из того, что выписанный набор свойств симметрии образует замкнутую операторную алгебру, и из требования обращения в ноль в этом

состоянии скалярных и тензорных ПП. При этом векторный ПП (3) отличен от нуля. Эти свойства симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{f}^v, \hat{\mathcal{P}}_k - q_k n_\alpha \hat{S}'_\alpha - p_{ak} \hat{N}_a] &= 0, & [\hat{f}^v, \hat{\varepsilon}(\hat{f}) + \omega_{\alpha 0} \hat{S}'_\alpha + p_{a0} \hat{N}_a] &= 0, \\ [\hat{f}^v, \underline{d}_\alpha \hat{S}'_\alpha - m_s(\hat{N}_1 + \hat{N}_2)] &= 0, & [\hat{f}^v, \hat{L}''_k + \varrho_k(\hat{N}_1 - \hat{N}_2)] &= 0, \\ \hat{L}''_i &= \hat{L}'_i - i\varepsilon_{ikl} \left(p_{ak} \frac{\partial}{\partial p_{al}} + q_k \frac{\partial}{\partial q_l} \right), & \omega_{\alpha 0} &= Y_0^{-1} (Y_\alpha + Y_k q_k n_\alpha). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $n_\alpha = Y_\alpha / |Y|$ определяется таким же образом, как в случае (23), q_i – вектор магнитной спирали, $\underline{d}_\alpha$ – вектор магнитной анизотропии, m_s – некоторая константа и ϱ_i – некоторый вектор, которые мы определим ниже.

Воспользовавшись соотношениями (9), (11) и свойствами симметрии (25), получим, что скалярные и тензорные ПП обращаются в ноль (ПП (1), (2) обращаются в ноль в силу четвертого из соотношений симметрии (25)), а векторный ПП в этом состоянии отличен от нуля и имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^{(v)}(\mathbf{x}) &= (\Delta_I e_\alpha(\mathbf{x}) + i\Delta_{II} f_\alpha(\mathbf{x})) e^{i((\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)\mathbf{x} + \theta')}, \\ \Delta_a^{(v)} &= 0, \quad \Delta_{a, \alpha k}^{(v)} = 0, \quad a = 1, 2, \quad e^2 = f^2 = 1, \quad \mathbf{e}\mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{d} = \mathbf{e} \times \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражение для $\Delta_\alpha^{(v)}(\mathbf{x})$ непосредственно вытекает из первого соотношения симметрии (25). Здесь индекс “v” соответствует равновесному состоянию (25). Рассмотренное состояние будем называть *векторным*.

Исходя из групповых свойств симметрии (25) найдем выражение для m_s . Используя формулы (6), (25), (26), получим $2m_s \Delta_I + \Delta_{II} = 0$, $\Delta_I + 2m_s \Delta_{II} = 0$. Эта система имеет нетривиальные решения для Δ_I, Δ_{II} тогда и только тогда, когда $m_s = \pm 1/2$.

Для того чтобы выражение для $\Delta_\alpha^{(v)}(\mathbf{x})$ (26) не обращалось в ноль, достаточно рассмотреть свойство симметрии $[\hat{f}^v, \hat{L}''_k] = 0$. В этом случае также остаются отличные от нуля значения скалярных ПП $\Delta_a^{(v)}(\mathbf{x})$. Введение дополнительного слагаемого $\varrho_k(\hat{N}_1 - \hat{N}_2)$ в симметричное соотношение обращает в ноль последние. Определим вектор ϱ_i , воспользовавшись тождеством Якоби и требованием полноты системы свойств симметрии (25). Этот вектор в силу соотношения

$$[\hat{L}''_k + \varrho_k(\hat{N}_1 - \hat{N}_2), \hat{L}''_l + \varrho_l(\hat{N}_1 - \hat{N}_2)] = i\varepsilon_{klm} (\hat{L}''_m + \varrho_m(\hat{N}_1 - \hat{N}_2))$$

имеет вид $\varrho_i = [\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1]_i / |[\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1]|$.

Учитывая (6), (9), (11), (25), найдем функции g в этом состоянии

$$\begin{aligned} g_a(\mathbf{x}, t) &= \exp(-i\varphi_a(\mathbf{x}, t)), \quad a = 1, 2, \\ g_{a, \alpha k}(\mathbf{x}, t) &= a'_{k\beta} a_{\beta\alpha}(\theta(\mathbf{x}, t)) \exp(-2i\varphi_a(\mathbf{x})), \\ g_\alpha(\mathbf{x}, t) &= (e_\alpha(\mathbf{x}, t) + 2im_s f_\alpha(\mathbf{x}, t)) \exp(-i(\varphi_1(\mathbf{x}, t) + \varphi_2(\mathbf{x}, t))), \\ e_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \underline{e}_\beta a_{\beta\alpha}(\mathbf{x}, t), \quad f_\alpha(\mathbf{x}, t) = \underline{f}_\beta a_{\beta\alpha}(\mathbf{x}, t), \\ \theta_\alpha(\mathbf{x}, t) &= n_\alpha(\mathbf{q}\mathbf{x} - q_0 t) + \theta_\alpha^0, \quad \varphi_a(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_a \mathbf{x} - p_{a0} t + \varphi_{a0}. \end{aligned} \quad (27)$$

Состояние равновесия типа (25) характеризуется следующими дополнительными термодинамическими параметрами: сверхтекучими фазами и импульсами, вектором магнитной анизотропии, вектором магнитной спирали, ортогональной матрицей однородного спинового поворота.

4. ЛОКАЛЬНО-РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Статистический оператор, описывающий локально-равновесные вырожденные состояния, определим равенством

$$\hat{f}\{Y(\mathbf{x}), a(\mathbf{x}), \varphi_a(\mathbf{x})\} = \left[\exp \int d^3x \left(Y_r(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_r(\mathbf{x}, \hat{f}) + \nu Y_0(\mathbf{x}) U_{\varphi_1}^+ U_{\varphi_2}^+ U_{\theta}^+ \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (g_a(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_a(\mathbf{x}) + g_{a,\alpha k}(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_{a,\alpha k}(\mathbf{x}) + g_{\alpha}(\mathbf{x}) \hat{\Delta}_{\alpha}(\mathbf{x}) + \text{э.с.}) U_{\theta} U_{\varphi_2} U_{\varphi_1} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (28)$$

где $g_a(\mathbf{x})$, $g_{\alpha}(\mathbf{x})$, $g_{a,\alpha k}(\mathbf{x})$ – некоторые с-числовые функции. В этом состоянии термодинамические параметры $Y(\mathbf{x})$, сверхтекучие фазы $\varphi_a(\mathbf{x})$ ($a = 1, 2$) и ортогональная матрица $a(\mathbf{x})$ являются произвольными функциями координат. В состоянии полного равновесия термодинамические силы $Y(\mathbf{x}) = Y$ однородны, а структура сверхтекучих фаз $\varphi_a(\mathbf{x})$ и ортогональной матрицы $a_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ определяются формулами (27).

Определим локально-равновесный термодинамический потенциал равенством

$$\Omega(\hat{f}(Y, a, \varphi_a), Y) = -\mathcal{S}(\hat{f}) + \int d^3x Y_r(\mathbf{x}) \text{Sp} \hat{f} \hat{\zeta}_r(\mathbf{x}). \quad (29)$$

Здесь $Y_r(\mathbf{x})$ – множители Лагранжа, соответствующие величинам $\zeta_r(\mathbf{x}) = \text{Sp} \hat{f} \hat{\zeta}_r(\mathbf{x})$. Локально-равновесный термодинамический потенциал Ω является функционалом термодинамических параметров $\underline{Y}_r = \{Y_0, \underline{Y}_{\alpha} = a_{\alpha\beta} Y_{\beta}, Y_i, Y_a\}$, правой формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k}(\mathbf{x}')$ и сверхтекучих импульсов $\mathbf{p}_a = \nabla \theta_a$,

$$\Omega = \Omega(\underline{Y}(\mathbf{x}'), \underline{\omega}_k(\mathbf{x}'), \mathbf{p}_a(\mathbf{x}')) = \int d^3x \omega(\mathbf{x}, \underline{Y}(\mathbf{x}'), \underline{\omega}_k(\mathbf{x}'), \varphi_a(\mathbf{x}')), \quad (30)$$

где ω – плотность термодинамического потенциала. Варьируя (30) по термодинамическим параметрам, получим

$$\delta\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\underline{Y}_r} \delta\underline{Y}_r + \frac{\partial\omega}{\partial\underline{\omega}_{\alpha k}} \delta\underline{\omega}_{\alpha k} + \frac{\partial\omega}{\partial p_{ak}} \delta p_{ak}. \quad (31)$$

Получим выражения для плотностей потоков числа частиц каждого сорта. Рассмотрим потенциал (29), который связан с группой произвольных фазовых преобразований. Его вариацию запишем в виде

$$\delta\varphi_a \Omega = -i \int d^3x d^3x' \delta\varphi_a(\mathbf{x}') \text{Sp} \hat{f} [\hat{n}_a(\mathbf{x}'), Y_r(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_r(\mathbf{x})], \quad a = 1, 2.$$

Используя коммутационные соотношения для аддитивных интегралов движения, получим

$$\delta_{\varphi a} \Omega = \int d^3 x \left(Y_0(\mathbf{x}) i_{ak}(\mathbf{x}) + Y_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega}{\partial Y_a} \right) \nabla_k \delta \varphi_a(\mathbf{x}).$$

С другой стороны, можно записать, что

$$\delta_{\varphi a} \Omega = \int d^3 x \delta_{\varphi a} \omega(\mathbf{x}) = \int d^3 x \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} \nabla_k \delta \varphi_a(\mathbf{x}).$$

Сравнивая два последних выражения, найдем плотности потока числа частиц каждого сорта

$$j_{ak} = \frac{1}{Y_0} \frac{\delta \omega}{\delta p_{ak}} - \frac{Y_k}{Y_0} \frac{\delta \omega}{\delta Y_a}. \quad (32)$$

Теперь найдем выражение для плотности потока спина. Вариация потенциала (29), связанная со спиновыми вращениями, может быть представлена в виде

$$\delta_{\theta} \Omega = -i \int d^3 x d^3 x' \delta R_{\alpha}(\mathbf{x}') \text{Sp} \hat{f}[\hat{s}_{\alpha}(\mathbf{x}'), Y_r(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_r(\mathbf{x})], \quad \delta R_{\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} a_{\rho\gamma} \delta a_{\rho\beta}.$$

Снова воспользуемся коммутационными соотношениями для аддитивных интегралов движения и получим

$$\begin{aligned} \delta_{\theta} \Omega &= \int d^3 x \left\{ - \left(Y_0(\mathbf{x}) j_{\alpha k}(\mathbf{x}) + Y_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega}{\partial Y_{\alpha}} \right) \nabla_k \delta R_{\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_{\beta} \frac{\partial \omega}{\partial Y_{\gamma}} \right\} = \\ &= - \int d^3 x \left(Y_0(\mathbf{x}) \underline{j}_{\alpha k}(\mathbf{x}) + Y_k(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega}{\partial \underline{Y}_{\alpha}} \right) \delta \underline{\omega}_{\alpha k}. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\delta_{\theta} \Omega = \int d^3 x \delta_{\theta} \omega(\mathbf{x}) = \int d^3 x \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \delta \underline{\omega}_{\alpha k}(\mathbf{x}).$$

Сравнивая последние выражения, найдем, что

$$\underline{j}_{\alpha k} = a_{\alpha\beta} j_{\beta k} = \frac{1}{Y_0} \frac{\delta \omega}{\delta \underline{\omega}_{\alpha k}} - \frac{Y_k}{Y_0} \frac{\delta \omega}{\delta \underline{Y}_{\alpha}}. \quad (33)$$

Подставляя (32), (33) в выражение (31), получим второй закон термодинамики для локально-равновесного случая

$$\begin{aligned} \delta \omega &= \underline{\zeta}_r \delta \underline{Y}_r + (Y_0 \underline{j}_{\alpha k} + Y_k \underline{s}_{\alpha}) \delta \underline{\omega}_{\alpha k} + (Y_0 j_{ak} + Y_k n_a) \delta p_{ak}, \\ \underline{\zeta}_r &= \text{Sp} \hat{f} \underline{\zeta}_r = \{\varepsilon, \pi_i, \underline{s}_{\alpha} = a_{\alpha\beta} s_{\beta}, n_a\}, \quad \underline{j}_{\alpha k} = a_{\alpha\beta} j_{\beta k}. \end{aligned} \quad (34)$$

Найдем теперь выражение для тензора натяжений. С этой целью рассмотрим модифицированный потенциал, связанный с группой произвольных деформаций $\eta_i(\mathbf{x})$

$$\Omega(f(Y, a, \varphi_a, \eta), Y) \equiv -\mathcal{S}(\hat{f}) + \int d^3 x Y_r(\mathbf{x}) \text{Sp} U_{\eta} \hat{f} U_{\eta}^+ \hat{\zeta}_r(\mathbf{x}). \quad (35)$$

Его вариация записывается в виде

$$\delta_\eta \Omega = -i \int d^3x d^3x' \delta\eta_i(\mathbf{x}') \text{Sp} \hat{f}[\hat{\pi}_i(\mathbf{x}'), Y_r(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_r(\mathbf{x})].$$

Используя коммутационные соотношения для аддитивных интегралов движения, получим

$$\delta_\eta \Omega = \int d^3x \delta\eta_i(\mathbf{x}) \left\{ -\nabla_k \left(Y_0 t_{ik} + \frac{\partial \omega Y_k}{\partial Y_i} \right) (\mathbf{x}) + \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} \nabla_i p_{ak}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \nabla_i \underline{\omega}_{\alpha k}(\mathbf{x}) \right\}.$$

С другой стороны, согласно явному виду сверхтекучих импульсов $p_{ak} \equiv p_{ak}(U_\eta \hat{f} U_\eta^+)$ и формы Картана $\underline{\omega}_{\alpha k} \equiv \underline{\omega}_{\alpha k}(U_\eta \hat{f} U_\eta^+)$, найдем их трансформационные свойства при бесконечно малых преобразованиях деформаций

$$\delta p_{ak} = -\nabla_k \delta\eta_i p_{ai} - \nabla_i p_{ak} \delta\eta_i, \quad \delta \underline{\omega}_{\alpha k} = -\nabla_k \delta\eta_i \underline{\omega}_{\alpha i} + \nabla_i \underline{\omega}_{\alpha k} \delta\eta_i.$$

Отсюда в силу (36) получим вариацию

$$\begin{aligned} \delta_\eta \Omega &= \int d^3x \delta_\eta \omega(\mathbf{x}) = \int d^3x \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} \delta_\eta p_{ak}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} \delta_\eta \underline{\omega}_{\alpha k}(\mathbf{x}) \right\} = \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} (p_{ai} \nabla_k \delta\eta_i + \nabla_i p_{ak} \delta\eta_i) + \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}} (\underline{\omega}_{\alpha i} \nabla_k \delta\eta_i + \nabla_i \underline{\omega}_{\alpha k} \delta\eta_i) \right\}. \end{aligned}$$

Сравнив два последних выражения, найдем тензор натяжений

$$t_{ik} = -\frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{p_{ai}}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} + \frac{\underline{\omega}_{\alpha i}}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}}. \quad (36)$$

Выражение для плотности потока энергии получим (следуя подходу работы [14]), используя соотношение

$$\underline{Y}_r (Y_0 \underline{\zeta}_{rk} + Y_k \underline{\zeta}_r) = 0 \quad (37)$$

и выражения для остальных потоков (32), (33), (36). Плотность потока энергии имеет вид

$$w_k = -\frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0} - \frac{p_{a0}}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} + \frac{\underline{\omega}_{\alpha 0}}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}}. \quad (38)$$

В итоге все локально-равновесные плотности потоков в рассматриваемом состоянии можно представить в компактном виде

$$\underline{\zeta}_{rk} = -\frac{\partial}{\partial \underline{Y}_r} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_{a0}}{\partial \underline{Y}_r} \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} + \frac{\partial \underline{\omega}_{\alpha 0}}{\partial \underline{Y}_r} \frac{\partial \omega}{\partial \underline{\omega}_{\alpha k}}. \quad (39)$$

Перейдем от переменных $a_{\alpha\beta}$, φ_a , $\underline{\omega}_{\alpha k}$ к новым переменным, также выражающимся в терминах ПП. Вместо матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$ и связанной с ней формы Картана $\omega_{\alpha k}$ введем единичный вектор d_α , имеющий смысл вектора магнитной анизотропии, вектор

магнитной спирали q_i и поперечную часть формы Картана $z_{\alpha k}$. Все эти новые переменные могут быть выражены через векторный ПП согласно формулам

$$\begin{aligned} d_\alpha(\mathbf{x}) &= [\mathbf{e}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})]_\alpha = \{1 - (\xi_2(\mathbf{x})\xi_1(\mathbf{x}))^2\}^{-\frac{1}{2}}[\xi_2(\mathbf{x})\xi_1(\mathbf{x})]_\alpha, \\ q_k(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\{1 - (\xi_2(\mathbf{x})\xi_1(\mathbf{x}))^2\}^{-\frac{1}{2}}(\xi_2(\mathbf{x})\nabla_k\xi_1(\mathbf{x}) - \xi_1(\mathbf{x})\nabla_k\xi_2(\mathbf{x})), \\ z_{\alpha k} &= [(\nabla_k\mathbf{d}(\mathbf{x})) \times \mathbf{d}(\mathbf{x})]_\alpha, \quad \xi_{1\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_{1\alpha}(\mathbf{x})}{\Delta_1(\mathbf{x})}, \quad \xi_{2\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\Delta_{2\alpha}(\mathbf{x})}{\Delta_2(\mathbf{x})}. \end{aligned} \quad (40)$$

В терминах этих величин второй закон термодинамики и выражения для плотностей потоков принимают вид

$$\delta\omega = \zeta_r \delta Y_r + (Y_0 j_{\alpha k} + Y_k \underline{z}_\alpha)(\underline{d}_\alpha \delta q_k + \delta \underline{z}_{\alpha k}) + (Y_0 j_{ak} + Y_k n_a) \delta p_{ak}, \quad (41)$$

$$\zeta_{rk} = -\frac{\partial}{\partial Y_r} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \frac{\partial p_{a0}}{\partial Y_r} \frac{\partial \omega}{\partial p_{ak}} + \frac{\partial q_0}{\partial Y_r} \frac{\partial \omega}{\partial q_k} + \frac{\partial \underline{z}_{\alpha 0}}{\partial Y_r} \frac{\partial \omega}{\partial \underline{z}_{\alpha k}}. \quad (42)$$

Здесь $q_0 = Y_0^{-1}(\underline{d}_\alpha Y_\alpha + Y_k q_k)$, $\underline{z}_{\alpha 0} = Y_0^{-1}(Y_\alpha - d_\beta d_\alpha Y_\beta + Y_k z_{\alpha k})$. Как ниже будет показано, в этих терминах удобно представить влияние эффектов увлечения на термодинамику и спектры собственных колебаний.

Плотность термодинамического потенциала ω для раствора двух ферми-жидкостей зависит от следующих инвариантов, квадратичных по термодинамическим параметрам: $Y_0, Y_k^2, Y_\beta^2, Y_\alpha, Y_k p_{ak}, Y_k q_k, Y_\beta d_\beta, p_a^2, p_\alpha^2, p_{1k} p_{2k}, p_{ak} q_k, q^2, z^2$.

Чтобы проследить взаимосвязь между полученными в этой работе выражениями и выражениями для потоков и потоками в “двухжидкостной” формулировке Ландау–Тиссы, введем физические величины

$$\begin{aligned} \rho_n &= -2Y_0 \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Y}^2}, \quad \rho_{sa} = 2 \frac{m_a^{*2}}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}_a^2}, \quad \rho_{s12} = \frac{m_1^* m_2^*}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}, \\ \nu &= \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Y} \mathbf{q}}, \quad \rho - \rho_n - \rho_{s2} - \rho_{s12} = m_1^* \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Y} \mathbf{p}_1}, \\ \rho - \rho_n - \rho_{s1} - \rho_{s12} &= m_2^* \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Y} \mathbf{p}_2}, \quad \kappa_1 = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}_1 \mathbf{q}}, \\ \tau_{||} &= \frac{2}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{q}^2}, \quad \tau_{\perp} = \frac{2}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{z}^2}, \quad s_{||} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{d} \mathbf{Y}}, \quad \chi = 2Y_0 \frac{\partial \omega}{\partial Y_\alpha^2}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{p}_2 \mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (43)$$

где потенциал ω зависит только от инвариантов линейных и квадратичных по векторным термодинамическим параметрам. В выражениях (43) ρ_n – нормальная плотность раствора, ρ_{s1}, ρ_{s2} – сверхтекучие плотности компонент, m_1^*, m_2^* – эффективные массы компонент, ρ_{s12} – “увлекаемая” сверхтекучая плотность. Величины $\tau_{||}, \tau_{\perp}$ представляют собой продольную и поперечную по отношению к вектору магнитной анизотропии константы жесткости. Величина $s_{||}$ – продольная составляющая спина и χ – магнитная

восприимчивость. Физические параметры κ_1 и κ_2 описывают, как будет показано ниже, эффект спин-орбитального увлечения. Используя введенные выше величины, все плотности потоков можно записать в виде

$$\begin{aligned} j_{1i} &= \frac{1}{m_1^*} [(\rho_n + \rho_{s2} - \rho + m_1^* n_1) v_{ni} + \rho_{s1} v_{s1i} + \rho_{s12} v_{s2i}] + \kappa_1 q_i, \\ j_{2i} &= \frac{1}{m_2^*} [(\rho_n + \rho_{s1} - \rho + m_2^* n_2) v_{ni} + \rho_{s12} v_{s1i} + \rho_{s2} v_{s2i}] + \kappa_2 q_i, \\ j_{\alpha i}^\perp &= s_\alpha^\perp v_{ni} + z_{\alpha i} \tau_\perp, \quad j_{\parallel i} = (s_\parallel + \nu) v_{ni} + q_i \tau_\parallel + m_1^* \kappa_1 v_{s1i} + m_2^* \kappa_2 v_{s2i}, \\ t_{ik} &= p \delta_{ik} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_{s1} v_{s1i} v_{s1k} + \rho_{s2} v_{s2i} v_{s2k} + \rho_{s12} (v_{s1i} v_{s2k} + v_{s2i} v_{s1k}) + \\ &+ \frac{m_1^*}{Y_0} \kappa_1 (v_{s1i} q_k + v_{s1k} q_i) + \frac{m_2^*}{Y_0} \kappa_2 (v_{s2i} q_k + v_{s2k} q_i) + \tau_\parallel q_i q_k + \tau_\perp z_{\alpha i} z_{\alpha k}. \end{aligned} \quad (44)$$

Плотность потока энергии в этом случае можно получить, используя формулы (44) и (37). Потоки (44) выписаны с точностью до квадратичных по термодинамическим параметрам слагаемых. Так как векторы v_{sak} , q_k в равновесии мы считаем малыми, то слагаемыми более высоких порядков можно пренебречь. В формулах (44) $j_{\parallel i} = d_\alpha j_{\alpha i}$ – продольная часть плотности потока спина, а $j_{\alpha i}^\perp = (\delta_{\alpha\beta} - d_\alpha d_\beta) j_{\beta i}$ – поперечная. Величина ρ_{s12} отвечает за эффект увлечения сверхтекучим движением одной компоненты раствора другой компонентой, ранее обнаруженный в работах [9], [10]. Как видно из (44), слагаемые в потоках числа частиц, пропорциональные v_{s1i} , v_{s2i} , приводят к эффекту увлечения каждой из компонент раствора. Кроме того, возникает новый физический механизм увлечения, связанный с влиянием магнитных степеней свободы на сверхтекучее движение. Слагаемые, пропорциональные вектору магнитной спирали $\mathbf{q}$ в плотностях потоков числа частиц, и слагаемые, пропорциональные v_{sai} в плотности продольного потока спина, описывают этот эффект увлечения. В выражении для тензора натяжений слагаемые, пропорциональные $v_{s1i} v_{s2i}$, $v_{sai} v_{sai}$, отвечают за эффект увлечения одной сверхтекучей компоненты другой, а слагаемые, пропорциональные $v_{sai} q_i$, – за взаимное влияние орбитальных и спиновых степеней свободы. При получении формул (44) не предполагалось наличие инвариантности Галилея рассматриваемой физической системы.

В случае галилеевой инвариантности структура термодинамического потенциала как функции от термодинамических параметров Y_r , p_k , q_k упрощается: $\omega(Y, \mathbf{p}_a, \mathbf{q}) = \omega(Y', \mathbf{p}'_a, \mathbf{q}')$. Здесь штрихованные параметры определяются равенствами

$$\begin{aligned} Y'_0 &= Y_0, \quad Y'_\alpha = Y_\alpha, \quad Y'_k = Y_k + u_i Y_0, \quad Y'_a = Y_a + m_a u_i Y_i + \frac{1}{2} m_a u^2 Y_0, \\ p'_{ak} &= p_{ak} - m_a u_k \quad (a = 1, 2), \quad q'_k = q_k, \end{aligned}$$

где m_a – массы частиц, u_i – параметр преобразования Галилея. В случае когда $u_i = -Y_i/Y_0 \equiv v_{ni}$, величина Y'_k обращается в ноль. Если учесть в термодинамическом потенциале зависимость от скалярных инвариантов с точностью до квадратичных слагаемых, то будут справедливы соотношения, связывающие введенные в (43) величины

$$m_1^* = m_1, \quad m_2^* = m_2, \quad \rho = \rho_n + \rho_{s1} + \rho_{s2} + 2\rho_{s12},$$

где m_1 , m_2 – массы частиц компонент раствора.

5. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ С ВЕКТОРНЫМ ПП

Рассмотрим вопрос о построении идеальной гидродинамики раствора двух сверхтекучих ферми-жидкостей, описываемых векторным ПП. В набор параметров сокращенного описания входят дополнительные термодинамические переменные, которые могут быть представлены в терминах ПП и произвольного неравновесного статистического оператора.

В векторном состоянии сверхтекучие фазы вводятся равенствами

$$\varphi_{1,2}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \text{Im} \{ \ln(\text{Sp } \hat{f}(t) \hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x}))^2 \pm \ln(\text{Sp } \hat{f}(t) \hat{\Delta}_\alpha^2(\mathbf{x})) \} \quad (45)$$

(индекс 1 соответствует верхнему знаку в формуле (45), а 2 – нижнему). Ортогональная матрица поворота $a(\mathbf{x}, t)$ может быть выражена через векторный ПП в неявном виде

$$\mathbf{e}_1 a(\mathbf{x}, \hat{f}(t)) \mathbf{\Delta}_1(\mathbf{x}, \hat{f}(t)) = \mathbf{e}_1 a(\mathbf{x}, \hat{f}(t)) \mathbf{\Delta}_2(\mathbf{x}, \hat{f}(t)) = \mathbf{e}_2 a(\mathbf{x}, \hat{f}(t)) \mathbf{\Delta}_2(\mathbf{x}, \hat{f}(t)) = 0. \quad (46)$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – единичные взаимно ортогональные векторы, не зависящие от статистического оператора, и $\mathbf{\Delta}_1 = \text{Re } \mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}_2 = \text{Im } \mathbf{\Delta}$.

Построим уравнения гидродинамики раствора двух сверхтекучих ферми-жидкостей. На гидродинамическом этапе эволюции этот раствор описывается сокращенным набором параметров: плотностями аддитивных интегралов движения ζ , сверхтекучими импульсами $\mathbf{p}_a$, ортогональной матрицей поворота a . Функциональная гипотеза в этом случае имеет вид

$$\hat{f}(t) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \hat{f}(\zeta(t), \varphi_a(t), a(t)),$$

где τ_0 – время релаксации.

Запишем уравнения для величин $\zeta(t), \varphi_a(t), a(t)$:

$$\dot{\zeta}_r(\mathbf{x}, \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a)) = i \text{Sp } \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a) [\hat{\varepsilon}(\hat{f}(\zeta, \varphi_a, a)), \hat{\zeta}_r(\mathbf{x}, \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a))], \quad (47)$$

$$\dot{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a)) = i \text{Sp } \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a) [\hat{\varepsilon}(\hat{f}(\zeta, \varphi_a, a)), \hat{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a))], \quad (48)$$

$$\dot{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a)) = i \text{Sp } \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a) [\hat{\varepsilon}(\hat{f}(\zeta, \varphi_a, a)), \hat{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f}(\zeta, \varphi_a, a))]. \quad (49)$$

Входящие сюда операторы $\hat{a}_{\alpha\beta}, \hat{\varphi}_a$ определяются выражениями

$$\delta a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}) = \text{Sp } \delta \hat{f} \hat{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}), \quad \delta \varphi_a(\mathbf{x}, \hat{f}) = \text{Sp } \delta \hat{f} \hat{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f}).$$

Рассмотрим уравнение для ортогональной матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$ (48). Пренебрегая в нем релаксационными процессами, имеем

$$\dot{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}_0) = i \text{Sp } \hat{f}_0 [\hat{\varepsilon}(\hat{f}_0), \hat{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f}_0)],$$

откуда, используя соотношения

$$i \text{Sp } \hat{f} [\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}'), \hat{a}_{\beta\gamma}(\mathbf{x}, \hat{f})] = \varepsilon_{\alpha\rho\gamma} a_{\beta\rho}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad i \text{Sp } \hat{f} [\hat{n}(\mathbf{x}'), \hat{a}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \hat{f})] = 0,$$

а также свойства симметрии (25), получим уравнение движения для ортогональной матрицы поворота $a_{\alpha\beta}$ в главном приближении

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda}\varepsilon_{\lambda\beta\gamma}(h_\gamma + \mathbf{q}\mathbf{v}_n n_\gamma), \quad h_\gamma \equiv -\frac{Y_\gamma}{Y_0}, \quad v_{nk} \equiv -\frac{Y_k}{Y_0}.$$

Здесь h_γ – внутреннее магнитное поле, v_{nk} – нормальная скорость.

Теперь выведем уравнение для сверхтекучих фаз φ_a . Пренебрегая в (49) релаксационными процессами, имеем

$$\dot{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f}_0) = i \text{Sp } \hat{f}_0 [\hat{\varepsilon}(\hat{f}_0), \hat{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f}_0)].$$

Отсюда с учетом условий симметрии (25) и свойств

$$\begin{aligned} i \text{Sp } \hat{f} [\hat{s}_\alpha(\mathbf{x}'), \hat{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f})] &= 0, & i \text{Sp } \hat{f} [\hat{n}(\mathbf{x}'), \hat{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f})] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ i \text{Sp } \hat{f} [\hat{\pi}_k(\mathbf{x}'), \hat{\varphi}_a(\mathbf{x}, \hat{f})] &= \nabla_k \varphi_a(\mathbf{x}, \hat{f}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

найдем уравнения движения для сверхтекучих фаз

$$\dot{\varphi}_a = \mu_a + \mathbf{P}_a \mathbf{v}_n, \quad \mu_a \equiv -\frac{Y_a}{Y_0},$$

где μ_a – химические потенциалы.

В заключение выведем уравнения для аддитивных интегралов движения. Пренебрегая в (47) релаксационными процессами, получим

$$\dot{\zeta}_r(\mathbf{x}, \hat{f}_0) = i \text{Sp } \hat{f}_0 [\hat{\varepsilon}(\hat{f}_0), \hat{\zeta}_r(\mathbf{x}, \hat{f}_0)] = -\nabla_i \text{Sp } \hat{f}_0 \hat{\zeta}_{ri}(\mathbf{x}, \hat{f}_0),$$

где вид плотностей потоков аддитивных интегралов движения ζ_{rk} в терминах локально-равновесного термодинамического потенциала определяется формулами (32), (33), (36), (38).

Таким образом, мы получили полную систему уравнений гидродинамики раствора ферми-жидкостей в состоянии, описываемом векторным ПП. После перехода к новым переменным (40) эта система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_r &= -\nabla_i \zeta_{ri} + \eta_r, & \dot{d}_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\beta} + \underline{z}_{\beta i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_i} \right) d_\gamma, \\ \dot{p}_{ai} &= -\nabla_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_a} + p_{aj} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j} \right), \\ \dot{q}_i &= -\nabla_i \left(d_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\alpha} + q_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j} \right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} d_\alpha \underline{z}_{\beta i} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma} + \underline{z}_{\gamma j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j} \right), \\ \dot{\underline{z}}_{\alpha i} &= -(\delta_{\alpha\beta} - d_\alpha d_\beta) \nabla_i \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\beta} + \underline{z}_{\beta j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j} \right) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \underline{z}_{\beta i} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{s}_\gamma} + \underline{z}_{\gamma j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \pi_j} \right), \\ \eta_r &= \delta_{r\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (\zeta_{\gamma k} (q_k d_\alpha + \underline{z}_{\beta k}) + \underline{\zeta}_\gamma (q_0 d_\alpha + \underline{z}_{\beta 0})), \end{aligned} \tag{50}$$

где η_r представляет собой источник в уравнении для спина. Заметим, что в отличие от плотности спина s_α плотность $\underline{s}_\alpha = a_{\alpha\beta} s_\beta$ не является плотностью аддитивного интеграла движения, и поэтому в уравнениях гидродинамики (50) возникает источник. Удобство записи уравнений (50) и основного соотношения термодинамики (35) заключается в том, что они сформулированы в терминах термодинамических переменных, не зависящих от координат и времени в состоянии равновесия. В этом случае возможно построение простой теории возмущений по малым пространственным неоднородностям для всех параметров сокращенного описания.

Уравнения идеальной гидродинамики (50), второе начало термодинамики (35) и плотности потоков аддитивных интегралов движения (42) описывают *неравновесную динамику* раствора сверхтекучих ферми-жидкостей с векторным ПП.

Уравнения гидродинамики и основные термодинамические соотношения для раствора сверхтекучих ферми-жидкостей в состоянии с векторным ПП отличаются от известных выражений для сверхтекучей ферми-жидкости с синглетным спариванием [1], [2], [13] наличием в них переменных, связанных со второй компонентой раствора и с нарушением симметрии относительно спиновых вращений (вектора магнитной спирали q_i , поперечной формы Картана $z_{\alpha i}$ и вектора магнитной анизотропии d_α). Если в полученных уравнениях гидродинамики и термодинамических соотношениях исключить плотность числа частиц второй компоненты и ее сверхтекучий импульс, а также заменить вектор магнитной спирали q_i , поперечную форму Картана $z_{\alpha i}$, вектор магнитной анизотропии d_α на форму Картана $\underline{\omega}_{\alpha i}$, то эти уравнения совпадут с аналогичными уравнениями для сверхтекучей ферми-жидкости в состоянии с триплетным ПП [5], [14]. Рассматриваемый в этой работе раствор описывается набором параметров, включающим в себя, кроме переменных раствора ферми-жидкостей с синглетным спариванием [9], [11], также переменные, связанные со спонтанным нарушением симметрии при спиновых вращении.

Рассмотрим вопрос о коллективных возбуждениях в описываемом растворе ферми-жидкостей. Линеаризуя систему уравнений (50) вблизи состояния равновесия, получим дисперсионное уравнение

$$\sum_{m=0}^{14} A_m(k) \omega^m = 0,$$

где коэффициенты $A_m(k)$ представляют собой комбинации из производных от ε по всем переменным.

Так как дисперсионное уравнение является достаточно сложным, то для выявления особенностей спектров рассмотрим модельный функционал энергии

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0(n_1, n_2, \sigma) + \frac{1}{2\rho} \pi^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 p_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 p_2^2 + \alpha_3 \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 + \\ + \frac{1}{2\chi} s^2 + \frac{1}{2} \tau \underline{\omega}^2 + \kappa \mathbf{p}_1 \underline{\omega}_\alpha \mathbf{p}_2 \underline{\omega}_\alpha, \end{aligned} \quad (51)$$

содержащий квадратичные слагаемые по параметрам сокращенного описания и только одно слагаемое четвертого порядка, отвечающее за взаимодействие между подсистемами.

Рассмотрим три частных случая.

1. $\mathbf{p}_1 = 0$, $\mathbf{p}_2 = 0$, $\underline{\omega} = 0$, $\mathbf{s} = 0$. В результате несложных вычислений получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2(\omega^6 - A_1 k^2 \omega^4 + A_2 k^4 \omega^2 - A_3 k^6)(\omega^2 - B k^2)^3 = 0, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 + b_2 + c_3, & A_2 &= a_1 b_2 + a_1 c_3 + b_2 c_3 + a_3 c_1 + a_2 b_1 + c_2 b_3, \\ A_3 &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2, \\ B &= \frac{\tau}{\chi}, & a_1 &= \frac{v \sigma^0}{\rho}, & a_2 &= \frac{u_1 \sigma^0}{\rho}, & a_3 &= \frac{u_2 \sigma^0}{\rho}, & b_1 &= \frac{v n_1^0}{\rho} + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_3 \xi_2, \\ b_2 &= \frac{u_1 n_1^0}{\rho} + \alpha_1 \zeta_1 + \alpha_3 \lambda, & b_3 &= \frac{u_2 n_1^0}{\rho} + \alpha_1 \lambda + \alpha_3 \zeta_2, & u_1 &= \frac{\partial p}{\partial n_1}, \\ c_1 &= \frac{v n_2^0}{\rho} + \alpha_3 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2, & c_2 &= \frac{u_1 n_2^0}{\rho} + \alpha_3 \zeta_1 + \alpha_2 \lambda, & u_2 &= \frac{\partial p}{\partial n_2}, \\ c_3 &= \frac{u_2 n_2^0}{\rho} + \alpha_3 \lambda + \alpha_2 \zeta_2, & v &= \frac{\partial p}{\partial \sigma}, & \xi_1 &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n_1 \partial \sigma}, & \xi_2 &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n_2 \partial \sigma}, \\ \zeta_1 &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n_1^2}, & \zeta_2 &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n_2^2}, & \lambda &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial n_1 \partial n_2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Из уравнения (52) найдем нетривиальные решения

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= w_1^2 k^2, & \omega_2^2 &= w_2^2 k^2, & \omega_3^2 &= w_3^2 k^2, \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 &= A_1, & w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2 &= A_2, \\ w_1^2 w_2^2 w_3^2 &= A_3, & w_{4,5,6}^2 &= B k^2. \end{aligned} \quad (54)$$

Они представляют собой три ветви звуковых колебаний и вырожденные спиновые моды. В приближении $w_1^2 \gg w_2^2 \gg w_3^2$, используемом в работах [9] для получения спектров звуковых колебаний, скорости звуковых мод примут вид

$$w_1^2 = A_1, \quad w_2^2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad w_3^2 = \frac{A_3}{A_2}.$$

Колебания $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ соответствуют первому, второму и третьему звукам. В случае малых сверхтекучих скоростей и концентрации раствора формулы (54) дадут результаты работ [9] по гидродинамике растворов сверхтекучих жидкостей с синглетным спариванием.

2. $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$, $\underline{\omega}_{\alpha i} = n_{\alpha} q_i \neq 0$, $\mathbf{s} = 0$, вектор $\mathbf{q}$ параллелен $\mathbf{k}$ и мал. В этом случае звуковые моды можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= w_1^2 k^2, & \omega_2^2 &= w_2^2 k^2, & \omega_3^2 &= w_3^2 k^2, \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 &= A'_1, & w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2 &= A'_2, \\ w_1^2 w_2^2 w_3^2 &= A_3, & A'_1 &= A_1 + \kappa(\zeta_1 + \lambda) q^2, \\ A'_2 &= A_2 + A_1 \kappa(\zeta_1 + \lambda) q^2 - (A_3 \xi_1 - A_2 \xi_1) q^2. \end{aligned} \quad (55)$$

В приближении $w_1^2 \gg w_2^2 \gg w_3^2$ скорости звуковых мод:

$$w_1^2 = A'_1, \quad w_2^2 = \frac{A'_2}{A'_1}, \quad w_3^2 = \frac{A_3}{A'_2};$$

спиновые колебания:

$$\omega_1^2 = Bk^2, \quad \omega_{2,3}^2 = B_{\pm}k^2 \pm B_2, \quad B_{\pm} = B \pm B_2, \quad B_2 = \frac{\tau}{\chi}q. \quad (56)$$

Как видно из формул (55), (56), в рассмотренной модели отличие от нуля вектора магнитной спирали $\mathbf{q}$ приводит к перенормировке скоростей звуков и снятию вырождения спиновых мод.

3. $\mathbf{p}_1 \neq 0$, $\mathbf{p}_2 \neq 0$, $\underline{\omega} = 0$, $\mathbf{s} = 0$, векторы $\mathbf{p}_{1,2}$ параллельны $\mathbf{k}$ и малы. Звуковые моды имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_j &= w_j k, \quad j, k, l, m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad \sum_j w_j = 0, \quad \sum_{j \neq k} w_j w_k = -A''_1, \\ \sum_{j \neq k \neq l} w_j w_k w_l &= A''_2, \quad \sum_{j \neq k \neq l \neq m} w_j w_k w_l w_m = -A''_3, \\ \sum_{j \neq k \neq l \neq m \neq n} w_j w_k w_l w_m w_n &= A''_4, \quad w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 = -A''_5, \\ A'_1 &= A_1 + F'_3 H'_1 + F'_2 G'_1, \quad A''_1 = F'_3 H_1 + F'_2 G_1 + F_3 H'_1 + F_2 G'_1, \\ A''_3 &= A_2 - G_3 F'_2 H'_1 + G_2 F'_3 H'_1 - H_2 F'_3 G'_1 + H_3 F'_2 G'_1, \\ A''_4 &= G_3 F_2 H'_1 + G_3 F'_2 H_1 - G_2 F_3 H'_1 - G_2 F'_3 H_1 + H_2 F_3 G'_1 + \\ &\quad + H_2 F'_3 G_1 - H_3 F_2 G'_1 - H_3 F'_2 G_1, \quad A''_5 = A_3, \\ F'_2 &= \alpha_1 p_1 + \alpha_3 p_2, \quad F'_3 = \alpha_3 p_1 + \alpha_2 p_2, \quad G'_1 = \frac{p_1}{\rho}, \quad H'_1 = \frac{p_2}{\rho}, \\ F_2 &= \alpha_1 u_1 + \alpha_3 u_2, \quad F_3 = \alpha_3 u_1 + \alpha_2 u_2, \\ G_1 &= \frac{\sigma^0}{\rho} \xi_1 + \frac{n_1^0}{\rho} \zeta_1 + \frac{n_2^0}{\rho} \lambda, \quad G_2 = \alpha_1 \zeta_1 + \alpha_3 \lambda, \quad G_3 = \alpha_3 \zeta_1 + \alpha_2 \lambda, \\ H_1 &= \frac{\sigma^0}{\rho} \xi_2 + \frac{n_1^0}{\rho} \lambda + \frac{n_2^0}{\rho} \zeta_2, \quad H_2 = \alpha_1 \lambda + \alpha_3 \zeta_2, \quad H_3 = \alpha_3 \lambda + \alpha_2 \zeta_2. \end{aligned} \quad (57)$$

Спиновые моды: $\omega^2 = (B + B_1)k^2$, $B_1 = (2\kappa/\chi)p_1 p_2$. В этом случае звуковые моды будут модифицированы по сравнению со случаем 1, а скорости спиновых волн будут перенормированы в силу указанного выше эффекта увлечения ($p_{ak} \neq 0$).

На основании вышеизложенного можно заключить, что рассмотренная в этой работе система частично обладает как чертами раствора сверхтекучих жидкостей с синглетным спариванием, так и магнитной составляющей сверхтекучей ферми-жидкости с триплетным спариванием.

Список литературы

- [1] *И. М. Халатников*. Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971.
- [2] *Н. Н. Боголюбов*. Препр. ОИЯИ Р-1395. Дубна, 1962.
- [3] *G. E. Volovik*. Exotic Properties of Superfluid ^3He . Singapore: World Scientific, 1992.
- [4] *D. Vollhardt, P. Wölfle*. The Superfluid Phases of Helium 3. London: Ed. Taylor & Francis, 1990.
- [5] *A. J. Leggett*. Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. P. 331.
- [6] *R. Combescot*. J. Phys. C. 1981. V. 14. P. 1619.
- [7] *K. Maki, P. Kumar*. Phys. Rev. B. 1977. V. 16. P. 182.
- [8] Сверхтекучесть гелия-3. Сб. статей. Ред. И. М. Халатников. М.: Мир, 1977.
- [9] *А. Ф. Андреев, Е. П. Башкин*. ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 319.
- [10] *М. Ю. Ковалевский, Н. М. Лавриненко*. ФНТ. 1982. Т. 8. С. 341.
- [11] *Н. Н. Боголюбов, М. Ю. Ковалевский, А. М. Курбатов, С. В. Пелетминский, А. Н. Тарасов*. УФН. 1989. Т. 159. С. 585.
- [12] *Л. Д. Ландау*. Сб. трудов. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 128; 252.
- [13] *В. В. Красильников, С. В. Пелетминский, А. А. Рожков, А. А. Яценко*. ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 1440.
- [14] *М. Ю. Ковалевский, А. А. Рожков*. ТМФ. 1997. Т. 113. С. 313.
- [15] *В. В. Красильников, А. А. Рожков, А. А. Яценко*. ФНТ. 1990. Т. 16. С. 1368.
- [16] *М. Yu. Kovalevskii, A. A. Rozhkov*. Physica A. 1995. V. 216. P. 169.
- [17] *Ю. М. Полуэктов, В. В. Красильников*. ФНТ. 1989. Т. 15. С. 1251.
- [18] *А. И. Агизер, С. В. Пелетминский, А. А. Яценко*. ФНТ. 1994. Т. 20. С. 650.
- [19] *M. Baldo, U. Lombardo, P. Schuck*. Phys. Rev. C. 1995. V. 52. P. 975.
- [20] *L. Amundsen, E. Ostgaard*. Nucl. Phys. A. 1985. V. 442. P. 163.
- [21] *Th. Alm, G. Røepke, A. Sedrakian*. Nucl. Phys. A. 1995. V. 594. P. 355.
- [22] *В. П. Минеев*. УФН. 1983. Т. 139. С. 303.
- [23] *Э. Картан*. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: ИЛ, 1949.
- [24] *Н. Н. Боголюбов*. Квазисредние в задачах статистической механики. Преп. ОИЯИ Д-781. Дубна, 1961.

Поступила в редакцию 4.XII.2000 г.