Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Каниадакис, П. Кварати, А. М. Скарфоне, Статические вихревые решения для расположенной на плоскости системы частиц, подчиняющейся обобщенному принципу Паули, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 411–417

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:40:52

© 2001 г. Г. Каниадакис*, П. Кварати*, А. М. Скарфоне*

СТАТИЧЕСКИЕ ВИХРЕВЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ПЛОСКОСТИ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ, ПОДЧИНЯЮЩЕЙСЯ ОБОБЩЕННОМУ ПРИНЦИПУ ПАУЛИ

Рассматривается система частиц на плоскости, подчиняющаяся обобщенному принципу Паули. В приближении среднего поля система описывается недавно предложенным нами уравнением Шредингера с комплексной нелинейностью. В такой системе сохраняется число частиц, полная энергия и угловой момент. Рассматриваются вихреподобные стационарные конфигурации вида $\psi(\mathbf{r}) = \rho(r)^{1/2} e^{in\theta}$ и записывается дифференциальное уравнение, определяющее форму вихря. Найдено аналитическое решение этого уравнения и получено замкнутое выражение для профиля вихря. Исследуются некоторые средние характеристики системы, в частности, вычисляются энергетический спектр и угловой момент вихря.

С первых лет развития квантовой механики, конкретно с 1932 г. [1], стало ясно, что эффекты статистики, обусловленные принципом Паули для системы свободных фермионов, можно воспроизвести, вводя межчастичный отталкивательный потенциал взаимодействия в координатном пространстве. В начале 50-х годов Грин показал [2], что принципы квантовой механики допускают два вида статистик, являющихся обобщениями известных бозе- и ферми-статистик и названных соответственно *пара-бозе*- и *пара-ферми*-статистиками. С тех пор неоднократно предлагались другие обобщенные статистики [3]–[5] для многочастичных квантовых систем с целью объяснения некоторых эффектов, наблюдавшихся в физике конденсированных сред [6]–[8].

В работе [9] нами был проквантован марковский процесс, подчиняющийся обобщенному принципу Паули (“exclusion-inclusion principle”) в координатном пространстве. Динамика канонической квантовой многочастичной системы, подчиняющейся такому принципу, описывается нелинейным уравнением Шредингера в $(D+1)$ -мерном координатном пространстве:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + W(\rho, \mathbf{j})\psi + i\mathcal{W}(\rho, \mathbf{j})\psi + V\psi, \quad (1)$$

* Dipartimento di Fisica, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, I-10129 Torino, Italy and Istituto Nazionale di Fisica della Materia, Unità del Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24, I-10129 Torino, Italy. E-mail: kaniadakis@polito.it; quarati@polito.it; scarfone@polito.it

где действительная и мнимая части нелинейности соответственно имеют вид

$$W(\rho, \mathbf{j}) = \kappa \frac{m}{\rho} \left(\frac{\mathbf{j}}{1 + \kappa \rho} \right)^2,$$

$$\mathcal{W}(\rho, \mathbf{j}) = -\kappa \frac{\hbar}{2\rho} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j} \rho}{1 + \kappa \rho} \right).$$

Константа κ – свободный параметр, определяющий силу эффектов запрета, а $\nabla \equiv (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^D)$ и $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – D -мерные оператор градиента и оператор Лапласа, соответственно. Уравнение (1) может быть получено из вариационного принципа $\delta \mathcal{A}/\delta \psi^* = 0$ с действием $\mathcal{A} = \int \mathcal{L} d^D x dt$, где плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = i \frac{\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 - U_{\text{EIP}}(\psi^*, \psi) - V \psi^* \psi.$$

Здесь

$$U_{\text{EIP}}(\psi^*, \psi) = -\kappa \frac{\hbar^2}{8m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)^2$$

– нелинейный потенциал, предназначенный для описания эффектов коллективного взаимодействия в D -мерной многочастичной системе, обусловленных обобщенным принципом Паули.

Мы рассматриваем случай $\kappa = -|\kappa| < 0$, когда обобщенный принцип Паули сводится к обычному принципу запрета Паули. Легко видеть, что система, описываемая уравнением (1), удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (2)$$

где $\rho = |\psi|^2$, а квантовый ток $\mathbf{j}$ имеет вид

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (1 - |\kappa|\rho) (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi). \quad (3)$$

Уравнение (2) обеспечивает сохранение числа частиц $N = \int \rho d^D x$ в системе.

Поясним кратко, как возникает уравнение (3) и каков его физический смысл. Рассмотрим марковский процесс, описывающий кинетику N частиц на одномерной решетке. Узлы решетки занумеруем индексом i , а положение i -го узла обозначим через $x_i = i\Delta x$, где Δx – расстояние между соседними узлами. Обозначим через ρ_i вероятность заполнения i -го узла и предположим, что возможны переходы только между ближайшими соседями. Процесс описывается мастер-уравнением Паули:

$$\frac{d\rho_i(t)}{dt} = \pi_{i-1}^+(t) + \pi_{i+1}^-(t) - \pi_i^+(t) - \pi_i^-(t). \quad (4)$$

Вероятности $\pi_i^\pm(t)$ перехода с узла i на узлы $i \pm 1$ определяются следующим образом:

$$\pi_i^\pm(t) = \frac{c_i^\pm(t)}{(\Delta x)^2} \rho_i(t) [1 - |\kappa|\rho_{i\pm 1}(t)],$$

где $c_i^\pm(t)$ – зависящие от времени скорости переходов. Множители $1 - |\kappa|\rho_{i\pm 1}$ учитывают коллективные эффекты, обусловленные принципом Паули. Действительно, если

соседний узел не заселен, $\rho_{i\pm 1}(t) = 0$, вероятность перехода $\pi_i^\pm(t)$ зависит только от заселенности исходного узла. Если соседний узел заселен, $0 < \rho_{i\pm 1}(t) \leq \rho_{\max}$, то вероятность перехода уменьшается. Область допустимых значений параметра κ ограничена условием, что $\pi_i^\pm$ должны быть действительными и положительными, как и константы $c_i^\pm$. В таком случае $|\kappa|$ лежит в области $0 \leq |\kappa| \leq 1/\rho_{\max}$. Если определить ток частиц выражением

$$j_i(t) = [\pi_{i-1}^+(t) - \pi_i^-(t)]\Delta x,$$

то мастер-уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial \rho_i(t)}{\partial t} + \frac{\Delta j_i(t)}{\Delta x} = 0,$$

где

$$\Delta j_i(t) = j_{i+1}(t) - j_i(t).$$

В пределе $\Delta x \rightarrow 0$ получаем прямое уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}j(t, x) = 0, \quad (5)$$

где прямой ток $j(t, x)$ имеет вид

$$j(t, x) = u(t, x)\rho(t, x)[1 - |\kappa|\rho(t, x)] + \mathcal{D}\frac{\partial}{\partial x}\rho(t, x),$$

$u(t, x)$ и $\mathcal{D}$ — коэффициенты дрейфа и диффузии, соответственно.

Рассматриваемый стохастический марковский процесс очевидным образом несимметричен по времени. Поэтому вместо прямого уравнения Фоккера–Планка (5) мы должны рассматривать как прямое (+), так и обратное (−) уравнения Фоккера–Планка [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}j^\pm(t, x) = 0, \quad (6)$$

где прямой и обратный токи $j^\pm(t, x)$ определяются следующим образом:

$$j^\pm(t, x) = u^\pm(t, x)\rho(t, x)[1 - |\kappa|\rho(t, x)] \pm \mathcal{D}\frac{\partial}{\partial x}\rho(t, x).$$

Если ввести средний ток $j(t, x)$,

$$j(t, x) = \frac{1}{2}[j^+(t, x) + j^-(t, x)],$$

и среднюю скорость $u(t, x)$,

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[u^+(t, x) + u^-(t, x)],$$

то легко видеть, что сумма прямого и обратного уравнений Фоккера–Планка (5) и (6) дает уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x}\{u(t, x)\rho(t, x)[1 - |\kappa|\rho(t, x)]\} = 0, \quad (7)$$

а ток $j(t, x)$ оказывается чисто дрейфовым и принимает вид

$$j(t, x) = u(t, x)\rho(t, x)[1 - |\kappa|\rho(t, x)].$$

Обобщение уравнения (7) на случай D измерений очевидно. Следуя стандартной процедуре линейной квантовой механики, запишем токовую скорость $u(t, x)$ в виде

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{m} \nabla S(t, \mathbf{x}),$$

где $S(t, \mathbf{x})$ – фаза волновой функции $\psi = \rho^{1/2} e^{iS/\hbar}$. Отсюда немедленно получаются уравнения (2) и (3), причем квантовая скорость определяется соотношением

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{m} (1 - |\kappa|\rho) \nabla S,$$

а квантовый ток принимает вид

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})\rho(t, \mathbf{x}).$$

Система, описываемая уравнением (1), рассматривалась в работе [9]. В частности, в случае $D = 1$ были проанализированы форма и главные свойства солитонных решений уравнения (1). В данной работе рассматривается другое важное свойство этой системы, характерное для случая $D = 2$. Именно, рассматривается статическое вихревое решение уравнения (1) на плоскости в свободном случае, когда потенциал $V = 0$. Будем искать решение ψ в виде

$$\psi(r, \theta) = \rho(r)^{\frac{1}{2}} e^{iS(\theta)}, \quad (8)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\theta = \arctg(y/x)$ – полярные координаты на плоскости, а $S = S/\hbar$. Квантовая скорость $\mathbf{v}$ принимает вид

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{\hbar}{mr} \frac{\partial S}{\partial \theta} (1 - |\kappa|\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

где $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ – единичный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{x} = (x, y)$. При таком виде тока уравнение непрерывности (2) в стационарном случае удовлетворяется, только если фаза S линейна по θ , т.е.

$$S(\theta) = n\theta, \quad (9)$$

где индекс $n \in \mathbb{N}$, чтобы поле ψ , определяемое формулой (8), было однозначной функцией. Квантовая скорость принимает вид

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{\hbar}{m} \frac{n}{r} (1 - |\kappa|\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta. \quad (10)$$

Подставляя (8) в уравнение (1) и используя (9), получаем уравнение

$$2 \frac{n^2}{r^2} (1 - 2|\kappa|\rho) = \left[\frac{1}{r\rho} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\rho}{dr} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right)^2 \right].$$

В терминах безразмерной переменной

$$z = \ln \frac{r}{r_n}$$

оно принимает вид

$$2n^2(1 - 2|\kappa|\rho) - \frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{dz^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^2 = 0.$$

Подстановкой

$$y(\rho) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \quad (11)$$

последнее уравнение сводится к линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{d\rho} + \frac{y}{\rho} - \frac{4n^2}{\rho}(1 - 2|\kappa|\rho) = 0,$$

которое легко интегрируется:

$$y(\rho) = \frac{A}{\rho} + 4n^2(1 - |\kappa|\rho), \quad (12)$$

A – постоянная интегрирования. Сравнивая (11) и (12), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2 = A\rho + 4n^2\rho^2(1 - |\kappa|\rho), \quad (13)$$

которое можно проинтегрировать и тем самым получить форму вихря. Обозначая $f = |\kappa|\rho$, мы можем представить решение уравнения (13) в неявной форме:

$$r = r_n \exp \left\{ \pm \frac{1}{2n} \int_{|\kappa|\rho_0}^{|\kappa|\rho} \frac{df}{\sqrt{\alpha f + f^2(1 - f)}} \right\}, \quad (14)$$

где $\alpha = A/(2n|\kappa|)^2$ – произвольная постоянная. Физические вихревые решения должны быть несингулярными, неотрицательными и нормируемыми; они получаются из уравнения (14) при подходящем выборе параметров $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим решение уравнения (14), отвечающее случаю $\alpha = 0$. Легко получить явное выражение для формы вихря:

$$\rho = \frac{4}{|\kappa|} \left[\left(\frac{r}{r_n} \right)^n + \left(\frac{r_n}{r} \right)^n \right]^{-2}. \quad (15)$$

Свободный параметр r_n связан с константой нормировки

$$N = 2\pi \int_0^\infty \rho(r) r dr$$

и дается формулой

$$r_n = \frac{n}{2\pi} \sqrt{|\kappa| N \sin \frac{\pi}{n}}, \quad \forall n > 1.$$

Параметр r_n представляет собой расстояние от центра вихря, на котором ρ достигает максимума, $\rho = \rho_{\max}$. В согласии с принципом Паули имеем

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{|\kappa|}, \quad \forall r \in \mathbb{R}_0^+.$$

Более того, из формулы (15) следует, что одинарный вихрь ($n = 1$) ненормируем, поэтому одинарный вихрь является недопустимым.

Определим завихренность вихря формулой

$$\mathcal{V} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (16)$$

где $\mathbf{v}$ дается формулой (10). С учетом выражения для профиля $\rho(r)$ вихря завихренность имеет вид

$$\mathcal{V} = \frac{2\pi\hbar n}{m} \delta^{(2)}(\mathbf{x}) - \frac{8\pi\hbar n^2}{mr_n^2} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{2(n-1)} \left[1 - \left(\frac{r}{r_n}\right)^{2n}\right] \left[1 + \left(\frac{r}{r_n}\right)^{2n}\right]^{-3} \quad (17)$$

и обращается в нуль на окружности $r = r_n$. Легко проверить, что

$$\int_{\mathcal{R}_2} \mathcal{V} d^2x = \frac{2\pi\hbar n}{m},$$

тогда как интегрирование (10) по бесконечно удаленной окружности γ_∞ с учетом того, что $\rho(\infty) = 0$, дает

$$\oint_{\gamma_\infty} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{2\pi\hbar n}{m}. \quad (18)$$

Заметим, что

$$\oint_{\gamma_\infty} \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{R}_2} \mathcal{V} d^2x,$$

как и должно быть согласно определению (16). Выражение (18) оправдывает название n как индекса завихренности.

Обсудим теперь средние физические характеристики вихря. Эти величины получаются исходя из общего выражения для тензора энергии-импульса системы (1), приведенного в работе [11]. Разумеется, поскольку вихри являются статическими решениями, их импульс равен нулю,

$$\mathbf{P} = -i\frac{\hbar}{2} \int (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) d^2x = 0.$$

Заметим, что уравнение (1) не является галилеево-инвариантным [11], поэтому движущиеся решения нельзя получить с помощью буста статических решений.

Угловой момент вихря, который в двумерном случае является скаляром и которому отвечает оператор $\hat{L} = -i\hbar \partial/\partial\theta$, принимает квантованные значения, пропорциональные индексу завихренности:

$$L = nL_0, \quad n \geq 2,$$

где

$$L_0 = \hbar N.$$

Заметим, что угловой момент не зависит от параметра κ .

Энергия системы $E = H$ вычисляется по гамильтониану, приведенному в работе [9]:

$$H = \int \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + U_{\text{EIP}}(\psi^*, \psi) \right] d^2x. \quad (19)$$

Подставляя выражение для поля ψ вихря,

$$\psi(r, \theta) = \frac{2}{\sqrt{|\kappa|}} \left[\left(\frac{r}{r_n} \right)^n + \left(\frac{r_n}{r} \right)^n \right]^{-1} e^{in\theta},$$

в (19), находим, что энергия вихря пропорциональна индексу завихренности:

$$E = nE_0, \quad n \geq 2, \quad (20)$$

где

$$E_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{3m|\kappa|}.$$

Нижняя граница энергии равна $2E_0$ и зависит от параметра $|\kappa|$. После несложных вычислений для дисперсии радиальной компоненты импульса получаем

$$(\Delta P_r)^2 = \frac{8\pi\hbar^2 n}{3|\kappa|N}, \quad (21)$$

а для дисперсии локализации по радиусу получаем

$$(\Delta r)^2 = |\kappa|N \left(\frac{n}{2\pi} \right)^2 \left[\frac{\sin(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} - \frac{9}{4} \frac{\sin^3(\pi/n)}{\sin^2(3\pi/(2n))} \right]. \quad (22)$$

Заметим, что для низшего ($n = 2$) вихря $\Delta r = \infty$. При $n \rightarrow \infty$ получаем $\Delta P_r = \infty$ и $\Delta r = 0$. Наконец, легко проверить, комбинируя (21) и (22), что выполняется соотношение неопределенности

$$\Delta P_r \Delta r \geq \frac{\hbar\pi}{3\sqrt{2}}, \quad \forall n \geq 2.$$

Список литературы

- [1] *G. E. Uhlenbeck, L. Gropper.* Phys. Rev. 1932. V. 41. P. 79.
- [2] *H. S. Green.* Phys. Rev. 1953. V. 90. P. 270.
- [3] *F. Wilczek.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 114; 1982. V. 49. P. 957.
- [4] *O. W. Greenberg.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 705; Phys. Rev. D. 1991. V. 43. P. 4111.
- [5] *F. D. M. Haldane.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 937.
- [6] *R. B. Langhulin.* Phys. Rev. B. 1983. V. 32. P. 3383.
- [7] *Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, B. I. Halperin.* Int. J. Mod. Phys. B. 1989. V. 3. P. 1001.
- [8] *F. Wilczek.* Fractional Statistics and Anyon Superconductivity. Singapore: World Scientific, 1990.
- [9] *G. Kaniadakis, P. Quarati, A. M. Scarfone.* Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 5574.
- [10] *G. Kaniadakis.* Phys. Rev. A. 1997. V. 55. P. 941.
- [11] *G. Kaniadakis, P. Quarati, A. M. Scarfone.* Rep. Math. Phys. 1999. V. 44. P. 127.