Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Эрнандес Эредеро, Д. Леви, П. Винтерниц, Симметрии дискретного нелинейного уравнения Шредингера, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 379–387

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 02:45:29

© 2001 г. Р. Эрнандес Эредеро*, Д. Леви†, П. Винтерниц‡

СИММЕТРИИ ДИСКРЕТНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Описаны алгебры Ли $L(h)$ точечных симметрий дискретного аналога нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). В непрерывном пределе дискретное уравнение преобразуется в НУШ, а структура алгебры Ли меняется: происходит сжатие с шагом решетки h в качестве параметра сжатия. Пятимерное подпространство в $L(h)$, порожденное как точечными, так и обобщенными симметриями, преобразуется в пятимерную алгебру точечных симметрий НУШ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы исследуем алгебру Ли точечных симметрий и высшие симметрии иерархии дифференциально-разностных уравнений [1], связанных с дискретной спектральной задачей Захарова–Шабата

$$\Phi_{n+1} = (Z + Q_n I_1 + R_n I_2) \Phi_n, \quad (1)$$

где $\Phi_n = \Phi_n(z, t)$ — (2×2) -матричная волновая функция,

$$Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а z — собственное значение. Одним из членов иерархии является уравнение

$$\dot{Q}_n = \frac{i\gamma}{h^2} [(1 - \varepsilon |Q_n|^2)(Q_{n+1} + Q_{n-1}) - 2Q_n], \quad (2)$$

которое мы называем *дискретным нелинейным уравнением Шредингера* (ДНУШ) и которое в непрерывном пределе $Q = hu$, $x = nh$ преобразуется в нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + \gamma u_{xx} - 2\varepsilon \gamma |u|^2 u = 0. \quad (3)$$

*Departamento de Física Teórica II, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Spain. E-mail: rafahh@eucmos.sim.ucm.es

†Dipartimento di Fisica “Edoardo Amaldi”, Università di Roma Tre and INFN, Roma, Italy. E-mail: levi@amaldi.fis.uniroma3.it

‡Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Canada. E-mail: winterm@CRM.UMontreal.CA

Уравнение (2) является дифференциально-разностным уравнением с той же интегрируемой структурой, что и для НУШ. Его можно описать как интегрируемую дискретизацию НУШ или, точнее, как полудискретизацию, поскольку временная координата остается непрерывной. Говоря, что уравнение имеет “ту же интегрируемую структуру, что и НУШ”, мы подразумеваем прежде всего, что оно допускает бесконечную иерархию коммутирующих потоков, которая в непрерывном пределе преобразуется в бесконечную иерархию потоков, коммутирующих с НУШ. Это связано с тем фактом, что соответствующие рекурсионные операторы порождают обе иерархии.

Настоящая работа является частью программы, направленной на использование теории интегрируемых систем для исследования лиевских симметрий дискретных уравнений. Рассматриваются разностные уравнения на регулярной решетке. Предыдущие исследования [2]–[6] показали, что классы точечных симметрий для разностных уравнений на регулярной решетке несколько ограничены. Многие интересные симметрии получаются только при одновременном рассмотрении групповых действий на конечном (или бесконечном) наборе точек решетки [7]–[9], а не просто в одной точке.

Основным результатом данной работы является анализ алгебры Ли симметрий ДНУШ (2) и ее соотношения с алгеброй Ли точечных преобразований НУШ (3). В частности, мы проверяем, что непрерывный предел из ДНУШ в НУШ соответствует сжатию алгебры Ли, как и в случае системы Тоды [2].

Сжатия алгебр Ли были впервые введены Инону и Вигнером [10] для изучения соотношения между релятивистскими и нерелятивистскими теориями при стремлении скорости света к бесконечности. Группа Лоренца тогда претерпевает “сжатие” к группе Галилея. В настоящее время существует обширная литература, касающаяся сжатий алгебр Ли (см. [11]–[13] и приведенную там литературу). В различных приложениях параметр сжатия оказывался скоростью света, постоянной Планка, “радиусом” пространства положительной или отрицательной постоянной кривизны и др.

В нашем случае параметр сжатия является шагом решетки h . Бесконечномерная алгебра Ли $L(h)$ всех симметрий интегрируемого разностного уравнения сжимается к бесконечномерной алгебре $L(0)$ симметрий интегрируемого дифференциального уравнения. Основной момент состоит здесь в том, что конечномерное подмножество $S \subset L(h)$ сжимается к подалгебре в $L(0)$ – алгебре Ли L_p точечных симметрий, тогда как само подмножество S не образует алгебры Ли. Оно содержит как точечные, так и обобщенные симметрии дискретного уравнения и не замкнуто относительно коммутатора.

В разделе 2 мы используем рекурсионный оператор для вывода иерархии ДНУШ. В разделе 3 выписаны простейшие симметрии ДНУШ. Мы используем спектральное преобразование для связи изучаемых нелинейных эволюционных уравнений с линейными уравнениями для коэффициента отражения. Симметрии, действующие на пространстве решений эволюционного уравнения, преобразуются в симметрии, действующие в пространстве коэффициентов отражения, работать с которыми гораздо проще. Мы продолжаем вычисления коммутационных соотношений ранее найденных симметрий, выявляя структуру подмножества, которое мы используем. В разделе 4 описана предельная процедура, переводящая ДНУШ в НУШ. Симметрии подвергаются той же предельной процедуре. Мы явным образом представляем непрерывные пределы тех симметрий, которые переходят в точечные симметрии, и показываем, что для получения всех точечных

симметрий НУШ требуется включение обобщенных симметрий ДНУШ.

2. ДИСКРЕТНЫЕ ИЕРАРХИИ НУШ

Общая иерархия, которую мы изучаем, имеет вид [1]

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_n \\ -\dot{Q}_n \end{pmatrix} + \omega(L) \begin{pmatrix} R_n \\ Q_n \end{pmatrix} + \tilde{\omega}(L)(2n+1) \begin{pmatrix} R_n \\ Q_n \end{pmatrix} = 0, \quad (4)$$

где $\omega(L)$ и $\tilde{\omega}(L)$ – мероморфные функции рекурсионного оператора

$$L \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} - R_{n-1}a_n \sum_{j=n}^{\infty} \frac{Q_j A_j - R_j B_j}{1 - R_j Q_j} - R_n \sum_{j=n}^{\infty} (Q_j A_{j-1} - R_j B_{j+1}) \\ B_{n+1} - Q_{n+1}a_n \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{Q_j A_j - R_j B_j}{1 - R_j Q_j} - Q_n \sum_{j=n+1}^{\infty} (Q_j A_{j-1} - R_j B_{j+1}) \end{pmatrix}$$

при $a_n = 1 - R_n Q_n$. Иерархия (4) связана с дискретной спектральной задачей (1). Когда потенциалы R_n и Q_n асимптотически ограничены, имеются корректно определенная спектральная задача и соответствующая обратная задача рассеяния. В этом случае уравнение (4) эквивалентно эволюции *коэффициентов отражения* β_1 и β_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{pmatrix} + \omega(z) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \tilde{\omega}(z)z \begin{pmatrix} (\beta_1)_z \\ (\beta_2)_z \end{pmatrix} = 0. \quad (5)$$

Содержащий $\omega(z)$ член порождает изоспектральную эволюцию, т.е. $\dot{z} = 0$, тогда как член с $\tilde{\omega}(z)$ приводит к неизоспектральной эволюции, т.е. $\dot{z} = \tilde{\omega}(z)$.

Иерархию (4) можно редуцировать, полагая $R_n = \varepsilon Q_n^*$, что дает редуцированную иерархию

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \dot{Q}_n^* \\ -\dot{Q}_n \end{pmatrix} + [\omega_1(L) - \omega_1^*(L^{-1})] \begin{pmatrix} \varepsilon Q_n^* \\ Q_n \end{pmatrix} + [\tilde{\omega}_1(L) - \tilde{\omega}_1^*(L^{-1})](2n+1) \begin{pmatrix} \varepsilon Q_n^* \\ Q_n \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где ω_1 и $\tilde{\omega}_1$ – аналитические функции, а звездочка обозначает комплексное сопряжение. Разлагая $\omega_1(z^2) = \alpha_0 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z^4 + \dots$, получаем первые уравнения изоспектральной (т.е. независимой от n) иерархии

$$\begin{aligned} \dot{Q}_n = & (\alpha_0 - \alpha_0^*)Q_n + (1 - \varepsilon|Q_n|^2)(\alpha_1 Q_{n+1} - \alpha_1^* Q_{n-1}) + (1 - \varepsilon|Q_n|^2) \times \\ & \times \{ \alpha_2 [Q_{n+2}(1 - \varepsilon|Q_{n+1}|^2) - \varepsilon Q_{n+1}(Q_n^* Q_{n+1} + Q_n Q_{n-1}^*)] - \\ & - \alpha_2^* [Q_{n-2}(1 - \varepsilon|Q_{n-1}|^2) - \varepsilon Q_{n-1}(Q_n^* Q_{n-1} + Q_n Q_{n+1}^*)] \} + \dots \end{aligned}$$

и неизоспектральной (т.е. зависящей от n) иерархии

$$\begin{aligned} \dot{Q}_n = & (\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_0^*)(2n+1)Q_n + \tilde{\alpha}_1 [(2n+3)(1 - \varepsilon|Q_n|^2)Q_{n+1} + 2\varepsilon Q_n S_n^*] + \\ & + \tilde{\alpha}_1^* [(2n-1)(1 - \varepsilon|Q_n|^2)Q_{n-1} + 2\varepsilon Q_n S_n] + \dots \end{aligned}$$

3. СИММЕТРИИ ДНУШ

В общем случае N -е уравнения изоспектральной и неизоспектральной иерархий ДНУШ имеют вид

$$\dot{Q}_n = \sum_{j=0}^N (\alpha_j B_n^j - \alpha_j^* \varepsilon A_n^j), \quad \dot{Q}_n = \sum_{j=0}^N (\tilde{\alpha}_j \tilde{B}_n^j - \tilde{\alpha}_j^* \varepsilon \tilde{A}_n^j), \quad (7)$$

где A_n^j , B_n^j и $\tilde{A}_n^j$, $\tilde{B}_n^j$ – вторые компоненты соответствующих выражений

$$L^{-j} \begin{pmatrix} \varepsilon Q_n^* \\ Q_n \end{pmatrix}, \quad L^j \begin{pmatrix} \varepsilon Q_n^* \\ Q_n \end{pmatrix}, \quad L^{-j} \left[(2n+1) \begin{pmatrix} \varepsilon Q_n^* \\ Q_n \end{pmatrix} \right], \quad L^j \left[(2n+1) \begin{pmatrix} \varepsilon Q_n^* \\ Q_n \end{pmatrix} \right].$$

Пользуясь спектральным преобразованием, мы будем иметь дело с пространством коэффициентов отражения $\beta(z; t)$. Иерархии (7) преобразуются в линейные эволюции коэффициентов отражения:

$$\beta_t + \sum_{j=0}^N (\alpha_j z^{2j} - \alpha_j^* \varepsilon z^{-2j}) \beta = 0, \quad \beta_t + \sum_{j=0}^N (\tilde{\alpha}_j z^{2j} - \tilde{\alpha}_j^* \varepsilon z^{-2j}) z \beta_z = 0. \quad (8)$$

Коммутирующие потоки (симметрии), действующие в пространстве решений эволюционного уравнения, имеют аналоги в виде симметрий, действующих в пространстве коэффициентов отражения. Нас интересует ДНУШ (2), которое является изоспектральным уравнением для иерархий (7) при $N = 1$, $\alpha_0 = -i\gamma/h^2$ и $\alpha_1 = i\gamma/h^2$. Чтобы найти достаточное число его симметрий, запишем анзац для эволюции коэффициента отражения

$$\beta_s + \omega(z^2, t) \beta + (\gamma_0 - \gamma_0^* + \gamma_1 z^2 - \gamma_1^* z^{-2}) z \beta_z = 0.$$

Коммутируя эту эволюцию с соответствующей ДНУШ эволюцией (8), получаем

$$\omega = \frac{2it\gamma}{h^2} [(\gamma_0 - \gamma_0^*)(z^2 - z^{-2}) + \gamma_1(z^4 - 1) - \gamma_1^*(1 - z^{-4})] + \tilde{\omega}(z^2).$$

Эти симметрии можно записать как

$$(Q_n)_s = \frac{2it\gamma}{h^2} [-(\gamma_1 + \gamma_1^*)B_0 + (\gamma_0 - \gamma_0^*)(B_1 - A_1) + \gamma_1 B_2 + \gamma_1^* A_2] + \\ + (\gamma_0 - \gamma_0^*)\tilde{B}_0 + \gamma_1 \tilde{B}_1 - \gamma_1^* \tilde{A}_1 + \tilde{\omega}.$$

Таким образом, полагая $\tilde{\omega}(z^2) = \omega_0 + \omega_1 z^2 + \sigma_1 z^{-2} + \omega_2 z^4 + \sigma_2 z^{-4}$, получаем

$$(Q_n)_s = (\gamma_0 - \gamma_0^*) \left[\frac{2it\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) (Q_{n+1} - Q_{n-1}) + (2n+1) Q_n \right] + \\ + \gamma_1 \left\{ \frac{2it\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n+2} - \varepsilon (Q_{n+1}^* Q_{n+2} + Q_n^* Q_{n+1} + Q_{n-1}^* Q_n) Q_{n+1}] - \right. \\ \left. - \frac{2it\gamma}{h^2} Q_n + (2n+3) (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1} + 2\varepsilon Q_n S_n^* \right\} + \\ + \gamma_1^* \left\{ \frac{2it\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n-2} - \varepsilon (Q_{n-1}^* Q_{n-2} + Q_n^* Q_{n-1} + Q_{n+1}^* Q_n) Q_{n-1}] - \right. \\ \left. - \frac{2it\gamma}{h^2} Q_n - (2n-1) (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1} - 2\varepsilon Q_n S_n \right\} + \\ + \omega_0 Q_n + \omega_1 (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1} + \sigma_1 (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1} + \\ + \omega_2 (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n+2} - \varepsilon (Q_{n+1}^* Q_{n+2} + Q_n^* Q_{n+1} + Q_{n-1}^* Q_n) Q_{n+1}] + \\ + \sigma_2 (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n-2} - \varepsilon (Q_{n-1}^* Q_{n-2} + Q_n^* Q_{n-1} + Q_{n+1}^* Q_n) Q_{n-1}],$$

а также следующие симметрии в векторной форме:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= Q_n \partial_{Q_n} - Q_n^* \partial_{Q_n^*}, \quad X_2 = (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1} \partial_{Q_n} - (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1}^* \partial_{Q_n^*}, \\
 X_3 &= (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1} \partial_{Q_n} - (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1}^* \partial_{Q_n^*}, \\
 X_4 &= (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n+2} (1 - \varepsilon |Q_{n+1}|^2) - \varepsilon Q_{n+1} (Q_n^* Q_{n+1} + Q_{n-1}^* Q_n)] \partial_{Q_n} - \\
 &\quad - (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n-2}^* (1 - \varepsilon |Q_{n-1}|^2) - \varepsilon Q_{n-1}^* (Q_n^* Q_{n+1} + Q_{n-1}^* Q_n)] \partial_{Q_n^*}, \\
 X_5 &= (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n-2} (1 - \varepsilon |Q_{n-1}|^2) - \varepsilon Q_{n-1} (Q_n^* Q_{n-1} + Q_{n+1}^* Q_n)] \partial_{Q_n} - \\
 &\quad - (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n+2}^* (1 - \varepsilon |Q_{n+1}|^2) - \varepsilon Q_{n+1}^* (Q_n Q_{n+1}^* + Q_{n-1} Q_n^*)] \partial_{Q_n^*}, \\
 X_6 &= \left[-\frac{2t\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) (Q_{n+1} - Q_{n-1}) + (2n+1)iQ_n \right] \partial_{Q_n} + \\
 &\quad + \left[-\frac{2t\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) (Q_{n+1}^* - Q_{n-1}^*) - (2n+1)iQ_n^* \right] \partial_{Q_n^*}, \\
 X_7 &= \left\{ \frac{2it\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n+2} - \varepsilon (Q_{n+1}^* Q_{n+2} + Q_n^* Q_{n+1} + Q_{n-1}^* Q_n) Q_{n+1} + \right. \\
 &\quad + Q_{n-2} - \varepsilon (Q_{n-1}^* Q_{n-2} + Q_n^* Q_{n-1} + Q_{n+1}^* Q_n) Q_{n-1}] - \\
 &\quad - \frac{4it\gamma}{h^2} Q_n + (2n+3)(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1} + 2\varepsilon Q_n S_n^* - \\
 &\quad - (2n-1)(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1} - 2\varepsilon Q_n S_n \left. \right\} \partial_{Q_n} + \\
 &\quad + \left\{ -\frac{2it\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n-2}^* - \varepsilon (Q_{n-1} Q_{n-2}^* + Q_n Q_{n-1}^* + Q_{n+1} Q_n^*) Q_{n-1}^* + \right. \\
 &\quad + Q_{n+2}^* - \varepsilon (Q_{n+1} Q_{n+2}^* + Q_n Q_{n+1}^* + Q_{n-1} Q_n^*) Q_{n+1}^*] + \\
 &\quad + \frac{4it\gamma}{h^2} Q_n^* - (2n-1)(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1}^* - 2\varepsilon Q_n^* S_n^* + \\
 &\quad + (2n+3)(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1}^* + 2\varepsilon Q_n^* S_n \left. \right\} \partial_{Q_n^*}, \\
 X_8 &= \left\{ -\frac{2t\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n+2} - \varepsilon (Q_{n+1}^* Q_{n+2} + Q_n^* Q_{n+1} + Q_{n-1}^* Q_n) Q_{n+1} - \right. \\
 &\quad - Q_{n-2} + \varepsilon (Q_{n-1}^* Q_{n-2} + Q_n^* Q_{n-1} + Q_{n+1}^* Q_n) Q_{n-1}] + \\
 &\quad + (2n+3)i(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1} + 2i\varepsilon Q_n S_n^* + \\
 &\quad + (2n-1)i(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1} + 2i\varepsilon Q_n S_n \left. \right\} \partial_{Q_n} + \\
 &\quad + \left\{ \frac{2t\gamma}{h^2} (1 - \varepsilon |Q_n|^2) [Q_{n-2}^* - \varepsilon (Q_{n-1} Q_{n-2}^* + Q_n Q_{n-1}^* + Q_{n+1} Q_n^*) Q_{n-1}^* - \right. \\
 &\quad - Q_{n+2}^* + \varepsilon (Q_{n+1} Q_{n+2}^* + Q_n Q_{n+1}^* + Q_{n-1} Q_n^*) Q_{n+1}^*] - \\
 &\quad - (2n-1)i(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1}^* - 2i\varepsilon Q_n^* S_n^* - \\
 &\quad - (2n+3)i(1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n+1}^* - 2i\varepsilon Q_n^* S_n \left. \right\} \partial_{Q_n^*},
 \end{aligned}$$

где появляющаяся в симметриях X_7 и X_8 функция S_n определена как

$$S_n = \sum_{j=n}^{\infty} Q_j Q_{j+1}^*.$$

Если временная эволюция задается ДНУШ (2), можно охарактеризовать S_n как функцию, удовлетворяющую системе

$$S_{n+1} = S_n - Q_n Q_{n+1}^*,$$

$$\dot{S}_n = \frac{i\gamma}{h^2} [|Q_n|^2 - (1 - \varepsilon |Q_n|^2) Q_{n-1}^* Q_{n+1}].$$

Этим исчерпываются все симметрии ДНУШ, используемые в данной статье. Заметим, что точечными симметриями являются только X_1 , X_2 , X_3 и X_6 , тогда как X_4 и X_5 — обобщенные симметрии, а X_7 и X_8 — в высокой степени нелокальные симметрии.

Явно вычисленные коммутаторы симметрий представлены в табл. 1, где символ $\gg$ обозначает симметрии высших порядков, которые не потребуются нам в дальнейших рассуждениях.

Таблица 1

	X_6	X_7	X_8
X_2	$-2iX_2$	$-2X_4 + 2X_1$	$-2iX_4 - 2iX_1$
X_3	$2iX_3$	$-2X_5 + 2X_1$	$2iX_5 + 2iX_1$
X_4	$-4iX_4$	$\gg$	$\gg$
X_5	$4iX_5$	$\gg$	$\gg$
X_6	0	$2X_8$	$-2X_7$
X_7	$-2X_8$	0	

Для вычисления коммутатора $[X_7, X_8]$ следует ввести дополнительные “нелокальности” (помимо S_n), нами здесь не рассматриваемые, так как получающаяся симметрия не существенна в нашем исследовании.

Подалгебра, порожденная X_1 , X_2 , X_3 , X_4 и X_5 , является абелевой, и множество точечных симметрий является подалгеброй.

4. НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРЕДЕЛ

Непрерывный предел

$$Q = hu, \quad x = nh$$

преобразует ДНУШ (2) в НУШ (3) с точностью до второго порядка,

$$iu_t + \gamma u_{xx} - 2\varepsilon \gamma |u|^2 u = O(h^2).$$

Мы будем изучать соотношение между симметриями уравнения (2) и симметриями его непрерывного предела (3), особенно интересуясь нахождением прообразов точечных

симметрий НУШ в алгебре симметрий уравнения (2). Нам потребуются следующие симметрии НУШ:

$$\begin{aligned}
 y_1 &\equiv u\partial_u - u^*\partial_{u^*}, & y_2 &\equiv u_x\partial_u + u_x^*\partial_{u^*}, & y_3 &\equiv u_t\partial_u + u_t^*\partial_{u^*}, \\
 y_4 &\equiv (u_{xxx} - \varepsilon|u|^2u_x)\partial_u + (u_{xxx}^* - \varepsilon|u|^2u_x^*)\partial_{u^*}, \\
 y_5 &\equiv (u_{xxxx} - 8\varepsilon|u|^2u_{xx} - 2\varepsilon u^2u_{xx}^* - 4\varepsilon u|u_x|^2 - 6\varepsilon u^*u_x^2 + 6|u|^4u)\partial_u - \\
 &\quad - (u_{xxxx}^* - 8\varepsilon|u|^2u_{xx}^* - 2\varepsilon u^{*2}u_{xx} - 4\varepsilon u^*|u_x|^2 - 6\varepsilon uu_x^{*2} + 6|u|^4u^*)\partial_{u^*}, \\
 y_6 &\equiv (ixu - 2\gamma tu_x)\partial_u - (ixu^* + 2\gamma tu_x^*)\partial_{u^*}, \\
 y_7 &\equiv (u + 2tu_t + xu_x)\partial_u + (u^* + 2tu_t^* + xu_x^*)\partial_{u^*}, \\
 y_8 &\equiv \left[-2\gamma^2 t(u_{xxx} - 6\varepsilon|u|^2u_x) + xu_t + 2i\gamma u_x - 2i\gamma\varepsilon u \int |u|^2 dx \right] \partial_u + \\
 &\quad + \left[-2\gamma^2 t(u_{xxx}^* - 6\varepsilon|u|^2u_x^*) + xu_t^* - 2i\gamma u_x^* + 2i\gamma\varepsilon u^* \int |u|^2 dx \right] \partial_{u^*}.
 \end{aligned}$$

Векторные поля y_1, y_2, y_3, y_6 и y_7 порождают подалгебру точечных симметрий, y_4 и y_5 являются обобщенными симметриями, а y_8 — нелокальными обобщенными симметриями, возникающими в нашем анализе. Замечательно, что подалгебра точечных симметрий НУШ пятимерна, тогда как подалгебра точечных симметрий ДНУШ (2) четырехмерна. Одна независимая точечная симметрия НУШ должна воспроизводиться из непрерывного предела некоторой обобщенной симметрии уравнения (2).

Непрерывный предел вспомогательной функции равен

$$S \rightarrow -h \int |u|^2 dx + h^2 \int (u_x u^* - u u_x^*) dx + O(h^3).$$

Поэтому пределы подходящих комбинаций симметрий (т.е. таких, что их непрерывный предел дает обсуждавшееся выше независимое множество лиевских симметрий НУШ) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_1 &\equiv X_1 \rightarrow y_1, & \bar{y}_2 &\equiv \frac{X_2 - X_1}{h} \rightarrow y_2 + O(h), \\
 \bar{y}_3 &\equiv \frac{i\gamma}{h^2}(X_3 - 2X_1 + X_2) \rightarrow y_3 + O(h^2), & \bar{y}_4 &\equiv \frac{X_4 + 3X_1 - 3X_2 - X_3}{h^3} \rightarrow y_4 + O(h), \\
 \bar{y}_5 &\equiv \frac{X_5 + 6X_1 - 4X_2 - 4X_3 + X_4}{h^4} \rightarrow y_5 + O(h), \\
 \bar{y}_6 &\equiv h \frac{X_6 - iX_1}{2} \rightarrow y_6 + O(h^2), & \bar{y}_7 &\equiv \frac{X_7}{4} \rightarrow y_7 + O(h), \\
 \bar{y}_8 &\equiv \frac{\gamma}{2h}(X_8 - 2X_6 - 2iX_3 - 2iX_2 + 4iX_1) \rightarrow y_8 + O(h).
 \end{aligned}$$

Все точечные симметрии ДНУШ в непрерывном пределе дают точечные симметрии НУШ. Но имеется одна дополнительная независимая точечная симметрия НУШ (y_7), которая должна получаться из неточечных симметрий (X_7) ДНУШ. Таким образом, происходит сжатие алгебры Ли симметрий ДНУШ.

В табл. 2 приведены коммутаторы для симметрий уравнения (2).

Таблица 2

	$\bar{y}_6$	$\bar{y}_7$	$\bar{y}_8$
$\bar{y}_2$	$-i\bar{y}_1 - h i \bar{y}_2$	$-\bar{y}_2 + \frac{hi}{2\gamma} \bar{y}_3 - \frac{h^2}{2} \bar{y}_4$	$-\bar{y}_3 - h i \gamma \bar{y}_4$
$\bar{y}_3$	$2\gamma \bar{y}_2 + h i \bar{y}_3$	$-2\bar{y}_3 - \frac{h^2}{2} i \gamma \bar{y}_5$	$2\gamma^2 \bar{y}_4 - h \gamma^2 \bar{y}_5$
$\bar{y}_4$	$-\frac{3}{\gamma} \bar{y}_3 - 2h i \bar{y}_4$	$\gg$	$\gg$
$\bar{y}_5$	$-4i \bar{y}_4 + 2h i \bar{y}_5$	$\gg$	$\gg$
$\bar{y}_6$	0	$\bar{y}_6 + \frac{h}{2} i \bar{y}_1 + \frac{h^2}{2\gamma} \bar{y}_8 - \frac{h^3}{2\gamma} \bar{y}_3$	$-2\gamma \bar{y}_7 + 2h \gamma \bar{y}_2 + h^2 i \bar{y}_3$
$\bar{y}_7$	$-\bar{y}_6, \bar{y}_7$	0	

Таблица 3

	y_6	y_7	y_8
y_2	$-i y_1$	$-y_2$	$-y_3$
y_3	$2\gamma y_2$	$-2y_3$	$2\gamma^2 y_4$
y_4	$-3/\gamma y_3$	$-3y_4$	$-3i \gamma y_5$
y_5	$-4i y_4$	$-4y_5$	$\gg$
y_6	0	y_6	$-2\gamma y_7$
y_7	$-y_6$	0	y_8

Из табл. 3, в которой представлены коммутаторы симметрий НУШ, можно видеть, как векторные поля y_1, y_2, y_3, y_6 и y_7 порождают подалгебру точечных симметрий уравнения (3), которая является образом порожденного элементами $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_6$ и $\bar{y}_7$ множества при сжатии. Множество, порожденное элементами $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_6$ и $\bar{y}_7$, содержит подалгебру точечных алгебр уравнения (2), но само не является алгеброй.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим несколько общих выводов нашего исследования. Как уже отмечалось, если мы изучаем симметрии разностных уравнений на фиксированной и непреобразуемой решетке и хотим получить все симметрии, существующие в непрерывном пределе, то следует рассматривать обобщенные симметрии наряду с точечными. Линейные средства теории интегрируемых систем позволяют получить алгебру Ли симметрий рассматриваемого дискретного интегрируемого уравнения. Эта алгебра включает очень малую подалгебру точечных преобразований. В непрерывном пределе, при стремлении шагового параметра h к нулю, структура алгебры Ли меняется. После сжатия $h \rightarrow 0$ эта алгебра по-прежнему является бесконечномерной и по-прежнему включает

как обобщенные, так и точечные симметрии. Однако множество элементов алгебры симметрий дискретного уравнения, включающее как точечные, так и обобщенные симметрии, сжимается в чисто точечные симметрии соответствующего дифференциального уравнения. Происходят сжатия бесконечномерных алгебр Ли.

Возникает вопрос о том, как найти и использовать симметрии неинтегрируемых разностных уравнений, у которых нет линейной системы. Одна из возможностей состоит в том, чтобы отказаться от идеи фиксированных решеток, т.е. изучать группы преобразований, действующих одновременно на уравнения и на решетку. Например, дилатации координат изменяют масштаб решетки. Такой подход был использован Дородницким с соавторами [14], [15].

Другим подходом является предложенный ранее *метод дифференциальных уравнений* [4]. Дифференциально-разностное уравнение рассматривается как бесконечный набор дифференциальных уравнений и ищутся точечные симметрии этой бесконечной системы. Таким образом, получаются некоторые, хотя и не обязательно все, обобщенные симметрии изучаемого дифференциально-разностного уравнения. Проблема состоит в том, что часто трудно решить соответствующий бесконечный набор определяющих уравнений.

Наконец, упомянем *внутренний метод* [4], который наиболее прост и дает точечные симметрии дискретного уравнения (на фиксированной решетке).

Благодарности. Работа была частично поддержана DGCYT (грант PB98-0821), НАТО (грант 0717/96) и Universidad Complutense/del Amo Foundation, а также (П. В.) NSERC of Canada и FCAR du Québec.

Список литературы

- [1] S. C. Chiu, J. F. Ladik. J. Math. Phys. 1977. V. 18. P. 690–700.
- [2] R. H. Hernández Heredero, D. Levi, M. A. Rodríguez, P. Winternitz. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 5025–5040.
- [3] D. Levi, M. A. Rodríguez. J. Phys. A. 1992. V. 25. P. L975–L979.
- [4] D. Levi, P. Winternitz. Phys. Lett. A. 1991. V. 152. P. 335–338; J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 3713–3730.
- [5] S. Maeda. IMA J. Appl. Math. 1987. V. 38. P. 129–134; Math. Japonica. 1980. V. 25. P. 405–420.
- [6] G. R. W. Quispel, H. W. Capel, R. Sahadevan. Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 379–383.
- [7] R. Floreanini, L. Vinet. J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 7024–7042.
- [8] R. H. Hernández Heredero, D. Levi, P. Winternitz. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 2685–2695.
- [9] D. Levi, L. Vinet, P. Winternitz. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 633–649.
- [10] E. Inönü, E. P. Wigner. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. V. 39. P. 510–524.
- [11] A. A. Izmet'sev, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian, P. Winternitz. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 1549–1573.
- [12] R. V. Moody, J. Patera. J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 2227–2258.
- [13] J. Patera, G. S. Pogosyan, P. Winternitz. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 805–826.
- [14] В. А. Дородницкий. Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 6. С. 678–682.
- [15] V. A. Dorodnitsyn, R. Kozlov, P. Winternitz. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 480–504.