Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Возмущение решений с подвижными особыми точками, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 401–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf468>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:17:16

ВОЗМУЩЕНИЕ РЕШЕНИЙ С ПОДВИЖНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Исследована задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром в случае, когда точное решение имеет степенную особенность и точка сингулярности зависит от малого параметра. Предложен способ асимптотической локализации особой точки с любым порядком точности, похожий на метод Крылова – Боголюбова. Вне особой точки построено асимптотическое разложение решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром

$$U'' + A(U, U', t) = \varepsilon B(U, U', t), \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1)$$

$$U|_{t=0} = u_0, \quad U'|_{t=0} = v_0 \quad (2)$$

в случае, когда точное решение имеет степенную особенность $U(t; \varepsilon) = \mathcal{O}(|T - t|^{-\nu})$ при $t \rightarrow T < \infty$ ($\nu = \text{const} > 0$).

В теории возмущений, как правило, не исследуются задачи, решения которых содержат сингулярности. Широко распространенные термины “сингулярные” и “бисингулярные” возмущения [1]–[4] имеют отношение к особенностям коэффициентов асимптотики, но не к особенностям точных решений. В данной работе рассматривается ситуация, когда сингулярности имеются в точных решениях как возмущенной, так и невозмущенной задач. Подобные постановки обсуждаются не часто и обычно связываются с уравнениями в частных производных [5], [6]. Между тем наличие сингулярностей в решениях является характерной чертой многих нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, известные уравнения Пенлеве имеют богатые двухпараметрические наборы решений, одним из параметров которых является (подвижный) полюс [7]. Наличие полюсов в них обусловлено степенными нелинейностями. Мы рассматриваем несколько более общие уравнения (1) с гладкими функциями $A(u, v, t)$, $B(u, v, t)$, которые

*Институт математики, Уфа, Россия. E-mail: klen@imat.rb.ru

имеют степенное асимптотическое разложение на бесконечности при $|u| + |v| \rightarrow \infty$. При этом в общей ситуации решения имеют сингулярности, отличные от полюсов. Следует подчеркнуть, что задача рассматривается на действительной оси $t \in \mathbb{R}$, аналитическая структура решения в окрестности особых точек не выясняется и сходимость рядов не используется. В обсуждаемой задаче мы обходимся асимптотическими разложениями.

В качестве иллюстрации приведем пример возмущения уравнения Риккати, простейшего из уравнений, которые имеют сингулярные решения: $U' = U^2 + \varepsilon B(U)$. Не возмущенное решение с начальным условием $U|_{t=0} = 1$ имеет полюс первого порядка $U(t; 0) = (1 - t)^{-1}$. Свойства возмущенного решения $U(t; \varepsilon)$ зависят от структуры возмущения. Например, в случае $B(u) = -u^4$ возмущенное решение не имеет сингулярностей. Если $B(u) = u^4$, то возмущенное решение имеет особую точку второго порядка:

$$U(t; \varepsilon) = (3\varepsilon(T_\varepsilon - t))^{-\frac{1}{3}} + \mathcal{O}((T_\varepsilon - t)^{\frac{1}{3}}), \quad t \rightarrow T_\varepsilon = 1 - \frac{\sqrt{\varepsilon}\pi}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Наконец, при $B(u) = u$ возмущенное решение

$$U = \varepsilon [\exp(-\varepsilon t) - 1 + \varepsilon \exp(-\varepsilon t)]^{-1} \quad (3)$$

имеет полюс первого порядка в точке $T_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \ln(1 + \varepsilon) = 1 - \varepsilon/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Нетрудно убедиться, что таким свойством обладает решение при любом возмущении, которое на бесконечности имеет асимптотику в виде полинома второй степени $B(u) = b_2 u^2 + b_1 u + b_0 + \mathcal{O}(u^{-1})$, $|u| \rightarrow \infty$. Задачи с такого типа возмущениями будут рассмотрены ниже для уравнений второго порядка. При изложении будем ориентироваться на примеры двух уравнений. Первое из них $U'' - (U')^2/U - U^3 = 0$ представляет собой редукцию известного уравнения Лиувилля [8], [9] $u_{tt} - u_{xx} - \exp u = 0$ и замечательно тем, что интегрируется в элементарных функциях: $U(t; T, E) = E / \sin(E(T - t)) \quad \forall E, T = \text{const}$. Второй пример – первое уравнение Пенлеве $U'' - 6U^2 + t = 0$, его решение представляет собой новую специальную функцию. Общим для обоих примеров является наличие двухпараметрических решений с подвижными полюсами.

2. ИСХОДНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В общем случае рассматриваются уравнения с решениями, которые имеют особые точки алгебраического типа $U(t; T, E) = \mathcal{O}(|T - t|^{-\nu})$ с рациональным показателем $\nu = p/q$, где $p, q \in \mathbb{Z}$. Введем подходящие классы функций для описания таких решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через $\mathcal{C}_\lambda^\infty = \mathcal{C}_\lambda^\infty(\Omega)$ будем обозначать линейное пространство функций трех переменных $U(t; T, E)$, которые определены на множестве $\Omega = \{0 \leq t < T, (T, E) \in \Pi\}$, бесконечно дифференцируемы по t , непрерывны по T, E и имеют асимптотическое разложение

$$U(t; T, E) = (T - t)^{-\lambda} U_{-\lambda}(T, E) + \sum_{\mu} (T - t)^{\mu} U_{\mu}(\ln |T - t|; T, E), \quad t \rightarrow T. \quad (4)$$

Счетный набор показателей $\mu \in (-\lambda, \infty)$ упорядочен и неограниченно возрастает: $\mu \rightarrow \infty$. В коэффициентах асимптотики допускается полиномиальная зависимость от логарифмов

$$U_\mu(z; T, E) = \sum_{i=0}^{\kappa} z^i U_{\mu,i}(T, E), \quad \kappa = \kappa(\mu) < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Все асимптотики считаются равномерными по $(T, E) \in \Pi$. Множество параметров Π представляет собой замыкание ограниченной области из $\mathbb{R}^2$. Степени полиномов $\kappa(\mu)$ могут быть различными для разных функций. Для решений нелинейных уравнений вида (1) показатели μ представляют собой целочисленные комбинации $\mu = m\nu + nr + k$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$, пары так называемых резонансных индексов ν, r .

Исходные ограничения большей частью формулируются в терминах решения невозмущенного уравнения.

1. Предполагается, что невозмущенное уравнение $U'' + A(U, U', t) = 0$ имеет двухпараметрическое семейство решений $U = \overset{0}{U}(t; T, E)$ из класса C_ν^∞ с подвижной особой точкой T степени ν и со значениями параметров из области $(T, E) \in \Pi$. Решение невозмущенной задачи, фиксированное начальными данными (2), входит в такое семейство, и ему соответствуют параметры $(T_0, E_0) \in \Pi \setminus \partial\Pi$.

2. Вблизи особой точки имеет место асимптотическое разложение вида (4) с постоянным главным коэффициентом, который без ограничения общности можно считать положительным: $\overset{0}{U}_{-\nu} = \text{const} > 0$. Функция $\overset{0}{U}(t; T, E)$ и ее асимптотика считаются дважды непрерывно дифференцируемыми по параметрам T, E и бесконечно дифференцируемыми по t , так что непрерывны и соответствующие смешанные производные.

3. Зависимость от двух произвольных параметров в невозмущенном решении предполагается существенной. Это означает, что определитель Вронского на паре функций $V_T = \partial_T \overset{0}{U}(t; T, E)$, $V_E = \partial_E \overset{0}{U}(t; T, E)$ отличен от нуля на множестве Ω ; на границе $t = T$ возможен нуль конечного порядка.

Исходные уравнения с функциями $A(u, v, t)$, $B(u, v, t)$ определены в части фазовой плоскости $(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ (зависимость от $t \in \mathbb{R}$ считается гладкой всюду). Уточнение условий на область $\mathcal{D}$ касается окрестности бесконечности. Ввиду асимптотики $\overset{0}{U}(t; T, E) = (T - t)^{-\nu} \overset{0}{U}_{-\nu} [1 + o(1)]$ все семейство невозмущенных фазовых траекторий $(\overset{0}{U}, \overset{0}{U}')$ при $t \rightarrow T$ стремится к бесконечности, асимптотически приближаясь к параболе $v = u^{(\nu+1)/\nu} / \nu$. Поэтому область $\mathcal{D}$ не ограничена. Требование к ней состоит в том, что вместе с невозмущенной асимптотой в области $\mathcal{D}$ содержится некоторый криволинейный сектор, точнее, его неограниченная часть. В качестве границ такой неограниченной подобласти $\mathcal{D}_\nu$ возьмем отрезок прямой $u = c = \text{const} > 0$ и пару кривых, которые соответствуют функциям $U_\pm(t) = (T - t)^{-\nu} \alpha_\pm$, $(0 < \alpha_- < 1 < \alpha_+)$ и представляют собой параболы $v = (\alpha_\pm u)^{(\nu+1)/\nu} / \nu$.

4. Таким образом, условие на область определения $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}_\nu \equiv \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2: (\alpha_- u)^{\frac{\nu+1}{\nu}} < \nu v < (\alpha_+ u)^{\frac{\nu+1}{\nu}}; u > c \right\} \subseteq \mathcal{D}.$$

5. Рассматриваются уравнения вида (1) с гладкими функциями $A(u, v, t)$, $B(u, v, t)$, которые на бесконечности имеют разложение по целым степеням

$$A(u, v, t) = \sum_{i,j=-m}^{\infty} a_{i,j}(t) u^{-i} v^{-j}, \quad B(u, v, t) = \sum_{i,j=-m}^{\infty} b_{i,j}(t) u^{-i} v^{-j}$$

с конечным числом положительных степеней ($m = \text{const} < \infty$). Эти разложения считаются асимптотическими на бесконечности при $|u| + |v| \rightarrow \infty$ равномерно в секторе $\mathcal{D}_\nu$.

6. На показатели степеней накладываются ограничения, связанные с порядком особенности невозмущенного решения:

$$\forall i, j: a_{i,j} \neq 0 \vee b_{i,j} \neq 0 \implies -i\nu - j(\nu + 1) \leq \nu + 2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для невозмущенного уравнения условие 6 и присутствие членов $\{a_{i,j} \neq 0: -i\nu - j(\nu + 1) = \nu + 2\}$ необходимы, чтобы существовало сингулярное решение $U(t; T, E) = \mathcal{O}((T - t)^{-\nu})$. Поэтому условие 6, по сути дела, выделяет класс возмущений B , при которых гарантируется сохранение порядка особенности в возмущенном решении.

ТЕОРЕМА 1. Если выполнены условия 1–6, то справедливы утверждения:

I. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ возмущенное уравнение (1) имеет двухпараметрическое семейство решений $U(t; T, E; \varepsilon)$, для каждого из которых граница $t = T$ представляет особую точку.

II. Возмущенное решение имеет асимптотическое разложение

$$U(t; T, E; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \overset{n}{U}(t; T, E), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5)$$

с коэффициентами $\overset{n}{U}(t; T, E) \in C_\nu^\infty(\Omega)$. Это разложение асимптотическое в равномерной метрике $C(\Omega)$ с весом $(T - t)^\nu$.

III. При всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ начальная задача для возмущенного уравнения (1), (2) имеет единственное решение, которое выражается через семейство $U(t; \varepsilon) = U(t; T(\varepsilon), E(\varepsilon); \varepsilon)$ посредством гладких функций $T = T(\varepsilon)$, $E = E(\varepsilon)$.

IV. Для особой точки $T(\varepsilon)$ и для параметра $E(\varepsilon)$ имеют место асимптотические разложения

$$T(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n T_n, \quad E(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n E_n, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

СЛЕДСТВИЕ. На основе построенных рядов возможна асимптотическая аппроксимация решения равномерно вне сколь угодно узкой (по порядку ε) окрестности особой точки, так что $\forall N \exists M = \text{const}$:

$$\left| U(t; \varepsilon) - \sum_n \varepsilon^n \bar{U}(t; T_N(\varepsilon), E_N(\varepsilon)) \right| \leq M \varepsilon^N, \quad 0 \leq n \leq (\nu + 1)N,$$

равномерно для $\forall t \in [0, T(\varepsilon) - \varepsilon^N]$ с соответствующей аппроксимацией параметров: $T(\varepsilon) = T_N(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$, $E(\varepsilon) = E_N(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$.

3. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

В общепринятой классификации рассматриваемая задача относится к задачам с сингулярным возмущением. Прямой ряд теории возмущений с не зависящими от ε коэффициентами

$$U(t; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \bar{U}(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

не является асимптотическим вблизи невозмущенной особой точки при $|t - T_0| \leq \mathcal{O}(\varepsilon)$. Это можно наглядно продемонстрировать на примере уравнения Риккати, для которого в прямом разложении возмущенного решения (3) имеются особенности растущего порядка $U_n(t) = \mathcal{O}((1 - t)^{-n-1})$, связанные с разложением функции типа $(1 - t - \varepsilon)^{-1}$. Усиление особенностей делает непригодной асимптотику в такой форме вблизи точки T_0 на расстояниях порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Проблемы возникают из-за зависимости от ε положения возмущенного полюса $T(\varepsilon)$, для которого, кстати, из прямого разложения невозможно получить асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предлагаемый нами способ построения формального асимптотического решения (ФАР) использует известные идеи, которые обычно связываются с именами Крылова, Боголюбова и Кузмака [10], [11]. ФАР строится в виде ряда (5), в котором для главного члена используется общее решение предельного уравнения: $\bar{U} = \bar{U}(t; T, E)$. Неизвестными являются старшие поправки $\bar{U} = \bar{U}(t; T, E)$, $n \geq 1$, как функции от t, T, E и параметры T, E как функции от ε . Основная идея состоит в допущении зависимости от ε параметров T, E . Для них строятся свои асимптотические разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде степенных рядов (6).

Для поправок выписывается рекуррентная система линейаризованных уравнений:

$$\bar{U}'' + A_1(t; T, E)\bar{U}' + A_0(t; T, E)\bar{U} = F(t; T, E). \quad (7)$$

Коэффициенты здесь выражаются через решение невозмущенного уравнения: $A_1 = \partial_v \bar{A}(\bar{U}, \bar{U}', t)$, $A_0 = \partial_u \bar{A}(\bar{U}, \bar{U}', t)$. Правые части зависят от предыдущих приближений и вычисляются с использованием коэффициентов Тейлора функций $A(u, v, t)$, $B(u, v, t)$,

например, при $u = \overset{0}{U}$, $v = \overset{0}{U}'$

$$\begin{aligned} F_1 &= B(u, v, t), \\ F_2 &= \partial_u B(u, v, t) \overset{1}{U} + \partial_v B(u, v, t) \overset{1}{U}' - \frac{1}{2} \partial_u^2 A(u, v, t) \overset{1}{U}^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_v^2 A(u, v, t) (\overset{1}{U}')^2 - \partial_u \partial_v A(u, v, t) \overset{1}{U} \overset{1}{U}'. \end{aligned}$$

Решения $\overset{n}{U}$ выписываются в явном виде в терминах главного члена $\overset{0}{U}$ и потому зависят от параметров T, E . Начальные условия при этом не используются. Дополнительные ограничения на поправки $\overset{n}{U}$ состоят в требовании отсутствия у них сингулярностей более сильных, чем в главном члене. Это требование аналогично секулярному условию в задачах об усреднении быстрых колебаний [10], [11].

Таким образом строится семейство ФАР, зависящее от двух параметров T, E . На заключительном этапе эти параметры определяются как функции от ε и строится их асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ исходя из начальных условий. Реализуя указанную процедуру, докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполнены требования теоремы 1, то рекуррентная система линеаризованных уравнений (7) разрешима в классе C_ν^∞ .*

Доказательство основано на использовании пары решений однородного уравнения, в качестве которых берутся производные по параметрам: $V_T(t; T, E) = \partial_T \overset{0}{U}$, $V_E(t; T, E) = \partial_E \overset{0}{U}$. Функции V_T, V_E обладают свойством $V_T \in C_{\nu+1}^\infty$, $V_E \in C_{-r}^\infty$, $-\nu < r < \infty$, и для них можно записать асимптотические формулы при $t \rightarrow T$

$$V_T(t; T, E) = (T - t)^{-\nu-1} \overset{0}{U}_{-\nu} [-\nu + o(1)], \quad V_E(t; T, E) = (T - t)^r V_r [1 + o(1)]$$

с вполне определенными главными членами и с коэффициентом $V_r \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Индекс r определяет в асимптотическом разложении для невозмущенного решения $\overset{0}{U}$ слагаемое $(T - t)^r \overset{0}{U}_r(T, E)$, главное среди тех, которые содержат произвольный параметр¹⁾ (см. пример с уравнением Лиувилля).

Вронскиан $W(V_T, V_E) \equiv w(t; T, E)$, как функция от $(t; T, E)$, принадлежит классу $C_{\nu-r+2}^\infty$ с асимптотикой

$$w(t; T, E) = -\nu(\nu + 1 - r)(t - T)^{-\nu+r-2} V_r \overset{0}{U}_{-\nu} [1 + o(1)].$$

Поскольку вронскиан не обращается в нуль при $(t, T, E) \in \Omega$, а на границе $t = T$ допускается нуль лишь конечного порядка, то из этой асимптотики вытекает конечность

¹⁾ Без ограничения общности можно считать, что этот коэффициент (называемый иногда резонансным) совпадает с параметром $\overset{0}{U}_r = E$, так что $V_r = \partial_E \overset{0}{U}_r = 1$.

резонансного показателя $-\nu < r < \infty$. Решение неоднородного линейризованного уравнения выписывается в явной форме

$$U(t; T, E) = V_E(t; T, E) \int_{t_0}^t V_T(\zeta; T, E) \frac{F(\zeta; T, E)}{w(\zeta; T, E)} d\zeta - \\ - V_T(t; T, E) \int_T^t V_E(\zeta; T, E) \frac{F(\zeta; T, E)}{w(\zeta; T, E)} d\zeta \equiv \mathbf{I}[F], \quad t_0 = \text{const}. \quad (8)$$

Эта формула определяет линейный интегральный оператор $\mathbf{I}[F]$, для которого можно доказать ограниченность на подходящей паре функциональных пространств. Пока же достаточно установить следующее свойство.

ЛЕММА 1. Если $F \in \mathcal{C}_{\nu+2}^\infty$, то $\mathbf{I}[F] \in \mathcal{C}_\nu^\infty$.

Доказательство основано на интегрировании асимптотических разложений вида (4), которые получаются для подынтегральных выражений в (8).

Для завершения доказательства теоремы 2 надо проверить, что правые части $\overset{n}{F}$, которые возникают в рекуррентной системе линейризованных уравнений (7), всегда принадлежат классу $\mathcal{C}_{\nu+2}^\infty$, если только предыдущие решения $\overset{k}{U}$, $k < n$, были из $\mathcal{C}_\nu^\infty$. Решающую роль в сохранении порядка особенности ν играет условие 6, которое ограничивает степень роста нелинейностей на бесконечности. Теорема 2 доказана.

Заключительный этап построения ФАР состоит в удовлетворении начальных условий (2) за счет произвола в параметрах (T, E) . Подстановка ФАР (5) в соотношения (2) приводит к паре алгебраических уравнений для T, E , которые решаются асимптотически. Задача сводится к определению коэффициентов T_n, E_n в рядах (6), для которых можно получить рекуррентную систему уравнений. При этом в главном порядке уравнения выполняются в силу выбора параметров невозмущенного решения: $\overset{0}{U}(0; T_0, E_0) = u_0$, $\overset{0}{U}'(0; T_0, E_0) = v_0$. Последующие приближения определяются из рекуррентной системы линейризованных уравнений

$$V_E(0; T_0, E_0)E_n + V_T(0; T_0, E_0)T_n = u_n, \quad V_E'(0; T_0, E_0)E_n + V_T'(0; T_0, E_0)T_n = v_n \quad (9)$$

с ненулевым определителем. Правые части вычисляются через предыдущие приближения и известны настолько, насколько известны соответствующие поправки в ФАР (5). Тем самым доказана

ЛЕММА 2. Если для функций $T(\varepsilon), E(\varepsilon)$ коэффициенты асимптотических разложений (6) удовлетворяют уравнениям (9), то ФАР (5) с соответствующими параметрами $T = T(\varepsilon), E = E(\varepsilon)$ асимптотически удовлетворяет начальным условиям (2).

ЗАМЕЧАНИЕ К НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ФАР. Неединственность в конструкции ФАР (5), (6) связана с гладкой частью зависимости коэффициентов от ε . Такая зависимость входит посредством параметра $E = E(\varepsilon)$ и частично посредством гладкой зависимости от параметра $T = T(\varepsilon)$. После частичного либо полного переразложения по ε получаются ряды такого же типа (с новыми коэффициентами U_n, E_n). Каждая пара рядов представляет собой ФАР задачи (1), (2). Поскольку все такие пары рядов асимптотически эквивалентны, то их неединственность не играет роли: разность отрезков двух рядов для U с подстановкой соответствующих асимптотик для E не превышает отброшенных членов по порядку величины ε .

Кроме того, неединственность можно обнаружить на этапе формальных построений в коэффициентах $\overset{n}{U}$. Она связана с произволом в выборе нижнего предела в первом интеграле (8), так что на каждом шаге возможна добавка одного из решений однородного уравнения²⁾ $\beta V_E = \beta \partial_E U_0(t; T, E)$ с произвольной константой β . Произвол, естественно, проявляется при решении начальных уравнений (9) для E_n, T_n . Критическим для всей конструкции является вопрос об однозначности коэффициентов T_n , которые определяют асимптотику сингулярной точки $T(\varepsilon)$. При желании можно доказать однозначность ряда для T и асимптотическое совпадение всех рядов для U , которые могут быть получены таким способом. Аналогично [12] можно установить, что проблема сводится к изменению в выборе функции $E = E(\varepsilon)$ с переразложением ряда для U , как это описано выше. Однако мы решаем этот вопрос иначе, доказывая единственность точного решения исходной задачи (1), (2), для которого любое из построенных ФАР представляет асимптотическое разложение. Такое доказательство описано в следующем разделе.

4. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ

Обоснование проводится в два этапа. На первом этапе для возмущенного уравнения (1) строится семейство точных решений $U(t; T, E; \varepsilon)$ с подвижной особой точкой T . При этом все три параметра $T, E \in \Pi, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ независимы. На втором этапе подходящие значения $T = T(\varepsilon), E = E(\varepsilon)$ выбираются исходя из требования выполнения начальных условий (2).

Точное решение уравнения (1) ищется в виде суммы конечного отрезка U_N построенного ФАР (5) и неизвестного остатка Y :

$$U(t; T, E; \varepsilon) = U_N(t; T, E; \varepsilon) + \varepsilon^N Y(t; T, E; \varepsilon).$$

Функция U_N при подстановке в уравнение (1) дает невязку порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ в равномерной метрике с весом $\mathcal{O}((T-t)^\nu)$. В дифференциальном уравнении для остаточного члена Y , которое получается из (1), можно идентифицировать главную часть в виде линеаризованного оператора

$$Y'' + A_1(t; T, E)Y' + A_0(t; T, E)Y = -\varepsilon F_N(t; T, E; \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{H}[Y; \varepsilon]. \quad (10)$$

²⁾Как видим, требование отсутствия сильных сингулярностей не достаточно для единственности решения линеаризованного уравнения.

При этом в нелинейном операторе $\varepsilon \mathbf{H}$ так же, как в невязке εF_N , можно выделить малый множитель, если определить $\mathbf{H}$ в виде

$$\mathbf{H}[Y; \varepsilon] \equiv H_B(Y, Y', U_N, U'_N, t; \varepsilon) - H_A(Y, Y', U_N, U'_N, \overset{0}{U}, \overset{0}{U}', t; \varepsilon)$$

через функции

$$\begin{aligned} H_B(y, z, u, v, t; \varepsilon) &\equiv \frac{1}{\varepsilon^N} [B(u + \varepsilon^N y, v + \varepsilon^N z, t) - B(u, v, t)], \\ H_A(y, z, u, v, u^0, v^0, t; \varepsilon) &\equiv \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} [A(u + \varepsilon^N y, v + \varepsilon^N z, t) - A(u, v, t) - \\ &\quad - \varepsilon^N \partial_u A(u, v, t) y - \varepsilon^N \partial_v A(u, v, t) z] + \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} [\partial_u A(u, v, t) - \partial_u A(u^0, v^0, t)] y + \frac{1}{\varepsilon} [\partial_v A(u, v, t) - \partial_v A(u^0, v^0, t)] z \end{aligned}$$

при $y = Y$, $z = Y'$; $u = U_N$, $v = U'_N$; $u^0 = \overset{0}{U}$, $v^0 = \overset{0}{U}'$. Заметим, что эти функции состоят из остаточных членов разложений Тейлора для функций $A(u, v, t)$, $B(u, v, t)$ в точках (u, v) или (u^0, v^0) , а потому являются гладкими по всем переменным в области определения (u^0, v^0) , (u, v) , $(u + \varepsilon^N y, v + \varepsilon^N z) \in \mathcal{D} \forall t, \varepsilon$.

Если речь идет о гладких решениях, то не вызывает сомнения разрешимость уравнения (10) с соответствующими начальными данными. Для решений с особенностями основные проблемы возникают с существованием и оценкой остаточного члена на промежутке вблизи особой точки $t \in [t_0, T)$. В этом случае вводятся подходящие весовые пространства, в которых затем реализуется метод сжимающих отображений.

5. ПРИМЕР

Рассмотрим возмущение редуцированного уравнения Лиувилля

$$U'' - \frac{(U')^2}{U} - U^3 = \varepsilon \left(\frac{U'}{U} \right)^2$$

при начальных условиях $(U, U')|_{t=0} = (1, 0)$. Используя обозначение для фазовой функции $z = (T - t)E$, первые два члена асимптотики решения можно записать в форме

$$\begin{aligned} U(t; T, E) &= \frac{1}{\sin z} \left\{ E + \varepsilon \left[\frac{\sin z - z \cos z}{\sin z} \left(\frac{1 + \sin^2(TE)}{\sin^2(TE)} - \frac{1 + \sin^2 z}{\sin^2 z} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos z}{\sin z} \left(\frac{z}{\sin z} + z \sin z + 2 \cos z - 3 \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \forall t \in [0, T). \end{aligned} \quad (11)$$

Параметры имеют асимптотические разложения

$$T = \frac{\pi}{2} - \varepsilon(\pi - 3) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad E = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Таким образом, под действием малого возмущения полюс сдвигается на величину порядка возмущения. Оценка остаточного члена в формуле (11) равномерная на всем промежутке $0 \leq t < T$, поскольку сингулярность вынесена в виде общего (весового) множителя.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотика параметров T , E главного члена решения извлекается из начальных уравнений (9). В общем случае первая поправка в сдвиге сингулярной точки $T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon T_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ вычисляется через интеграл от возмущения:

$$T_1 = - \int_0^T V_E(t; T_0, E_0) \frac{B(\overset{0}{U}, \overset{0}{U}', t)}{w(t; T_0, E_0)} dt,$$

в терминах невозмущенного решения $\overset{0}{U}(t; T_0, E_0)$, его производных $V_E = \partial_E \overset{0}{U}$, $V_T = \partial_T \overset{0}{U}$ и вронскиана $w = W(V_T, V_E)$. Если первая поправка в решении $U = \overset{0}{U}(t; T, E) + \varepsilon \overset{1}{U}(t; T, E) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ выписывается по формуле (8) с $t_0 = 0$, то первая поправка в параметре E оказывается нулевой: $E = E_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Этот параметр будет совпадать с невозмущенным значением E_0 во всех порядках при подходящем выборе старших поправок $\overset{n}{U}$. В задачах о возмущении уравнений Пенлеве асимптотические формулы выписываются в терминах соответствующих трансцендентов Пенлеве.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 00-01-00663, 00-15-96038) и фонда INTAS (№ 99-1068).

Список литературы

- [1] *Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.
- [2] *А. Нейфэ.* Методы возмущений. М.: Мир, 1984.
- [3] *А. М. Ильин.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- [4] *А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [5] *В. П. Маслов.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [6] *Л. А. Калякин.* ТМФ. 1999. Т. 118. № 3. С. 390–397.
- [7] *В. И. Громак, Н. А. Лукашевич.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск: Университетское изд-во, 1990.
- [8] *J. Liouville.* J. Math. Pure Appl. 1853. V. 18. P. 71–74.
- [9] *А. К. Погребков, М. К. Поливанов.* Тр. МИАН. 1987. Т. 176. С. 86–96.
- [10] *Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов.* Исследование продольной устойчивости аэроплана. М.–Л.: Гос. авиац. и автотракт. изд-во, 1932.
- [11] *Г. Е. Кузмак.* ПММ. 1959. Т. 23. № 3. С. 515–526.
- [12] *L. A. Kalaykin.* Russian J. Math. Phys. 1998. V. 5. P. 447–458.