Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Ху, Д. Л. Вонг, Х. Там, Интегрируемые обобщения решетки Блажака–Марсиньяка и еще одной решетки и соответствующие им пары Лакса, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 388–393

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:05:48

© 2001 г. С. Б. Ху*, Д. Л. Вонг*, Х. В. Там†
**ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОБОБЩЕНИЯ РЕШЕТКИ
БЛАЖАКА–МАРСИНЬЯКА И ЕЩЕ ОДНОЙ РЕШЕТКИ
И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ ПАРЫ ЛАКСА**

Представлены две новые решетки, одна из которых является обобщением решетки Блажака–Марсиньяка, другая – обобщением решетки Ву и Ху. На основе билинейного преобразования Бэклунда, отвечающего этим решеткам, для них получены пары Лакса.

Важнейшей задачей в теории солитонов является поиск как можно большего числа интегрируемых систем. Одно из эффективных направлений такого поиска – нахождение интегрируемых обобщений известных интегрируемых систем. В настоящей работе рассматриваются интегрируемые обобщения решетки Блажака–Марсиньяка [1]

$$\begin{aligned}a_z(n) &= c(n+1) - c(n-1), \\b_z(n) &= a(n-1)c(n-1) - a(n)c(n), \\c_z(n) &= c(n)(b(n) - b(n+1))\end{aligned}\tag{1}$$

и решетки, предложенной в работе [2],

$$\begin{aligned}u_{ttt}(n+1) + u_{ttt}(n) + 2(u_t(n+1) - u_t(n))(u_{tt}(n+1) - u_{tt}(n)) = \\= e^{u(n+2)-2u(n+1)+u(n)} - e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}.\end{aligned}\tag{2}$$

Заменами зависимых переменных

$$\begin{aligned}u(n) &= \ln f(n), \quad a(n) = \frac{1}{2} \frac{D_z^2 f(n+1) \bullet f(n+1)}{f(n+2)f(n)}, \\b(n) &= \left(\ln \frac{f(n)}{f(n+1)} \right)_z, \quad c(n) = \frac{f(n+2)f(n)}{f^2(n+1)}\end{aligned}$$

*State Key Laboratory of Scientific and Engineering Computing, Institute of Computational Mathematics and Scientific Engineering Computing, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Academia Sinica, P. O. Box 2719, Beijing 100080, P. R. China

†Department of Computer Science, Hong Kong Baptist University, Kowloon Tong, Hong Kong, P. R. China

обе решетки (1) и (2) приводятся к одной и той же системе билинейных уравнений

$$\begin{aligned} (D_z e^{\frac{D_n}{2}} - D_t^2 e^{\frac{D_n}{2}}) f(n) \bullet f(n) &= 0, \\ \left(D_z D_t - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{D_n}{2} \right) f(n) \bullet f(n) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где билинейные операторы определяются согласно [3]–[6]:

$$\begin{aligned} D_z^m D_t^k a \bullet b &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^k a(z, t) b(z', t') \Big|_{z'=z, t'=t}, \\ e^{\delta D_n} a(n) \bullet b(n) &\equiv \exp \left[\delta \left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n'} \right) \right] a(n) b(n') \Big|_{n'=n} = a(n + \delta) b(n - \delta). \end{aligned}$$

Метод Хироты был недавно использован для нахождения новых интегрируемых уравнений путем проверки их на то, допускают ли они билинейные преобразования Бэклунда. Чтобы найти интегрируемые обобщения решеток (1) и (2), мы сначала рассмотрим интегрируемые обобщения билинейной системы (3), проверяя их на билинейные преобразования Бэклунда. Оказывается, что система (3) допускает следующее обобщение:

$$\begin{aligned} \left(D_z e^{\frac{D_n}{2}} - D_t^2 e^{\frac{D_n}{2}} + \frac{1}{2} \alpha^2 (e^{\frac{3D_n}{2}} - e^{\frac{D_n}{2}}) \right) f(n) \bullet f(n) &= 0, \\ \left(D_z D_t + \alpha D_z \operatorname{sh} D_n - 4 \operatorname{sh}^2 \frac{D_n}{2} \right) f(n) \bullet f(n) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где α – некоторая постоянная, а соответствующее преобразование Бэклунда имеет вид

$$\begin{aligned} \left(D_t + \lambda^{-1} e^{-D_n} - \frac{\alpha^2}{4} \lambda e^{D_n} + \mu \right) f(n) \bullet g(n) &= 0, \\ \left(D_z e^{-\frac{D_n}{2}} + \frac{\alpha \lambda}{2} D_z e^{\frac{D_n}{2}} - \left(\lambda - \frac{\alpha \lambda \gamma}{2} \right) e^{\frac{D_n}{2}} + \gamma e^{-\frac{D_n}{2}} \right) f(n) \bullet g(n) &= 0, \\ \left(D_z - \lambda^{-1} D_t e^{-D_n} - \frac{\alpha^2 \lambda}{4} D_t e^{D_n} - \lambda^{-1} \mu e^{-D_n} - \frac{\alpha^2 \lambda \mu}{4} e^{D_n} - \omega \right) f(n) \bullet g(n) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda, \mu, \gamma, \omega$ – произвольные постоянные. Теперь исходя из системы (4) построим обобщение систем (1) и (2). Для этого положим

$$u(n) = \ln f(n), \quad v(n) = \frac{f_t(n)}{f(n)}.$$

Тогда из формул (4) получим

$$\begin{aligned} v_z(n) &= e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)} - 1 - \frac{\alpha}{2} (u_z(n+1) - u_z(n-1)) e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}, \\ (v(n+1) - v(n-1)) \left[1 - \frac{\alpha}{2} (u_z(n+1) - u_z(n-1)) \right] e^{u(n+1)+u(n-1)-2u(n)} &= \\ &= u_{zz}(n) + \frac{\alpha}{2} (e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)} + e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - 2) - \\ &- \frac{\alpha^2}{4} e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} (u_z(n+2) - u_z(n)) - \\ &- \frac{\alpha^2}{4} e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)} (u_z(n) - u_z(n-2)). \end{aligned} \quad (6)$$

Это новая система уравнений. В частности, при $\alpha = 0$ уравнения (6) принимают вид

$$u_{zzz}(n) = e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)} + \\ + u_{zz}(n)(u_z(n+1) + u_z(n-1) - 2u_z(n)),$$

что есть в точности решетка Блажака–Марсиньяка (1) при

$$a(n) = e^{2u(n+1)-u(n+2)-u(n)} u_{zz}(n+1), \\ b(n) = (u(n) - u(n+1))_z, \\ c(n) = e^{u(n+2)+u(n)-2u(n+1)}.$$

Таким образом, система (6) есть обобщенная версия решетки Блажака–Марсиньяка.

С другой стороны, если положить $u(n) = \ln f(n)$ и $v(n) = f_z(n)/f(n)$, то система (2) принимает вид

$$v(n+1) - v(n) - [u_{tt}(n+1) + u_{tt}(n) + (u_t(n+1) - u_t(n))^2] + \\ + \frac{\alpha^2}{2}(e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - 1) = 0, \\ v_t(n) + \frac{1}{2}\alpha(v(n+1) - v(n-1))e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)} - e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)} + 1 = 0. \quad (7)$$

Это еще одна новая решетка. При $\alpha = 0$ уравнения (7) переходят в (2). Таким образом, система (7) есть обобщение системы (4).

Ниже мы покажем, что системы (6) и (7) интегрируемы в том смысле, что для них существуют пары Лакса. Известно, что билинейное преобразование Бэклунда позволяет получить соответствующую пару Лакса. Проиллюстрируем это на примере следующего дифференциально-разностного уравнения [7]:

$$u_{tt}(n+1) + u_{tt}(n) + u_{tt}(n-1) - 3u(n)(u_t(n+1) + u_t(n-1)) + \\ + 3u(n+1)u_t(n+1) + 3u(n-1)u_t(n-1) - \frac{1}{4}u(n+1) - \frac{1}{4}u(n-1) + \\ + \frac{1}{2}u(n) + [u(n+1) - 2u(n) + u(n-1)][(u(n+1) - u(n-1))^2 - \\ - (u(n+1) - u(n))(u(n) - u(n-1))] = 0. \quad (8)$$

В работе [7] преобразованием зависимой переменной $u(n) = (\ln f(n))_t$ уравнение (8) приводится к системе билинейных уравнений

$$(D_z e^{\frac{D_n}{2}} - D_t^2 e^{\frac{D_n}{2}})f(n) \bullet f(n) = 0, \\ (D_t^3 e^{\frac{D_n}{2}} + 3D_t D_z e^{\frac{D_n}{2}} - D_t e^{\frac{D_n}{2}})f(n) \bullet f(n) = 0. \quad (9)$$

Отвечающее уравнениям (9) преобразование Бэклунда имеет вид

$$(D_t + \lambda^{-1}e^{-D_n} + \mu)f(n) \bullet g(n) = 0, \quad (10)$$

$$D_z f(n) \bullet g(n) = [\lambda^{-1}D_t e^{-D_n} + \lambda^{-1}\mu e^{-D_n} + \gamma]f(n) \bullet g(n), \quad (11)$$

$$(D_t^3 + 3\mu D_t^2 - 3\lambda^{-1} D_t^2 e^{-D_n} - 6\lambda^{-1} \mu D_t e^{-D_n} - 6\lambda^{-1} \mu^2 e^{-D_n} - D_t + \omega) f(n) \bullet g(n) = 0, \quad (12)$$

где $\lambda, \mu, \gamma, \omega$ — произвольные постоянные.

Чтобы получить пару Лакса для уравнения (8), положим в (10)–(12)

$$u(n) = (\ln g(n))_t, \quad f(n) = g(n+1)\psi_n. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (10) и (12), получим

$$\psi_{n,t} + (u(n+1) - u(n) + \mu)\psi_n + \lambda^{-1}\psi_{n-1} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \psi_{n,ttt} + 3(u(n+1) - u(n) + \mu)\psi_{n,tt} - 3\lambda^{-1}\psi_{n-1,tt} + \\ & + 3 \left[(u(n+1) + u(n))_t + (u(n+1) - u(n))^2 + 2\mu(u(n+1) - u(n)) - \frac{1}{3} \right] \psi_{n,t} + \\ & + 6\lambda^{-1}(u(n+1) - u(n) - \mu)\psi_{n-1,t} + [(u(n+1) - u(n))_{tt} + \\ & + 3(u(n+1) - u(n))(u_t(n+1) + u_t(n)) + (u(n+1) - u(n))^3 + \\ & + 3\mu(u_t(n+1) + u_t(n) + (u(n+1) - u(n))^2) - (u(n+1) - u(n)) + \omega] \psi_n - \\ & - 3\lambda^{-1}[(u(n+1) + u(n))_t + (u(n+1) - u(n))^2 - \\ & - 2\mu(u(n+1) - u(n)) + 2\mu^2] \psi_{n-1} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) получаем

$$\begin{aligned} & (\mu + 2\mu^3 + \omega)\psi_n - \lambda^{-1}\psi_{n-1}[-1 + 4u^2(n-1) - 4u(n-1)u(n) + \\ & + 4u^2(n) - 4u(n-1)u(n+1) - 4u(n)u(n+1) + 4u^2(n+1) + 4u_t(n-1) + \\ & + 4u_t(n) + 4u_t(n+1)] + 4\lambda^{-2}(u(n-2) - u(n+1))\psi_{n-2} - 4\lambda^{-3}\psi_{n-3} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения (14) и (16) составляют пару Лакса для уравнения (8), что можно проверить непосредственно, используя программу Mathematica [8].

Получим теперь пары Лакса для новых решеток (6) и (7). Чтобы получить пару Лакса для решетки (6), положим $f(n) = \psi_n g(n)$ и $u(n) = \ln g(n)$. После некоторых вычислений согласно вышеописанной процедуре из билинейного преобразования Бэклунда (5) можно получить следующую пару Лакса для решетки (6):

$$\begin{aligned} & \psi_{n,z} + A_1\psi_{n-2} + A_2\psi_{n-1} + A_3\psi_n + A_4\psi_{n+1} + A_5\psi_{n+2} = 0, \\ & B_1\psi_{n-2} + B_2\psi_{n-1} + B_3\psi_n + B_4\psi_{n+1} + B_5\psi_{n+2} + B_6\psi_{n+3} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda^{-2} e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)}, \\ A_2 &= \lambda^{-1} (v(n+1) - v(n-1)) e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}, \\ A_3 &= -\frac{\alpha^2}{4} e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)} - \omega + \frac{\alpha^2}{4} e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)}, \\ A_4 &= -\frac{\alpha^2}{4} \lambda (v(n+1) - v(n-1)) e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 &= -\frac{\alpha^4}{16}\lambda^2 e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)}, \\
B_1 &= \lambda^{-2}e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)}, \\
B_2 &= \frac{\alpha}{2\lambda}e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} + \lambda^{-1}e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}(v(n+1) - v(n-1)), \\
B_3 &= -\gamma + u_z(n+1) - u_z(n) - \frac{\alpha^2}{4}e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)} - \omega + \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{4}e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} + \frac{\alpha}{2}(v(n+2) - v(n))e^{u(n+2)-2u(n+1)+u(n)}, \\
B_4 &= \lambda - \frac{1}{2}\alpha\lambda\gamma - \frac{1}{2}\alpha\lambda(u_z(n+1) - u_z(n)) - \\
&\quad - \frac{1}{4}\alpha^2\lambda(v(n+1) - v(n-1))e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha\lambda\left[-\frac{1}{4}\alpha^2e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - \omega + \frac{1}{4}\alpha^2e^{u(n+3)-u(n+2)-u(n+1)+u(n)}\right], \\
B_5 &= -\frac{\alpha^4}{16}\lambda^2 e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - \frac{1}{8}\alpha^3\lambda^2(v(n+2) - v(n))e^{u(n+2)-2u(n+1)+u(n)}, \\
B_6 &= -\frac{\alpha^5}{32}\lambda^3 e^{u(n+3)-u(n+2)-u(n+1)+u(n)}.
\end{aligned}$$

Используя программу Mathematica, можно показать, что условием совместности этих уравнений является решетка (6).

Наконец, полагая $\psi_n = f(n)/g(n)$ и $u(n) = \ln g(n)$, из билинейного преобразования Бэклунда (5) после некоторых вычислений можно получить следующую пару Лакса для решетки (7):

$$\begin{aligned}
\psi_{n,t} + A_1\psi_{n-1} + A_2\psi_{n+1} + \mu\psi_n &= 0, \\
B_1\psi_{n-2} + B_2\psi_{n-1} + B_3\psi_n + B_4\psi_{n+1} + B_5\psi_{n+2} + B_6\psi_{n+3} &= 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \lambda^{-1}e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}, \\
A_2 &= -\frac{1}{4}\alpha^2\lambda e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}, \\
B_1 &= \lambda^{-2}e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)}, \\
B_2 &= \frac{1}{2}\alpha\lambda^{-1}e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} + \\
&\quad + \lambda^{-1}e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)}(u_t(n+1) - u_t(n-1)), \\
B_3 &= -\gamma + u_{tt}(n+1) + u_{tt}(n) + (u_t(n+1) - u_t(n))^2 - \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{2}(e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - 1) - \\
&\quad - \frac{1}{4}\alpha^2e^{u(n+1)-u(n)-u(n-1)+u(n-2)} - \omega + \frac{1}{4}\alpha^2e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha(u_t(n+2) - u_t(n))e^{u(n+2)-2u(n+1)+u(n)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= \lambda - \frac{1}{2}\alpha\lambda\gamma - \frac{1}{2}\alpha\lambda \left[u_{tt}(n+1) + 2u_{tt}(n) + u_{tt}(n) + (u_t(n+1) - u_t(n))^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\alpha^2(e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - 1) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4}\alpha^2\lambda(u_t(n+1) - u_t(n-1))e^{u(n+1)-2u(n)+u(n-1)} + \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha\lambda \left[-\frac{1}{4}\alpha^2e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - \omega + \frac{1}{4}\alpha^2e^{u(n+3)-u(n+2)-u(n+1)+u(n)} \right], \\
B_5 &= -\frac{\alpha^4}{16}\lambda^2e^{u(n+2)-u(n+1)-u(n)+u(n-1)} - \\
&\quad - \frac{1}{8}\alpha^3\lambda^2e^{u(n+2)-2u(n+1)+u(n)}(u_t(n+2) - u_t(n)), \\
B_6 &= -\frac{\alpha^5}{32}\lambda^3e^{u(n+3)-u(n+2)-u(n+1)+u(n)}.
\end{aligned}$$

Используя программу Mathematica, можно проверить, что уравнения (17) действительно составляют пару Лакса для решетки (7).

Итак, мы построили две новые решетки: одна является обобщением решетки Блажака–Марсиньяка, другая – обобщением решетки, предложенной в [2]. На основе билинейных преобразований Бэклунда, отвечающих обеим решеткам, для них были найдены пары Лакса.

Благодарности. Один из авторов (Кс. Б. Х.) благодарит организаторов рабочего совещания за приглашение на NEEDS 2000 и финансовую поддержку.

Работа была поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (National Natural Science Foundation of China) (проект № 19871082), Главным китайским государственным проектом фундаментальных исследований (the China State Major Key Project for Basic Researches), Китайской академией наук (Chinese Academy of Sciences) и Баптистским университетом Гонконга (the Hong Kong Baptist University) (гранты № FRG/97-98/II-100 и FRG/99-00/II-66).

Список литературы

- [1] *M. Blaszkak, K. Marciniak.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 4661.
- [2] *Y. T. Wu, X. B. Hu.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 1515.
- [3] *R. Hirota.* Direct methods in soliton theory. In: Solitons. Eds. R. K. Bullough, P. J. Caudrey. Berlin: Springer, 1980. P. 157.
- [4] *R. Hirota, J. Satsuma.* Prog. Theor. Phys. Suppl. 1976. V. 59. P. 64.
- [5] *Y. Matsuno.* Bilinear Transformation Method. New York: Acad. Press, 1984.
- [6] *J. J. C. Nimmo.* Hirota's method. In: Soliton Theory: A Survey of Results. Ed. A. P. Fordy. Manchester: Manchester Univ. Press, 1990. P. 75.
- [7] *X. B. Hu, Y. T. Wu.* Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P. 523.
- [8] *S. Wolfram.* The Mathematica Book. 4th ed. for Mathematica 4.0. Cambridge: Cambridge University Press & Wolfram Media, 1999.