Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Брио, Е. Рагуси, Янгианы и $\mathcal{W}$ -алгебры, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 356–366

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 18:30:20

ЯНГИАНЫ И $\mathcal{W}$ -АЛГЕБРЫ

Обсуждается связь между $\mathcal{W}$ -алгебрами и янгианами для случая $gl(N)$ -алгебр и для твистованных янгианов и суперъянгианов. Эта связь, позволяющая построить R -матрицу для $\mathcal{W}$ -алгебр и классифицировать их конечномерные неприводимые представления, проиллюстрирована на примере нелинейного уравнения Шредингера в размерности $1+1$.

1. ВВЕДЕНИЕ

$\mathcal{W}$ -алгебры были введены при изучении $2d$ -конформных теорий. Эти алгебры и их конечномерные аналоги оказались полезными при исследовании некоторых физических моделей. Тем не менее нет полного понимания их алгебраической структуры и геометрической интерпретации. Исследование связи некоторых из этих $\mathcal{W}$ -алгебр с янгианами, по-видимому, может прояснить, по крайней мере, их алгебраическую структуру, так как эта связь позволяет построить R -матрицу для $\mathcal{W}$ -алгебр, классифицировать их неприводимые конечномерные представления и найти их центр.

Статья построена следующим образом. Мы напоминаем основные определения, относящиеся к янгианам и $\mathcal{W}$ -алгебрам, соответственно в разделах 2 и 3. Затем в разделе 4 представлена связь между этими двумя объектами в случае $gl(N)$ -алгебры. В разделе 5 рассматривается физический пример, в котором явно проявляется эта связь, а именно нелинейное уравнение Шредингера в размерности $1+1$. Мы также приводим различные обобщения: в разделе 6 изучаем случай алгебр $so(M)$ и $sp(2M)$ и в разделе 7 – случай супералгебр. Результаты кратко суммированы в разделе 8.

Таким образом, мы подробно рассматриваем $Y(N) \equiv Y(gl(N))$ и $\mathcal{W}_p(N) \equiv \mathcal{W}[gl(Np), N.sl(p)]$ как характерные случаи, но уделяем меньше внимания обобщениям, отсылая заинтересованного читателя к оригинальным работам.

2. ЯНГИАН $Y(\mathcal{G})$

Дринфельд [1] определил янгианы $Y(\mathcal{G})$, связанные с каждой простой алгеброй Ли $\mathcal{G}$, как деформацию (половины) алгебры петель, построенной по $\mathcal{G}$. Янгиан имеет генера-

*Laboratoire de Physique Théorique, associée à l'Université de Savoie, Annecy-le-Vieux Cedex, France. E-mail: briot@lapp.in2p3.fr; ragoucy@lapp.in2p3.fr

торы

$$Y(\mathcal{G}) = \mathcal{U}(Q_n^a, a = 1, \dots, \dim \mathcal{G}; n = 0, 1, \dots, \infty),$$

где n – петлевой индекс, а индекс a нумерует присоединенное представление $\mathcal{G}$. Другими словами, имеется бесконечный набор присоединенных представлений (занумерованных индексом n), первым из которых является сама алгебра $\mathcal{G}$:

$$[Q_0^a, Q_n^b] = f^{ab}{}_c Q_n^c.$$

Деформация появляется в остальных соотношениях,

$$[Q_m^a, Q_n^b] = f^{ab}{}_c Q_{m+n}^c + P_{nm}^{ab}(Q),$$

где P_{nm}^{ab} – многочлен от Q . Янгианы являются алгебрами Хопфа, их копроизведение задается формулами

$$\begin{aligned} \Delta(Q_0^a) &= Q_0^a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes Q_0^a, \\ \Delta(Q_1^a) &= Q_1^a \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes Q_1^a + \frac{1}{2} f^{ab}{}_{bc} Q_0^b \otimes Q_0^c, \end{aligned}$$

где также видна деформация копроизведения в алгебре петель.

Имеется соотношение самосогласованности, которое принимает вид тождества, подобного тождеству Якоби. Это тождество имеет вид

$$f^{bc}{}_d [Q_1^a, Q_1^d] + f^{ca}{}_d [Q_1^b, Q_1^d] + f^{ab}{}_d [Q_1^c, Q_1^d] = f^a{}_{pd} f^b{}_{qx} f^c{}_{ry} f^{xyd} s_3(Q_0^p, Q_0^q, Q_0^r), \quad (1)$$

если $\mathcal{G} \neq sl(2)$, или

$$\begin{aligned} f^{cd}{}_e [[Q_1^a, Q_1^b], Q_1^e] + f^{ab}{}_e [[Q_1^c, Q_1^d], Q_1^e] = \\ = (f^a{}_{pe} f^b{}_{qx} f^{cd}{}_y f^y{}_{rz} f^{xz}{}_g + f^c{}_{pe} f^d{}_{qx} f^{ab}{}_y f^y{}_{rz} f^{xz}{}_g) \eta^{eg} s_3(Q_0^p, Q_0^q, Q_1^r), \quad (2) \end{aligned}$$

если $\mathcal{G} = sl(2)$; s_3 – симметризованное произведение.

Для случая $\mathcal{G} = gl(N)$ янгианы допускают R -матричное представление [2], [3]: собирая генераторы в $(N \times N)$ -матрицу и используя спектральный параметр u , определим

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} T_n^{ij} E_{ij} = \sum_{i,j=1}^N T^{ij}(u) E_{ij}, \quad T_0^{ij} = \delta^{ij}.$$

Определяющие соотношения для $Y(gl(N)) = Y(N)$ принимают в этом случае вид

$$\begin{aligned} R_{12}(u-v) T_1(u) T_2(v) &= T_2(v) T_1(u) R_{12}(u-v), \\ \Delta T(u) &= T(u) \otimes T(u), \quad S(T(u)) = T(u)^{-1}, \quad \varepsilon(T(u)) = 1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{12}(x) &= \mathbb{I}_N \otimes \mathbb{I}_N - \frac{1}{x} P_{12}, \quad P_{12} = \sum_{i,j=1}^N E_{ij} \otimes E_{ji}, \\ T_1(u) &= T(u) \otimes \mathbb{I}_N = \sum_{i,j=1}^N T^{ij}(u) E_{ij} \otimes \mathbb{I}_N, \\ T_2(u) &= \mathbb{I}_N \otimes T(u) = \sum_{i,j=1}^N T^{ij}(u) \mathbb{I}_N \otimes E_{ij}, \end{aligned} \quad (3)$$

R_{12} — рациональное решение уравнения Янга–Бакстера, а P_{12} — оператор перестановки двух вспомогательных пространств (пространств $(N \times N)$ -матриц).

В дальнейшем нас главным образом будет интересовать классический аналог янгианов, в котором коммутаторы заменяются скобками Пуассона. Для первого представления соотношения те же, но с заменой коммутатора на скобку Пуассона. Например, соотношение (1) принимает вид

$$f^{bc}{}_d \{Q_1^a, Q_1^d\} + f^{ca}{}_d \{Q_1^b, Q_1^d\} + f^{ab}{}_d \{Q_1^c, Q_1^d\} = f^a{}_{pd} f^b{}_{qx} f^c{}_{ry} f^{xyd} Q_0^p Q_0^q Q_0^r.$$

Для $Y(N)$ скобка Пуассона возникает как классический аналог коммутатора:

$$\begin{aligned} R(x) &= \mathbb{I} - \hbar r(x), \quad [\cdot, \cdot] = \hbar \{\cdot, \cdot\}, \quad T(u) = L(u), \\ \{L_1(u), L_2(v)\} &= [r_{12}(u-v), L_1(u)L_2(v)], \quad r_{12}(x) = \frac{1}{x} P_{12}. \end{aligned}$$

3. $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ -АЛГЕБРЫ

Замолодчиков [4] впервые ввел $\mathcal{W}$ -алгебры в контексте $2d$ -конформных теорий в качестве средства для классификации неприводимых унитарных представлений этих теорий. Позже выяснилось, что они являются симметриями теорий поля Тоды [5], [6]. В этом контексте $\mathcal{W}$ -алгебры строятся как результат гамильтоновой редукции аффинных алгебр (алгебр Каца–Мууди). Де Бур с соавторами [7] ввели более простые аналоги этих алгебр, названные конечными $\mathcal{W}$ -алгебрами. Они строятся как гамильтоновы редукции конечномерных алгебр Ли: при этом получаются алгебры многочленов с конечным числом генераторов.

Более точно, исходя из алгебры Пуассона–Ли $\mathcal{G}$ мы накладываем связи на генераторы $\mathcal{G}$. Это связи второго рода, и мы рассматриваем соответствующую скобку Дирака: $\mathcal{W}$ -алгебра определяется как снабженное скобкой Дирака множество тех генераторов, на которые не наложены связи. Система связей дается подалгеброй $\mathcal{H}$ в $\mathcal{G}$, с этим связано обозначение $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ (подробнее см. [5], [6], [8]).

В данной работе мы исследуем класс конечных $\mathcal{W}$ -алгебр — $\mathcal{W}[gl(Np), N.sl(p)]$ -алгебр. Для простоты эти алгебры обозначаются $\mathcal{W}_p(N)$. Имеется конечное число генераторов $\mathcal{W}_p(N)$:

$$\mathcal{W}_p(N) = \mathcal{U}(W_m^a, a = 1, 2, \dots, N^2; n = 1, 2, \dots, p).$$

Для них выполнено

$$\{W_0^a, W_n^b\} = f^{ab}_c W_n^c \quad \text{и} \quad \{W_m^a, W_n^b\} = f^{ab}_c W_{m+n}^c + P_{nm}^{ab}(W),$$

где $P_{nm}^{ab}(W)$ — многочлены от W -генераторов. Весьма знаменательное сходство этих соотношений с представлением янгиана мотивирует исследования в этом направлении.

4. ЯНГИАНЫ $Y(N)$ И $\mathcal{W}_p(N)$ -АЛГЕБРЫ

Исходя из вышеизложенного представляется естественным искать соотношение между $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебрами и янгианами $Y(N)$. Такое соотношение действительно существует и было установлено в работе [9].

ТЕОРЕМА 1. *Имеется гомоморфизм алгебр между $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебрами и янгианами $Y(N)$. Более точно, имеется взаимно однозначное соответствие между первыми pN^2 генераторами $Y(N)$ и генераторами $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебры:*

$$Q_n^a \rightarrow \beta_n^a W_n^a + R_n^a(W),$$

где $\beta_n^a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $R_n^a(W)$ — многочлены от W_m^b при $m < n$. Остальные генераторы $Y(N)$ являются многочленами от генераторов $\mathcal{W}$ -алгебры.

Было доказано, что генераторы $\mathcal{W}$ -алгебры удовлетворяют соотношениям, подобным тождеству Якоби, которые определяют янгиан. R -матричный подход оказывается более простым способом работы с этими соотношениями [10].

ТЕОРЕМА 2. *$\mathcal{W}_p(N)$ -алгебра изоморфна усеченному янгиану $Y_p(N)$, определяемому как*

$$Y_p(N) = Y(N)/\mathcal{J}_p,$$

где $\mathcal{J}_p$ — идеал, порожденный $\mathcal{T}_p = \{T_n^{ij}, i, j = 1, \dots, N; n > p\}$.

В силу этой теоремы получаем R -матричную формулировку $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебр:

$$\{W_1(u), W_2(v)\} = [r_{12}(u-v), W_1(u)W_2(v)],$$

где

$$W(u) = \sum_{i,j=1}^N \sum_{n=0}^p W_n^{ij} u^{-n} E_{ij}, \quad r_{12}(x) = \frac{1}{x} P_{12}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Структура Хопфа на $Y(N)$ не переносится на фактор алгебры; в этом смысле изоморфизм алгебр в теореме 2 означает невозможность существования естественной структуры Хопфа для $\mathcal{W}$ -алгебр.

Можно также определить центр $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебры.

ТЕОРЕМА 3. *Центр $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебры имеет размерность Np и канонически связан с центром соответствующей $gl(Np)$ -алгебры.*

Более того, поскольку неприводимые конечномерные представления янгиана были классифицированы, можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Все конечномерные неприводимые представления $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебры являются представлениями со старшим весом. Они взаимно однозначно соответствуют семействам $\{P_1(u), \dots, P_{N-1}(u), \rho(u)\}$, где $P_i(u)$ – многочлены вида

$$P_i(u) = \prod_{k=1}^{d_i} (u - \gamma_i^k),$$

где $\sum_i d_i \leq p$, $\gamma_i^k \in \mathbb{C}$,

$$\rho(u) = 1 + \sum_{n=1}^{Np} c_n u^{-n}$$

– производящая функция для значений c_n операторов Казимира в представлении.

Во всех этих представлениях старшего веса из многочленов P_i можно восстановить старший вес с помощью соотношений

$$\frac{\mu^i(u)}{\mu^{i+1}(u)} = \frac{P_i(u+1)}{P_i(u)}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где вектор старшего веса ξ определен как

$$\begin{aligned} W^{ii}(u)\xi &= \mu^i(u)\xi, & 1 \leq i \leq N, \\ W^{ij}(u)\xi &= 0, & 1 \leq i < j \leq N. \end{aligned}$$

Отметим еще, что подробный анализ разложения $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ -алгебр по отношению к их подалгебрам Ли (с использованием методов, развитых в работе [8]) показывает, что не может существовать подобной связи с янгианами $Y(\mathcal{G})$ при $\mathcal{G} = so(N)$ или $\mathcal{G} = sp(2N)$. Действительно, когда $\mathcal{G}$ не является $gl(N)$ -алгеброй, не существует $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ -алгебры, все генераторы которой лежат в присоединенном представлении подалгебры Ли $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Ниже мы увидим, что такая связь возникает для объектов, отличных от янгианов $Y(\mathcal{G})$.

5. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА В РАЗМЕРНОСТИ $1 + 1$

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) в размерности $1 + 1$ является удобным формализмом, позволяющим наглядно представить связь между $Y(N)$ и $\mathcal{W}_p(N)$. Рассмотрим уравнение

$$i\partial_t \Phi = \partial_x^2 \Phi + g|\Phi|^2 \Phi,$$

где $\Phi^t = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ и $g < 0$. (Квантовые) решения этого уравнения известны давно [11]. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{n=0}^{\infty} g^n \Phi_{(n)}, & \Omega_n &= q_0 x - q_0^2 t + \sum_{i=1}^n ((q_i - p_i)x - (q_i^2 - p_i^2)t), \\ \Phi_{(n)} &= \int d^{n+1}q \, d^n p \, a_1^\dagger(p_1) \dots a_n^\dagger(p_n) a_n(q_n) \dots a_0(q_0) \frac{e^{i\Omega_n}}{\prod_{i=1}^n (p_i - q_{i-1})(p_i - q_i)}, \end{aligned}$$

где a и $a^\dagger$ удовлетворяют алгебре Замолотчиковых–Фаддеева (ЗЗФ) [12]:

$$\begin{aligned} a_1(k_1)a_2(k_2) &= R_{12}(k_2 - k_1)a_2(k_2)a_1(k_1), \\ a_1^\dagger(k_1)a_2^\dagger(k_2) &= a_2^\dagger(k_2)a_1^\dagger(k_1)R_{12}(k_2 - k_1), \\ a_1(k_1)a_2^\dagger(k_2) &= a_2^\dagger(k_2)R_{12}(k_1 - k_2)a_1(k_1) + \delta_{12}(k_1 - k_2), \end{aligned}$$

R -матрица соответствует янгиану $Y(N)$. Мы используем обозначения

$$\begin{aligned} R_{12}(x) &= R_{ik}^{jl}(x)E_{ij} \otimes E_{kl}, \\ a_1(k) &= a_i(k)v_i \otimes \mathbb{I}, \quad a_2(k) = a_i(k)\mathbb{I} \otimes v_i, \\ a_1^\dagger(k) &= a_i(k)v_i^\dagger \otimes \mathbb{I}, \quad a_2^\dagger(k) = a_i(k)\mathbb{I} \otimes v_i^\dagger, \\ E_{ij}v_k &= \delta_{jk}v_i, \quad v_k^\dagger E_{ij} = \delta_{ik}v_j^\dagger, \quad v_i \cdot v_j^\dagger = \delta_{ij}, \quad v_i^\dagger \cdot v_j = E_{ij}. \end{aligned}$$

Появление соответствующей янгиану R -матрицы не кажется неожиданным в этом контексте, поскольку янгиан является симметрией НУШ. Действительно, для генераторов этой алгебры имеется выражение в терминах алгебры ЗЗФ [13]. Оно имеет вид

$$Q_s^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} Q_{s,(n)}^a, \quad s = 0, 1, \quad (4)$$

где

$$Q_{s,(n)}^a = \int d^n k a_1^\dagger(k_1) \dots a_n^\dagger(k_n) J_{s,(n)}^a a_n(k_n) \dots a_1(k_1),$$

$J_{s,(n)}^a$ принадлежит $M(N, \mathbb{C})^{\otimes n}(k_1, \dots, k_n)$ и $M(N, \mathbb{C})$ является пространством $(N \times N)$ -матриц (точные выражения см. в [13]). Янгиан является симметрией всей иерархии, связанной с НУШ, как можно видеть из выражения гамильтоновых функций H_m в терминах алгебры ЗЗФ:

$$H_m = \int dk k^m a^\dagger(k) a(k) \Rightarrow [H_m, Q_s^a] = 0.$$

В действительности генераторы $a^\dagger(k)$ соответствуют асимптотическим состояниям иерархии НУШ, так что можно рассматривать пространство Фока $\mathcal{F}$, порожденное операторами $a^\dagger$. Это пространство Фока естественным образом разлагается по собственным пространствам оператора числа частиц H_0 : $\mathcal{F} = \bigoplus_p \mathcal{F}_p$. На каждом подпространстве $\mathcal{F}_p$ суммы (4) оказываются обрезанными на уровне $n = p$; $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебра определяется таким же образом исходя из $Y(N)$. Следовательно, на каждом подпространстве $\mathcal{F}_p$ действие $Y(N)$ редуцируется к $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебре.

6. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЙ СЛУЧАИ

6.1. Сворачивание $\mathcal{W}_p(N)$. Давно известен тот факт, что алгебры $so(M)$ и $sp(2M)$ можно получить из алгебры $gl(N)$, используя их внешний автоморфизм. Если τ – такой автоморфизм, то алгебры $so(M)$ и $sp(2M)$ можно получить как $\text{Ker}(\mathbb{I} - \tau)$, т.е. как алгебры τ -инвариантных генераторов $gl(N)$.

Этот метод используется и для $\mathcal{W}$ -алгебр. Действительно, уже было показано, что $\mathcal{W}$ -алгебру, основанную на $so(M)$ и $sp(2M)$, можно построить из $\mathcal{W}$ -алгебр, основанных на $gl(N)$ [14]. Гамильтонова редукция (т.е. связи) должна быть согласована со сворачиванием (т.е. с автоморфизмом), и поэтому не все $\mathcal{W}[gl(N), \mathcal{H}]$ -алгебры можно свернуть. Достаточно, однако, получить все $\mathcal{W}$ -алгебры, основанные на $so(M)$ и $sp(2M)$.

Мы здесь рассмотрим только сворачивание $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебры (которое действительно возможно). Рассматриваемый нами автоморфизм имеет вид [15]

$$\tau_{\pm}(W_n^{ij}) = (-1)^{n+1} \theta^i \theta^j W_n^{N+1-j, N+1-i}, \quad (5)$$

где

$$\theta^i = \begin{cases} 1 & \text{для } \tau_+, \\ \text{sgn}\left(\frac{N+1}{2} - i\right) & \text{для } \tau_-, \quad N = 2n. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Свернутая $\mathcal{W}_p(N)^{\pm}$ -алгебра* определяется фактором алгебры $\mathcal{W}_p(N)/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ – идеал, порожденный $W_n^{ij} - \tau_{\pm}(W_n^{ij})$.

Заметим, что $\mathcal{I}$ является идеалом относительно закона умножения, и можно показать, что фактор алгебры можно снабдить скобкой из $\mathcal{W}_p(N)$ -алгебры (подробнее см. [15]).

Теперь можно доказать следующую теорему [14], [15].

ТЕОРЕМА 5. *Алгебры $\mathcal{W}_p(2n)^+$, $\mathcal{W}_p(2n+1)^+$ при $p = 2k+1$ и $\mathcal{W}_p(2n)^-$ суть соответственно $\mathcal{W}[so(2np), n.sl(p)]$, $\mathcal{W}[so((2n+1)p), n.sl(p) \oplus so(k)]$ и $\mathcal{W}[sp(2np), n.sl(p)]$.*

6.2. Твистованные янгианы. Аналогично тому, как алгебры $\mathcal{U}[gl(Np)]$ и $\mathcal{W}_p(N)$ сворачиваются в $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ и $\mathcal{W}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ для $\mathcal{G} = so(M)$ и $sp(2M)$, можно естественным образом рассмотреть случай $Y(N)$. Однако, хотя основанные на $so(M)$ и $sp(2M)$ янгианы существуют, из такой процедуры получаются не эти алгебры Хопфа, а алгебры другого типа, называемые *твистованными янгианами* [16]. Точнее говоря, автоморфизм (5) имеет в этом случае вид

$$\tau(T(u)) = T^t(-u),$$

где

$$T^t(u) = \sum_{i,j} T^{ij}(u) E_{ij}^t, \quad E_{ij}^t = \theta^i \theta^j E_{N+1-j, N+1-i}.$$

Можно показать, что τ есть автоморфизм $Y(N)$. Используя его, определим

$$S(u) = T(u)\tau(T(u)).$$

При этом возникают, по существу, два класса автоморфизмов, занумерованные параметром $\theta_0 = \pm 1$:

$$\begin{aligned} \text{для } Y^+(N) : \quad & \theta^i = 1 \quad \forall i, \quad \theta_0 = 1, \\ \text{для } Y^-(2n) : \quad & \theta^i = \operatorname{sgn}\left(\frac{N+1}{2} - i\right) \quad \forall i, \quad \theta_0 = -1. \end{aligned}$$

Тем самым определяется подалгебра $Y^\pm(N)$ в $Y(N)$, коммутационные соотношения которой извлекаются из формулы

$$R_{12}(u-v)S_1(u)R'_{12}(u+v)S_2(v) = S_2(v)R'_{12}(u+v)S_1(u)R_{12}(u-v),$$

где $R(x)$ задается формулой (3) и

$$\begin{aligned} R'(x) &= (\tau \otimes \mathbb{I})(R(x)) = (\mathbb{I} \otimes \tau)(R(x)) = \mathbb{I} - \frac{1}{x}Q_{12}, \\ Q_{12} &= \sum_{i,j=1}^N \theta^i \theta^j E_{ij} \otimes E_{N+1-i, N+1-j}. \end{aligned}$$

Конечномерные неприводимые представления и центр $Y^\pm(N)$ найдены в работе [17].

На классическом уровне $S(u)$ порождает подалгебру Пуассона $Y(N)$ со скобками Пуассона, определенными как

$$\{S_1(u), S_2(v)\} = [r_{12}(u-v), S_1(u)S_2(v)] + S_2(v)r'_{12}(u+v)S_1(u) - S_1(u)r'_{12}(u+v)S_2(v),$$

где $r'_{12}(x) = (\mathbb{I} \otimes \tau)r_{12}(x) = (\tau \otimes \mathbb{I})r_{12}(x)$. Генераторы этих подалгебр уровня 1 образуют алгебру Ли $so(M)$ или $sp(2M)$, но полная подалгебра не является янгианом, основанным на $so(M)$ или $sp(2M)$ (подробнее см. [18]), однако эти алгебры используются при сравнении с $\mathcal{W}$ -алгебрами.

ТЕОРЕМА 6. *Усеченные классические янгианы $Y_p^\pm(N)$ являются $\mathcal{W}$ -алгебрами. Точнее,*

$$\begin{aligned} Y_p(2n)^- &\equiv \mathcal{W}[sp(2np), n.sl(p)], & Y_p(2n)^+ &\equiv \mathcal{W}[so(2np), n.sl(p)], \\ Y_p(2n+1)^+ &\equiv \mathcal{W}[so((2n+1)p), n.sl(p) \oplus so(k)], & p &= 2k+1, \end{aligned}$$

где “ $\equiv$ ” обозначает изоморфизмы алгебр. Усечение определяется, как в теореме 2.

Отметим, что, как и в случае $Y_p(N)$, изоморфизм нельзя продолжить до изоморфизма алгебр Хопфа, а (неусеченные) твистованные янгианы $Y(N)$ не являются даже алгебрами Хопфа (а только левыми коидеалами в $Y(N)$). В случае янгиана $Y(N)$ этот изоморфизм дает простой способ квантования $\mathcal{W}$ -алгебр. Его можно использовать также для определения центра и конечномерных неприводимых представлений этих $\mathcal{W}$ -алгебр (подробнее см. [15]).

7. ОБОБЩЕНИЕ НА СУПЕРАЛГЕБРЫ

Тот же метод можно применить к суперъянгианам и $\mathcal{W}$ -супералгебрам. Как и для $Y(N)$ и $gl(N)$, выделенным является случай супералгебры $gl(M|N)$.

7.1. Суперъянгиан $Y(M|N)$. Таким же образом, как янгиан $Y(N)$ основан на алгебре $gl(N)$, суперъянгианы $Y(M|N)$ основаны на супералгебре $gl(M|N)$. Они были определены в работе [19], и их представления изучались в работах [20]. Определим $\mathbb{Z}_2$ -градуировку $[T_{(n)}^{ij}] = [i] + [j]$ такую, что

$$[i] = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq M, \\ 1, & M+1 \leq i \leq M+N, \end{cases}$$

и, как обычно, введем

$$T(u) = \sum_{i,j=1}^{M+N} \sum_{n \geq 0} u^{-n} T_{(n)}^{ij} E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{M+N} T^{ij}(u) E_{ij},$$

$$P_{12} = \sum_{i,j} (-1)^{[i][j]} E_{ij} \otimes E_{ji}.$$

Суперъянгиан тогда определяется как

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v), \quad R_{12}(u) = \mathbb{I} - \frac{1}{u}P_{12},$$

где мы ввели градуированное тензорное произведение

$$T_1(u) = \sum_{i,j,k,l} (-1)^{([i]+[j])[k]} T_{ij}(u) \delta_{kl} E_{ij} \otimes E_{kl}, \quad T_2(u) = \sum_{i,j} T_{ij}(u) \mathbb{I} \otimes E_{ij}.$$

Суперъянгиан является градуированной алгеброй Хопфа, и его R -матрица удовлетворяет градуированной алгебре Янга–Бакстера. Классический аналог определяется, как в конце раздела 2 (подробнее см. [19]–[21]).

7.2. $\mathcal{W}(M|N)$ -супералгебры. Взяв супералгебру $gl(M|N)$ и используя вложения в нее алгебры $sl(2)$, можно построить $\mathcal{W}$ -супералгебры. $sl(2)$ -Генераторы являются бозонами и потому принадлежат подалгебре $gl(M) \oplus gl(N)$. Процедура та же, что и в разделе 3, единственное отличие заключается в определении связи на фермионные генераторы, которая для самосогласованности должна состоять в приравнивании их грасмановой константе (подробнее см. [8]).

Как и для случая $gl(N)$, мы выделяем специальный класс $\mathcal{W}$ -супералгебр – конечные $\mathcal{W}$ -супералгебры $\mathcal{W}_p(M|N) = \mathcal{W}[gl(pM|pN), (M+N).sl(p)]$, где $(M+N).sl(p)$ обозначает прямую сумму $M+N$ алгебр $sl(p)$, из которых M включены в $gl(M)$ -подалгебру супералгебры $gl(M|N)$, а остальные N – в ее $gl(N)$ -подалгебру. Тогда можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7. *Супералгебры $\mathcal{W}_p(M|N)$ изоморфны усечениям классического суперъянгиана $Y(M|N)$ на уровне p .*

Этот изоморфизм позволяет классифицировать неприводимые конечномерные представления супералгебр $\mathcal{W}_p(M|N)$ [21].

7.3. Твистованные суперъянгианы. Аналогично твистованным янгианам можно определить твистованные суперъянгианы [22]. Это приводит к подалгебрам $Y(M|N)$, которые содержат ортосимплектические супералгебры. Повторяя рассмотрение для твистованного янгиана, введем автоморфизм $Y(M|N)$

$$\tau(T^{ij}(u)) = (-1)^{[i]([j]+1)} \theta_i \theta_j T^{\bar{j}\bar{i}}(-u), \quad (6)$$

где $\theta_i = \pm 1$, $(-1)^{[i]} \theta_i \theta_{\bar{i}} = \theta_0 = \pm 1$,

$$\bar{i} = \begin{cases} M+1-i, & 1 \leq i \leq M, \\ 2M+N+1-i, & M+1 \leq i \leq M+N. \end{cases}$$

Однако наличие фермионных генераторов требует, чтобы $N = 2n$ и $\theta_0 = +1$ (с точностью до изоморфизма алгебр Хопфа $Y(M|N) \leftrightarrow Y(N|M)$, который имеет место при $M = 2m$ и при котором меняется знак θ_0 ; см. [22]). Таким образом, приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Твистованный суперъянгиан $Y(M|2n)^+$ есть подалгебра в $Y(M|2n)$, порожденная $S(u) = T(u)\tau(T(u))$, где автоморфизм τ определен формулой (6) при*

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq M, \\ \operatorname{sgn} \left(\frac{2M+N+1}{2} - i \right), & M+1 \leq i \leq M+2n. \end{cases}$$

С учетом этого определения можно доказать, что для $S(u)$ выполнено

$$\begin{aligned} R_{12}(u-v)S_1(u)R'_{12}(u+v)S_2(v) &= S_2(v)R'_{12}(u+v)S_1(u)R_{12}(u-v), \\ \tau(S(u)) &= S(-u) + \frac{1}{2u}(S(u) - S(-u)). \end{aligned}$$

Неприводимые конечномерные представления твистованного суперъянгиана изучаются в работе [22].

Сворачивание $\mathcal{W}$ -супералгебр было введено в работе [14]; было показано, что оно приводит к $\mathcal{W}$ -супералгебрам, основанным на $osp(M|N)$ -супералгебрах. Рассматривая специальный класс свернутых $\mathcal{W}$ -супералгебр, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть $\mathcal{W}_p(M|2n)^+$ – супералгебра $\mathcal{W}[osp(Mp|2np), ([M/2]+n)sl(p) \oplus \varepsilon_M so(k)]$, где $\varepsilon_M \equiv M \pmod{2}$ и p нечетно ($p = 2k+1$), если M нечетно. Тогда супералгебра $\mathcal{W}_p(M|2n)^+$ изоморфна усечению твистованного суперъянгиана $Y(M|2n)^+$ на уровне p .*

Теорема 8 позволяет классифицировать конечномерные представления $\mathcal{W}_p(M|2n)^+$ -алгебр [22].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что $\mathcal{W}$ -(супер)алгебры из широкого класса изоморфны усечениям (твистованных) (супер)янгианов. Этот изоморфизм позволяет классифицировать все неприводимые конечномерные представления этих $\mathcal{W}$ -алгебр.

Более того, поскольку существует много других $\mathcal{W}$ -алгебр, указанная связь позволяет надеяться на возможность обобщения янгианов (как алгебр Хопфа). Такова же ситуация и для аффинных $\mathcal{W}$ -алгебр, из которых должно получаться двухпараметрическое обобщение янгианов. Следует изучить также приложения к физическим моделям, таким как НУШ.

Список литературы

- [1] В. Г. Дринфельд. ДАН СССР. 1985. Т. 283. С. 1060.
- [2] A. A. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin. Lett. Math. Phys. 1986. V. 12. P. 199.
- [3] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin. Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 393; B. O. Tarasov. ТМФ. 1985. Т. 63. № 2. С. 175; V. Chari, A. Pressley. Enseign. Math. 1990. V. 36. P. 267.
- [4] А. Б. Замолодчиков. ТМФ. 1985. Т. 65. № 3. С. 347.
- [5] L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui, A. Wipf. Phys. Rep. 1992. V. 222. P. 1.
- [6] P. Bouwknegt, K. Schoutens. Phys. Rep. 1993. V. 223. P. 183.
- [7] J. De Boer, F. Harmsze, T. Tjin. Phys. Rep. 1996. V. 272. P. 139.
- [8] L. Frappat, E. Ragoucy, P. Sorba. Commun. Math. Phys. 1993. V. 157. P. 499.
- [9] E. Ragoucy, P. Sorba. Commun. Math. Phys. 1999. V. 203. P. 551.
- [10] C. Briot, E. Ragoucy. RTT presentation of finite $\mathcal{W}$ -algebras. Preprint LAPTH-792/00; math.QA/0005111.
- [11] R. Rosales. Stud. Appl. Math. 1978. V. 59. P. 117; E. К. Склянин, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 6. С. 1430; E. К. Склянин. ДАН СССР. 1979. Т. 244. № 6. С. 1337; H. B. Tacker, D. Wilkinson. Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 3660; D. B. Creamer, H. B. Tacker, D. Wilkinson. Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 1523; J. Honerkamp, P. Weber, A. Wiesler. Nucl. Phys. B. 1979. V. 152. P. 266; B. Davies. J. Phys. A. 1981. V. 14. P. 2631.
- [12] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov. Ann. Phys. 1979. V. 120. P. 253; L. D. Faddeev. Quantum completely integrable models of field theory. Preprint LOMI P-2-79; Sov. Sci. Rev. C. 1980. V. 1. P. 107.
- [13] M. Mintchev, E. Ragoucy, P. Sorba, Ph. Zaug. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5885; hep-th/9905105.
- [14] L. Frappat, E. Ragoucy, P. Sorba. Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 805.
- [15] E. Ragoucy. Folded $\mathcal{W}$ -algebras as truncations of twisted Yangians. Preprint LAPTH-824/00; math.QA/0012182.
- [16] G. I. Olshanskiĭ. Twisted Yangians and infinite-dimensional classical Lie algebras. In: Lecture Notes in Math. V. 1510. Quantum Groups. Proc. of Workshop Held in the Euler International Mathematical Institute (Leningrad, 1990). Ed. P. P. Kulish. Berlin: Springer, 1992. P. 104.
- [17] A. Molev. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 5559; q-alg/9711022.
- [18] А. Молев, М. Назаров, Г. Ольшанский. УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 27; hep-th/9409025.
- [19] M. Nazarov. Lett. Math. Phys. 1991. V. 21. P. 123.
- [20] R. B. Zhang. Representations of super-Yangian. hep-th/9411243; R. B. Zhang. Lett. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 419; hep-th/9507029.
- [21] C. Briot, E. Ragoucy. $\mathcal{W}$ -superalgebras and super-Yangians (in preparation).
- [22] C. Briot, E. Ragoucy. Twisted super-Yangians (in preparation).