Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Гомес-Уллате, А. Гонзалес-Лопес, М. А. Родригес, Квазиточно решаемые обобщения моделей Калоджеро–Сазерленда, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 367–378

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 08:56:06

© 2001 г. Д. Гомес-Уллате*, А. Гонзалес-Лопес*, М. А. Родригес*

КВАЗИТОЧНО РЕШАЕМЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛЕЙ КАЛОДЖЕРО–САЗЕРЛЕНДА

Обобщение процедуры построения квазиточно решаемых моделей с одной степенью свободы на (квази)точно решаемые модели N частиц на прямой позволяет получить много хорошо известных моделей в рамках нового подхода, который не использует корневые системы. В частности, к этим квазиточно решаемым моделям относится эллиптическая BC_N -модель Калоджеро–Сазерленда. При некоторых значениях параметров этой модели явно вычислены основное состояние и низшие возбуждения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Первый пример нетривиальной интегрируемой квантовой многочастичной задачи, найденный Калоджеро [1], — это система идентичных нерелятивистских частиц, взаимодействующих попарно с обратно-квадратичным потенциалом $v(r) = r^{-2}$ и гамильтонианом

$$H_N = - \sum_{k=1}^N \partial_{x_k}^2 + g \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N v(x_j - x_k). \quad (1)$$

Свойство *интегрируемости* означает, что можно явно построить полный набор коммутирующих интегралов движения. Вскоре после этого Сазерленд в работе [2] установил интегрируемость модели (1) с периодическим потенциалом взаимодействия $v(r) = \sin^{-2}(r)$. С тех пор исследованию этих моделей, которые нашли разнообразные применения во множестве задач, таких как квантовые спиновые цепочки с дальним взаимодействием [3], теория случайных матриц [4], дробная статистика и анионы [5], теория Янга–Миллса [6], квантовые жидкости Холла [7], теория солитонов [8], вицинальные (т.е. слабо отклоняющиеся от плоскости главной формы) поверхности в кристаллах [9] и черные дыры [10], была посвящена обширная литература.

Наиболее общим потенциалом взаимодействия v , для которого гамильтониан (1) интегрируем, является $\wp$ -функция Вейерштрасса, включающая в себя рациональный и

*Departamento de Física Teórica II, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain. E-mail: david@ciruelo.fis.ucm.es; artemio@eucmos.sim.ucm.es; rodrigue@eucmos.sim.ucm.es

тригонометрический случай как специальные пределы. В классической теории интегрируемость этого потенциала была доказана Калоджеро и Переломовым с использованием представления лаксовой пары [11], а явное интегрирование было проделано Кричевером [12]. Ольшанецкий и Переломов показали в работе [13], что во всех этих моделях имеется внутренняя алгебраическая структура, основанная на корневых системах алгебр A_n , и что помимо указанных моделей существуют интегрируемые модели, основанные на других корневых системах. В моделях, исследованных в работе [13], интегралы движения соответствуют радиальным частям оператора Лапласа–Бельтрами на симметрическом пространстве, отвечающем данной корневой системе. Такие интегрируемые модели получаются проектированием из систем, свободно двигающихся на пространствах старших размерностей.

Однако интегрируемые гамильтонианы не обязательно оказываются *решаемыми*, т. е. не всегда возможно найти явно их спектр и собственные функции. Известно, что модели с обратно-квадратичным и с обратно-квадратичным синусоидальным потенциалами являются точно решаемыми (ТР), и про их собственные функции известно довольно много [14], но более общая модель с потенциалом, задаваемым $\wp$ -функцией Вейерштрасса, оказалась намного более сложной. Для этого случая известны лишь отдельные точные решения [15], [16] и только для небольшого числа частиц.

Некоторое время назад Турбинер использовал технику алгебр Ли, для того чтобы показать, что многие (хотя и не все) гамильтонианы Ольшанецкого–Переломова также являются ТР [17], [18]. Здесь под *точной решаемостью* понимается то, что N -частичный гамильтониан сохраняет бесконечную возрастающую последовательность подпространств известных гладких функций, в то время как *квазиточно решаемый* (КТР) гамильтониан сохраняет лишь одно конечномерное подпространство. Построение этих инвариантных подпространств обычно основано на теории представлений алгебр Ли дифференциальных операторов [19].

Был проведен достаточно детальный анализ собственных функций этих моделей. Связанные состояния оказались связанными с ортогональными многочленами и обобщениями гипергеометрических функций на случай многих переменных [20]–[22]. Рассеянные состояния проявляют солитонные свойства и асимптотически ведут себя как волновые функции анзаца Бете.

Уже довольно давно была известна идея построения многочастичных ТР задач, основанного на нулях и полюсах специальных решений уравнений в частных производных. Глубокое исследование этой проблемы на классическом уровне содержится в основополагающей работе [23]. Эта идея была сравнительно недавно использована Хоу и Шифманом [24], которые обобщили этот подход на квантовый случай с использованием методов алгебр Ли и получили новое семейство многочастичных КТР потенциалов.

В данной статье излагается основная идея метода, которая иллюстрируется на примере КТР модели, основанной на эллиптической модели Калоджеро–Сазерленда (КС), связанной с алгеброй типа BC_N (наиболее общий список таких моделей можно найти в обзоре [25]). В разделе 2 излагается концепция квазиточной решаемости модели. В разделе 3 объясняется, как построить многочастичный потенциал. Скрытая алгебра симметрий, ответственная за КТР характер построенных моделей, представлена в разделе 4. Наконец, в разделе 5 обсуждается эллиптическая модель КС.

2. КВАЗИТОЧНАЯ РЕШАЕМОСТЬ МОДЕЛИ

Начнем с краткого обзора концепции квазиточной решаемости модели, которая будет использоваться в дальнейшем. Будем называть оператор Шредингера

$$H = - \sum_k \partial_{x_k}^2 + V(\mathbf{x}) \quad (2)$$

КТР, если этот оператор сохраняет некоторое известное конечномерное линейное подпространство $\mathcal{M}$ гладких функций. Спектральная проблема для оператора H на этом подпространстве сводится к задаче диагонализации матрицы $H|_{\mathcal{M}}$, что дает возможность вычислить конечное подмножество спектра оператора H чисто алгебраически. Если, в свою очередь, оператор H сохраняет бесконечную возрастающую последовательность известных конечномерных подпространств $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}_k \subset \dots$, то такой оператор становится ТР, поскольку в этом случае можно уже алгебраически вычислить произвольное число собственных функций и собственных значений оператора H , если сузить задачу на какое-либо подпространство $\mathcal{M}_k$. В случае, когда не все функции из $\mathcal{M}$ или из $\mathcal{M}_k$ лежат в пространстве L^2 , некоторые из вычисленных таким образом собственных функций оператора H могут не быть квадратично интегрируемыми.

Естественные преобразования эквивалентности, которые порождаются преобразованиями координат $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} = \mathbf{Z}(\mathbf{x})$ и сопряжением на любую неотрицательную функцию $\mu(\mathbf{z})$ и переводят $H \equiv H(\mathbf{x})$ в дифференциальный оператор (не обязательно типа оператора Шредингера)

$$\overline{H}(\mathbf{z}) = \mu(\mathbf{z})^{-1} H(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{z}), \quad (3)$$

сохраняют КТР (или ТР) характер оператора Шредингера H . Тем самым если оператор $H(\mathbf{x})$ оставляет инвариантным подпространство $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(\mathbf{x})$, то оператор $\overline{H}(\mathbf{z})$ оставляет инвариантным подпространство

$$\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{z}) = \mu(\mathbf{z})^{-1} \mathcal{M}(\mathbf{x}),$$

и если $\psi(\mathbf{x})$ – это собственная функция оператора $H(\mathbf{x})$ с собственным значением E , принадлежащая подпространству $\mathcal{M}(\mathbf{x})$, то $\overline{\psi}(\mathbf{z}) = \mu(\mathbf{z})^{-1} \psi(\mathbf{x})$ будет собственной функцией оператора $\overline{H}(\mathbf{z})$, лежащей в подпространстве $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{z})$ с той же собственной энергией E . Наиболее общий способ построения КТР операторов Шредингера состоит в том, чтобы начать с конечномерной алгебры Ли дифференциальных операторов $\mathfrak{g}$, допускающей конечномерные представления в пространстве гладких функций от переменной $\mathbf{z}$. Всякий дифференциальный оператор $\overline{H}(\mathbf{z})$, принадлежащий обертывающей алгебре $\mathfrak{g}$, автоматически сохраняет подпространство носителя $\overline{\mathcal{M}}(\mathbf{z})$ такого конечномерного представления. Если можно найти такое преобразование эквивалентности (3), что дифференциальный оператор $H(\mathbf{x})$ приобретает шредингеровский вид (2), то оператор $H(\mathbf{x})$ несомненно является КТР оператором Шредингера, поскольку он оставляет инвариантным конечномерное подпространство $\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{z}) \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{z})$. В этом случае можно сказать, что преобразование $\mathfrak{g} = \mu(\mathbf{z}) \cdot \mathfrak{g} \cdot \mu(\mathbf{z})^{-1}$ – это *скрытая алгебра симметрий*, ответственная за КТР природу оператора $H(\mathbf{x})$. В литературе функция $\mu(\mathbf{z})$ обычно называется *калибровочным множителем*, а оператор $\overline{H}(\mathbf{z})$ – *калибровочным гамильтонианом*.

В размерности один существует единственная (с точностью до эквивалентности) алгебра Ли дифференциальных операторов первого порядка — это стандартная проективная реализация алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ (или ее подалгебр), базисные элементы которой имеют вид

$$J_N^- = \partial_z, \quad J_N^0 = z\partial_z - \frac{N}{2}, \quad J_N^+ = z^2\partial_z - Nz. \quad (4)$$

Если N — неотрицательное целое число, то у этой алгебры существует $(N+1)$ -мерное представление в пространстве $\mathcal{P}_N$ многочленов степени $\leq N$. Наиболее общий дифференциальный оператор второго порядка, принадлежащий обертывающей алгебре алгебры Ли (4), получится, если взять произвольную квадратичную комбинацию элементов (4), которая в общем случае имеет вид

$$-\overline{H}(z) = P(z)\partial_z^2 + \tilde{Q}(z)\partial_z + \tilde{R}(z), \quad (5)$$

где

$$\tilde{Q}(z) = Q(z) - \frac{N-1}{2}P'(z), \quad \tilde{R}(z) = R - \frac{N}{2}Q'(z) + \frac{N}{12}(N-1)P''(z),$$

P , Q и R — это произвольные многочлены соответствующих степеней четыре, два и ноль, а знак минус в выражении (5) поставлен для дальнейшего удобства. Если многочлен P положительно определен, то оператор (5) оказывается эквивалентен (в смысле симметрии (3)) оператору Шредингера $H(x) = -\partial_x^2 + V(x)$; для этого надо сделать замену переменных

$$x = \xi(z) = \int^z \frac{dy}{\sqrt{P(y)}} \quad (6)$$

и преобразование сопряжения с калибровочным множителем

$$\mu(z) = P(z)^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \int^z \frac{\tilde{Q}(y)}{2P(y)} dy \right\}.$$

Положим $N \geq 1$ и для простоты предположим, что калибровочный гамильтониан (5) диагонализуем в пространстве многочленов $\mathcal{P}_N$. Тогда $\overline{H}(z)$ имеет $N+1$ алгебраически вычисляемых *полиномиальных* собственных функций $\varphi_k(z)$ ($0 \leq k \leq N$) степени $\leq N$, а оператор Шредингера $H(x)$ имеет соответственно $N+1$ алгебраически вычисляемых собственных функций вида

$$\psi_k(x) = \mu(z)\varphi_k(z)|_{z=\xi^{-1}(x)}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (7)$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА $V_N(\mathbf{x})$

В этом разделе на основе хорошо разработанной конструкции *классических* точно решаемых многочастичных задач будет построен многочастичный гамильтониан исходя из данных о нулях и полюсах некоторых решений дифференциальных уравнений в частных производных в пространстве размерности $1+1$.

Рассмотрим зависящее от времени уравнение Шредингера с гамильтонианом $H(x)$:

$$H(x)\Psi(x, t) = i\partial_t \Psi(x, t). \quad (8)$$

Поскольку гамильтониан $H(x)$ не зависит от времени, решения уравнения (8) можно записать в следующем виде:

$$\Psi(x, t) = \sum_{k=0}^N c_k \psi_k(x) e^{-i E_k t}, \quad (9)$$

где $\psi_k(x)$ – это собственная функция гамильтониана $H(x)$ вида (7) с собственной энергией E_k , а $c_0, \dots, c_N$ – произвольные комплексные константы. Это же решение можно представить в виде

$$\Psi(x, t) = \mu(z) \Phi(z, t) \Big|_{z=\xi^{-1}(x)}, \quad (10)$$

где

$$\Phi(z, t) = \sum_{k=0}^N c_k \varphi_k(z) e^{-i E_k t}.$$

Ввиду того что каждая функция $\varphi_k(z)$ – это многочлен степени не выше N , получим, что функция $\Phi(z, t)$ – это многочлен степени N по переменной z с коэффициентами, зависящими от времени. Поэтому эта функция допускает разложение на множители:

$$\Phi(z, t) = C(t) \prod_{j=1}^N [z - z_j(t)]. \quad (11)$$

Из уравнения (10) следует, что каждый ноль $z_j(t)$ функции $\Phi(z, t)$ задает ноль

$$x_j(t) = \xi(z_j(t)), \quad 1 \leq j \leq N, \quad (12)$$

зависящей от времени волновой функции $\Psi(x, t)$. Приступим теперь к исследованию динамики нулей волновой функции и покажем, что эта динамика следует из классического лагранжиана.

В самом деле, подставляя выражение (10) в уравнение Шредингера (8) и используя (11), можно легко получить уравнение

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{P(z)}{(z - z_j(t))(z - z_k(t))} + \sum_{j=1}^N \frac{\tilde{Q}(z)}{z - z_j(t)} + \tilde{R}(z) = i \sum_{j=1}^N \frac{\dot{z}_j(t)}{z - z_j(t)} - i \frac{\dot{C}(t)}{C(t)},$$

которое должно быть тождественно выполнено при всех z и t . Приравнявая вычеты в точках $z = z_k(t)$ в обеих частях уравнения, получим следующую систему дифференциальных уравнений на функции $z_k(t)$:

$$i \dot{z}_k = \tilde{Q}(z_k) + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \frac{P(z_k)}{z_k - z_j} \equiv F_k(\mathbf{z}), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) следует, что нули $\mathbf{x}(t)$ зависящей от времени волновой функции (9) двигаются вдоль траекторий лагранжевой системы с функцией Лагранжа

$$L = \sum_{k=1}^N \dot{x}_k^2 - \sum_{k=1}^N \frac{F_k^2(\mathbf{z})}{P(z_k)},$$

для которой сопряженная функция Гамильтона имеет вид

$$H_N = \sum_{k=1}^N p_k^2 + \sum_{k=1}^N \frac{F_k^2(\mathbf{z})}{P(z_k)}. \quad (14)$$

С классической точки зрения эта задача не относится к классу точно решаемых; тем не менее она может быть частично решена, поскольку все-таки для некоторого подмножества начальных данных классические траектории $x_j(t)$ точно известны. Иными словами, исходные скорости в этом подмножестве фиксированы, если известны начальные координаты, поскольку система (13) состоит из уравнений первого порядка. Однако поскольку задача состоит в том, чтобы рассмотреть квантовый аналог гамильтониана (14), то обстоятельство, что начальные скорости не произвольны, не влияет на результат. Подставляя уравнения (13) в гамильтониан (14) и производя замену $p_k = -i\partial_{x_k}$, получим N -частичный квантовый гамильтониан

$$H_N = - \sum_{k=1}^N \partial_{x_k}^2 + V_N(\mathbf{x}),$$

в котором

$$V_N(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{Q}_k^2}{P_k} + 4 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{\tilde{Q}_k}{z_{kj}} + 4 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{P_k}{z_{kj}^2} + 4 \sum_{\substack{j,k,l=1 \\ j \neq k \neq l \neq j}}^N \frac{P_k}{z_{kj} z_{kl}} \quad (15)$$

и введены обозначения

$$P_k = P(z_k), \quad \tilde{Q}_k = \tilde{Q}(z_k), \quad z_{kj} = z_k - z_j.$$

Удобно предположить, что коэффициенты, стоящие при каждой из четырех сумм в формуле (15), различны. Опуская несущественный общий множитель, получим формулу для потенциала

$$V_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{\tilde{Q}_k^2}{P_k} + g_1 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{\tilde{Q}_k}{z_{kj}} + g_2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{P_k}{z_{kj}^2} + g_3 \sum_{\substack{j,k,l=1 \\ j \neq k \neq l \neq j}}^N \frac{P_k}{z_{kj} z_{kl}}. \quad (16)$$

4. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ И АЛГЕБРА $\mathfrak{sl}(N+1)$

Аналогично одночастичному случаю потребуем, чтобы гамильтониан $H_N(\mathbf{x})$ после замены переменных и калибровочного преобразования (3) был эквивалентен калибровочному гамильтониану $\bar{H}_N(\mathbf{z})$, который оставляет инвариантным некоторое конечномерное подпространство полиномиальных функций. Этого можно добиться, если гамильтониан $\bar{H}_N(\mathbf{z})$ представим в виде квадратичной комбинации генераторов алгебры $\mathfrak{sl}(N+1)$

$$\mathcal{D}_k = \partial_{\tau_k}, \quad \mathcal{N}_{jk} = \tau_j \partial_{\tau_k}, \quad \mathcal{U}_k = \tau_k \left(m - \sum_{i=1}^N \tau_i \partial_{\tau_i} \right), \quad j, k = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$

где

$$\tau_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

— это k -я элементарная симметрическая функция.

Выбирая натуральное число m , получим, что операторы (17) оставляют инвариантным конечномерное подпространство многочленов

$$\mathcal{M}_m = \text{span} \left\{ \tau_1^{l_1} \tau_2^{l_2} \dots \tau_N^{l_N} : l_i \in \mathbf{N}, \sum_{i=1}^N l_i \leq m \right\}.$$

Генераторы

$$\mathcal{D}_k, \quad \mathcal{N}_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq N, \quad (18)$$

порождают *максимальную параболическую подалгебру* $\mathfrak{sl}(N+1)$, которая оставляет инвариантным бесконечную последовательность подпространств $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots$. Таким образом, если оператор $\overline{H}_N$ — это квадратичная комбинация дифференциальных операторов (18), то физический гамильтониан точно решаем.

5. ПРИМЕР: ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ BC_N

Рассмотрим квантовый N -частичный гамильтониан

$$H_N = - \sum_{k=1}^N \partial_{x_k}^2 + V_N(\mathbf{x}) \quad (19)$$

с потенциалом

$$V_N(\mathbf{x}) = c_m \sum_{k=1}^N \wp(x_k + i\beta) + 4b(b-1) \sum_{k=1}^N \wp(2x_k) + a(a-1) \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N [\wp(x_j + x_k) + \wp(x_j - x_k)], \quad (20)$$

где a и b суть положительные вещественные константы, m — неотрицательное целое число и

$$c_m = 2[2b + m + a(N-1)][2b + 2m + 2a(N-1) + 1] > 0.$$

Этот потенциал получается из выражения (16), если положить $P(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$, после чего замена переменных (6) принимает вид

$$z_j = \wp(x_j + i\beta), \quad j = 1, \dots, N.$$

В этих формулах $\wp(z) \equiv \wp(z|g_2, g_3)$ обозначает $\wp$ -функцию Вейерштрасса с инвариантами $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$. Когда константы g_2 и g_3 удовлетворяют неравенству $g_2^3 > 27g_3^2$, функция $\wp(z)$ имеет два основных периода 2α и $2i\beta$, один из которых веществен, а другой чисто мнимый [26]. В этом случае значения $\wp(x + i\beta)$ вещественны и регулярны (аналитичны) при всех вещественных значениях переменной x и периодичны с вещественным периодом 2α . С другой стороны, функция $\wp(x)$ вещественна при вещественных значениях x и

расходится как $(x - 2n\alpha)^{-2}$, если x стремится к целому кратному $2n\alpha$ вещественного периода 2α . Таким образом, в качестве конфигурационного пространства гамильтониана (19), (20) можно выбрать ограниченную область пространства $\mathbb{R}^N$:

$$0 < x_N < x_{N-1} < \dots < x_1 < \alpha. \quad (21)$$

Поскольку в этой области потенциал (20) является удерживающим, спектр H_N чисто дискретен, и граничные условия, налагаемые на собственные функции $\psi_k(\mathbf{x})$ этого гамильтониана, состоят в том, что эти функции обращаются в нуль на границе области (21). В этом случае калибровочный множитель имеет вид

$$\mu(\mathbf{x}) = \prod_{j < k} [\wp(x_j + i\beta) - \wp(x_k + i\beta)]^a \prod_k [\wp'(x_k + i\beta)]^b. \quad (22)$$

Калибровочный гамильтониан (3) оставляет инвариантным пространство $\mathcal{M}_m$ размерности

$$\dim \mathcal{M}_m = \binom{m+N}{m},$$

а полиномиальные собственные функции χ_k гамильтониана $\overline{H}_N$ могут быть вычислены алгебраически, если диагонализировать конечномерную матрицу $\overline{H}_N|_{\mathcal{M}_m}$. Поэтому можно явно вычислить некоторое число $(\dim \mathcal{M}_m)$ алгебраических собственных функций

$$\psi_k(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})\chi_k(\mathbf{z}) \quad (23)$$

исходного гамильтониана (19), (20).

Хотя натуральное число m и число частиц N произвольны, т.е. потенциал (20) остается КТР при любых m и N , эти числа надо фиксировать всякий раз при проведении реальных вычислений. Для простоты рассмотрим пример, когда $N = m = 2$. В этом случае число алгебраических собственных функций равно $\dim \mathcal{M}_2 = 6$. Матрица действия гамильтониана $\overline{H}_2|_{\mathcal{M}_2}$ на канонический базис $\{1, \tau_1, \tau_2, \tau_1^2, \tau_1\tau_2, \tau_2^2\}$ инвариантного пространства $\mathcal{M}_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & g_2(2a+2b+1) & -2ag_3 & 4g_3 & 0 & 0 \\ 16a+24b+20 & 0 & g_2(b+\frac{1}{2}) & 4g_2(a+b+1) & 2g_3(1-a) & 0 \\ 0 & 8a+24b+12 & 0 & 0 & g_2(2a+2b+5) & -4g_3(a+1) \\ 0 & 8a+12b+14 & 0 & 0 & g_2(b+\frac{1}{2}) & 2g_3 \\ 0 & 0 & 8a+12b+14 & 16(a+3b+3) & 0 & g_2(2b+3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8a+24b+28 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы суть алгебраические энергии физического гамильтониана H_2 , а ее собственные векторы задают компоненты разложения функций χ_k из формулы (23) по каноническому базису пространства $\mathcal{M}_2$.

Шесть алгебраических собственных значений матрицы $\overline{H}_2|_{\mathcal{M}_2}$ приведены в табл. 1 для следующих значений констант связи и инвариантов $\wp(x)$ -функции Вейерштрасса:

$$a = 2, \quad b = \frac{3}{2}, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = \frac{2}{3}. \quad (24)$$

Таблица 1

	Точное значение	Численное значение
E_0	−86.5484	−86.40
E_1	−43.2786	−42.96
E_2	−10.0288	−9.64
E_3	12.5045	13.11
E_4	46.2657	46.97
E_5	81.0857	81.34

В табл. 1 точно алгебраически вычисленные собственные значения оператора H_2 сравниваются с численными расчетами шести низших уровней энергии, полученных при решении уравнения Шредингера в треугольнике $0 < x_2 < x_1 < \alpha$ с использованием метода конечного элемента. Приблизительное соответствие между двумя столбцами табл. 1 показывает, что алгебраические собственные значения действительно задают низшие состояния энергии исследуемой системы, хотя нет теоретических оснований ожидать, что то же будет верно и в общем случае. Многочлены χ_k , отвечающие шести алгебраическим собственным функциям, содержатся в табл. 2. На рис. 1–3 представлены графики волновых функций основного и первых двух возбужденных состояний исследуемой системы.

Таблица 2

	τ_1	τ_2	τ_1^2	$\tau_1\tau_2$	τ_2^2
χ_0	−3.0585	7.1643	2.2349	−9.778	9.0382
χ_1	−3.3008	−10.917	2.5612	13.462	−24.885
χ_2	0.40412	5.1067	−2.2912	−0.77221	6.1599
χ_3	−3.9273	−37.989	2.0457	14.734	94.264
χ_4	1.6422	−2.7456	−0.17611	−10.472	−18.108
χ_5	3.8942	8.3079	3.6675	15.1	14.898

Утверждение, что $\psi_0 = \mu\chi_0$ является основным состоянием системы, вытекает из следующего представления вектора χ_0 в терминах переменных z_k :

$$\begin{aligned}\chi_0 = & 2.2349(z_2 - 0.82835)(z_2 - 0.54017) - 9.778z_1(z_2 - 0.79769)(z_2 - 0.39212) + \\ & + 9.0382z_1^2(z_2 - 0.75385)(z_2 - 0.32801).\end{aligned}$$

Для величин инвариантов g_2 и g_3 , приведенных в (24), получим

$$e_3 = -0.72011 \leq z_k = \wp(x_k + i\beta) \leq e_2 = -0.240851.$$

Из выражения для функции χ_0 следует, что она всюду положительна. Поскольку согласно формуле (22) калибровочный множитель μ не обращается в нуль в открытом треугольнике $0 < x_2 < x_1 < \alpha$, получим, что и функция ψ_0 не обращается в нуль нигде внутри этого треугольника.

Рис. 1. Волновая функция основного состояния.

Рис. 2. Волновая функция первого возбужденного состояния.

Рис. 3. Волновая функция второго возбужденного состояния.

6. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье развит метод построения многочастичных ТР и КТР задач, гамильтонианы которых обладают ключевым свойством сохранения конечномерных подпространств при своем действии. Это свойство выполняется, если физический гамильтониан может быть сведен к калибровочному с помощью (неунитарного) калибровочного преобразования и замены переменных. Такое преобразование сохраняет спектр (подробный обзор метода и его результатов см. в работе [25]).

По поводу эллиптической модели КС, рассмотренной в качестве примера применения метода, заметим, что несмотря на обилие результатов, полученных в рациональной и тригонометрической моделях КС, полное описание более общей эллиптической модели КС до сих пор не получено, и в этой модели расчет удастся провести лишь в отдельных случаях [15], [16]. Можно указать две причины возникновения этой проблемы. В тригонометрическом и рациональном случаях, которые также могут быть исследованы с помощью указанного метода (см. [25], в данной статье этот вопрос не обсуждается), степень многочлена $P(z)$ меньше трех, в то время как в эллиптическом случае полином $P(z)$ имеет третью степень. Поэтому, в то время как первые две модели оказываются точно решаемыми (в смысле подхода, изложенного в разделе 2), эллиптическая модель оказывается всего лишь квазиточно решаемой. Более того, в рациональном и тригонометрическом случаях калибровочный множитель μ совпадает с основным состоянием системы и может быть разложен в произведение по системе положительных корней алгебры (см. [13]), т.е. этот множитель представим в виде

$$\mu = \prod_{j < k} [f(x_j - x_k) f(x_j + x_k)]^a \prod_k [f(2x_k)]^b, \quad (25)$$

где $f(x) = x$ в рациональном и $f(x) = \sin x$ в тригонометрическом случаях. В отличие от этих двух случаев, функция μ , задаваемая формулой (22), не может быть профакторизована по системе положительных корней ни для какой функции $f(x)$ и не является

волновой функцией основного состояния гамильтониана (19), (20). На самом деле в работе [27] было показано, что наиболее общий потенциал, допускающий факторизацию типа (23)–(25), не включает эллиптический случай.

Поскольку обсуждаемая модель относится к классу КТР моделей, можно вычислить лишь несколько собственных функций, отвечающих конечному множеству собственных значений, но не все собственные функции. В статье показано, что среди этого конечного множества алгебраических состояний находится и основное состояние, но вопрос о том, относятся ли следующие полученные состояния к первым возбужденным уровням, был пока решен только с помощью сравнения с результатами численных расчетов. В то время как теорема об осцилляциях утверждает, что алгебраические собственные значения задают основные состояния в одночастичной задаче, это утверждение пока не удалось доказать в многочастичном случае.

Список литературы

- [1] *F. Calogero*. J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419.
- [2] *B. Sutherland*. Phys. Rev. A. 1971. V. 4. P. 2019.
- [3] *F. D. M. Haldane*. Phys. Rev. Lett. 1980. V. 60. P. 635; *B. S. Shastry*. Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 639.
- [4] *B. D. Simons, P. A. Lee, B. L. Altshuler*. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 4122; 1994. V. 72. P. 64; *N. Taniguchi, B. S. Shastry, B. L. Altshuler*. Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3724.
- [5] *S. B. Isakov, G. Lozano, S. Ouvry*. Nucl. Phys. B. 1999. V. 552. P. 677; *S. Ouvry*. On the relation between the anyon and Calogero models. cond-mat/9907239.
- [6] *A. Gorskii, N. Nekrasov*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 414. P. 317; *J. A. Minahan, A. P. Polychronakos*. Phys. Lett. B. 1994. V. 326. P. 288.
- [7] *H. Azuma, S. Iso*. Phys. Lett. B. 1994. V. 331. P. 107; *S. Iso, S. J. Rey*. Phys. Lett. B. 1995. V. 352. P. 111; *Y. Yu*. From composite fermions to Calogero-Sutherland model: edge of fractional quantum hall liquid and the dimension reduction. cond-mat/9911054.
- [8] *A. P. Polychronakos*. Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 5153.
- [9] *M. Lässig*. Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 526.
- [10] *G. W. Gibbons, P. K. Townsend*. Phys. Lett. B. 1999. V. 454. P. 187.
- [11] *F. Calogero*. Lett. Nuovo Cimento. 1975. V. 13. P. 411; *A. M. Perelomov*. Lett. Math. Phys. 1977. V. 1. P. 531.
- [12] *И. М. Кривчевер*. Функции и его прилож. 1980. Т. 14. № 4. С. 45.
- [13] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov*. Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313.
- [14] *R. P. Stanley*. Adv. Math. 1989. V. 77. P. 76; *L. Lapointe, L. Vinet*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 178. P. 425.
- [15] *F. Gavrilo, A. M. Perelomov*. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 6339.
- [16] *J. Dittrich, V. I. Inozemtsev*. J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 753.
- [17] *W. Rühl, A. Turbiner*. Mod. Phys. Lett. 1995. V. 10. P. 2213.
- [18] *L. Brink, A. Turbiner, N. Wyllard*. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 1285.
- [19] *A. González-López, N. Kamran, P. J. Olver*. J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 3995.
- [20] *C. F. Dunkl*. Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 311. P. 167.
- [21] *R. P. Stanley*. Adv. Math. 1989. V. 77. P. 76.
- [22] *L. Lapointe, L. Vinet*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 178. P. 425.
- [23] *F. Calogero*. Nuovo Cimento B. 1978. V. 43. P. 177.
- [24] *X. Hou, M. Shifman*. Int. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. P. 2993.
- [25] *D. Gómez-Ullate, A. González-López, M. A. Rodríguez*. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 7305.
- [26] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*. Курс современного анализа. В 2-х частях. М.: Физматгиз, 1962.
- [27] *F. Calogero*. Lett. Nuovo Cimento. 1975. V. 13. P. 507.