Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Д. Суханов, Обобщенное соотношение неопределенностей “координата-импульс” в квантовой механике и теории броуновского движения, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 1, 129–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf47>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 04:27:20

ОБОБЩЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ “КООРДИНАТА-ИМПУЛЬС” В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Показано, что обобщенные соотношения неопределенностей Шредингера имеют смысл фундаментальных ограничений на характеристики пространства состояний в любой теории вероятностного типа. К таким теориям относятся как квантовая механика, так и теория броуновского движения при произвольных промежутках времени. Проведено сравнение соотношения неопределенностей “координата-импульс” в этой теории с аналогичным соотношением неопределенностей для микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета. Установлено, что при серьезном различии в математических аппаратах двух теорий между ними наблюдается концептуальное сходство. Оно проявляется в альтернативных режимах – малые времена в одной теории соответствуют большим временам в другой теории, и наоборот, причем в каждой из этих теорий существенную роль играет неконтролируемое воздействие либо квантового, либо теплового типа.

Ключевые слова: квантовая механика, стохастическая механика, соотношения неопределенностей Гейзенберга и Шредингера, броуновское движение, уравнение Фоккера–Планка и кинетическое уравнение Крамерса, неконтролируемое воздействие (квантовое и тепловое).

1. ОБОБЩЕННОЕ СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ШРЕДИНГЕРА “КООРДИНАТА-ИМПУЛЬС” В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Традиционно считается, что наличие корреляции между флуктуациями координаты и импульса в форме соотношения неопределенностей (СН) Гейзенберга [1]

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

специфично для квантовой механики. Эту корреляцию обычно связывали с тем, что в квантовой механике наблюдаемым q и p сопоставляются некоммутирующие операторы.

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия. E-mail: ogol@oldi.ru; ogol@mx.pfu.edu.ru

Однако существовала и другая точка зрения, впервые, по-видимому, высказанная Фенъешем [2], согласно которой корреляция между флуктуациями координаты и импульса связывалась с наличием в природе того или иного типа неконтролируемого воздействия, приводящего к формированию целостного состояния системы. К таким воздействиям, наряду с квантовым воздействием, определяемым постоянной Планка $\hbar$, принято относить и тепловое воздействие, определяемое постоянной Больцмана k_B [3]–[5].

Предположение о возможности такой корреляции вне квантовой динамики долгое время не встречало понимания вследствие того, что в этом случае наблюдаемые q и p являются c -числовыми величинами. Хотя по воспоминаниям Гейзенберга (см. [6], с. 227) Бор еще в 1930 г. допускал, что концептуально квантовая динамика и статистическая термодинамика могут оказаться весьма близкими.

Прогресс в этом вопросе был достигнут после того как Шредингер [7] исследовал наиболее общие свойства пространства состояний в квантовой механике на основе неравенства Коши–Буняковского–Шварца. В результате он сформулировал обобщенные СН [8], [9] для произвольных наблюдаемых A и B и произвольных состояний $|\Psi\rangle \equiv |\rangle$. При дальнейшем анализе мы ограничимся эрмитовыми операторами и чистыми состояниями, хотя возможно и более общее рассмотрение [8].

Допустим, что мы имеем наблюдаемые A и B , которым сопоставляются эрмитовы операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$. В нормированном квантовом состоянии $|\rangle$, которое ни для одного из них не является собственным, наблюдаемые A и B можно характеризовать средними значениями

$$\bar{A} = \langle \hat{A} \rangle, \quad \bar{B} = \langle \hat{B} \rangle$$

и дисперсиями (вариациями)

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &\equiv \langle |(\Delta \hat{A})^2| \rangle = \langle |\Delta \hat{A} \Delta \hat{A}| \rangle = \langle \Delta A | \Delta A \rangle, \\ (\Delta B)^2 &\equiv \langle |(\Delta \hat{B})^2| \rangle = \langle |\Delta \hat{B} \Delta \hat{B}| \rangle = \langle \Delta B | \Delta B \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

характеризующими флуктуации наблюдаемых A и B в состоянии $|\rangle$. Здесь

$$\begin{aligned} \Delta \hat{A} &= \hat{A} - \bar{A}, & \Delta \hat{A} |\rangle &\equiv |\Delta A\rangle, \\ \Delta \hat{B} &= \hat{B} - \bar{B}, & \Delta \hat{B} |\rangle &\equiv |\Delta B\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Корреляция флуктуаций наблюдаемых A и B описывается обобщенным коррелятором (ковариацией)

$$\tilde{R}_{AB} = \langle |\Delta \hat{A} \Delta \hat{B}| \rangle = \langle \Delta A | \Delta B \rangle = \sigma_{AB} + ic_{AB}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle \{ \Delta \hat{A}, \Delta \hat{B} \} \rangle, \quad c_{AB} = \frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle = c_{AB}^*. \quad (4)$$

Тогда для произвольных наблюдаемых A и B обобщенное СН Шредингера принимает вид [7]

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq |\tilde{R}_{AB}|^2 = |\langle \Delta A | \Delta B \rangle|^2 = \sigma_{AB}^2 + c_{AB}^2. \quad (5)$$

Входящая в СН (5) величина $|\tilde{R}_{AB}|$ равна модулю комплексной амплитуды перехода $\tilde{R}_{AB}$ из состояния $|\Delta B\rangle$ в состояние $|\Delta A\rangle$. Разделение в ней вещественной и мнимой частей

соответствует выделению вкладов σ_{AB} и c_{AB} в коррелятор $\tilde{R}_{AB}$ антикоммутатора и коммутатора операторов $\Delta\hat{A}$ и $\Delta\hat{B}$.

Проанализируем подробнее СН Шредингера “координата-импульс” для бесспиновой микрочастицы массы m , совершающей нерелятивистское одномерное движение. В этом случае $\hat{A} = \hat{q}$ и $\hat{B} = \hat{p}$, так что СН (5) с обобщенным коррелятором $\tilde{R}_{qp}$ принимает вид

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 \geq |\tilde{R}_{qp}|^2 = \sigma_{qp}^2 + c_{qp}^2 = \sigma_{qp}^2 + \frac{\hbar^2}{4}, \quad (6)$$

где $c_{qp} = \hbar/2$ – вклад коммутатора операторов $\Delta\hat{q} = \hat{q} - \bar{q}$ и $\Delta\hat{p} = \hat{p} - \bar{p}$, а σ_{qp} – вклад соответствующего антикоммутатора, которому можно придать удобную для анализа форму [10]

$$\sigma_{qp} = m \int dq (q - \bar{q}) j_{\text{вер}}(q) \equiv m I_{\text{вер}}. \quad (7)$$

Здесь $I_{\text{вер}}$ – момент первого порядка от плотности потока вероятности

$$j_{\text{вер}}(q) = \frac{\hbar}{2im} \left\{ \frac{\partial \psi^*(q)}{\partial q} \psi - \psi^* \frac{\partial \psi(q)}{\partial q} \right\} = \frac{\hbar}{m} \rho_{\text{вер}}(q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q} \quad (8)$$

в состоянии с волновой функцией

$$\psi(q) = \sqrt{\rho_{\text{вер}}(q)} e^{i\varphi(q)}.$$

Из СН (6) следуют два важных вывода:

- а) оно совпадает с СН Гейзенберга только при условии $\sigma_{qp} = 0$;
- б) в квазиклассическом пределе, когда $c_{qp} \rightarrow 0$, вклад антикоммутатора σ_{qp} отличен от нуля и аналогичен коррелятору

$$\overline{(\Delta q \Delta p)} \equiv \int dq dp (q - \bar{q})(p - \bar{p}) \rho(p, q)$$

из классической теории вероятностей, в котором $\bar{q}$ и $\bar{p}$ также вычисляются с помощью плотности вероятности $\rho(p, q)$.

Как было показано в работе [10], для свободной микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета с начальной скоростью $v_0 = \text{const}$ волновая функция

$$\psi(q, t) = [2\pi(\Delta q(t))^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{(q - \bar{q})^2}{4(\Delta q(t))^2} [1 - i\alpha(t)] + i\delta(q, t) \right\}, \quad (9)$$

где

$$\alpha(t) = \frac{v_{\text{кв}} t}{b}, \quad \delta(q, t) = \frac{mv_0}{\hbar} q - \frac{mv_0^2}{2\hbar} t - \frac{1}{2} \arctg \alpha(t), \quad (10)$$

$$(\Delta q(t))^2 = b^2 + v_{\text{кв}}^2 t^2, \quad (\Delta p)^2 = (mv_{\text{кв}})^2, \quad (11)$$

$$\sigma_{qp} = mv_{\text{кв}}^2 t. \quad (12)$$

Здесь

$$v_{\text{кв}} = \frac{\hbar}{2mb} \quad (13)$$

– скорость распыливания пакета, $b = \Delta q(0)$ – начальная ширина пакета. При этом гауссов пакет минимизирует СН Шредингера (6), т.е. обращает его в строгое равенство в любой момент времени t . Поэтому соответствующее СН принимает вид равенства

$$(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 = (mv_{\text{кв}}^2 t)^2 + \frac{\hbar^2}{4}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что второе слагаемое справа в формуле (14), характерное для СН Гейзенберга, существенно только пока $t \ll \tau_{\text{кв}} = b/v_{\text{кв}}$. Наоборот, при $t \gg \tau_{\text{кв}}$ правая часть СН Шредингера (14) определяется только первым слагаемым $\sigma_{qp} = mv_{\text{кв}}^2 t$.

Таким образом, анализ обобщенного СН Шредингера “координата-импульс” наводит на мысль о том, что наличие корреляции флуктуаций координаты и импульса в форме соответствующего СН не обязательно зависит от операторного характера наблюдаемых q и p . Подобная корреляция может иметь место в любой теории вероятностного типа, в которой отличен от нуля коррелятор $\sigma_{qp} = \overline{(\Delta q \Delta p)}$. С нашей точки зрения особый интерес представляет броуновское движение классической частицы, в котором ее состояние формируется неконтролируемым тепловым воздействием.

2. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ПРИ БОЛЬШИХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ

Ответ на вопрос о возможности существования нетривиального СН “координата-импульс” для броуновского движения классической частицы в течение многих десятилетий был однозначно отрицательным для большинства физиков. Это, по-видимому, было связано с тем, что обычно исходили из СН Гейзенберга, в правую часть которого входит только вклад коммутатора c_{qp} . Поскольку при любом определении величин q и p для броуновского движения классической частицы они должны быть c -числами, то отсюда однозначно следовало, что в нем $c_{qp} = 0$.

Разумеется, подобные аргументы не могут быть справедливыми, если исходить из СН Шредингера (6). Для существования нетривиального СН “координата-импульс”, по-видимому, необходимо только, чтобы соответствующие величины q и p были случайными и статистически зависимыми величинами в пространстве состояний с каким-либо распределением вероятностей.

Ниже мы будем всюду рассматривать такую стадию одномерного броуновского движения, когда равновесное состояние по импульсам уже достигнуто и определяется распределением Максвелла с температурой окружающей среды T . В этих условиях координата броуновской частицы q является случайной величиной, определяемой независимой от распределения Максвелла $\rho(p)$ нормированной плотностью вероятности $\rho_n(q, t)$, имеющей смысл плотности числа частиц. Последнее означает, что если координата q и импульс $p = mv$ броуновской частицы, где $v = dq/dt$ – ее мгновенная скорость, определяются как ее *индивидуальные* характеристики, то в рамках статистической механики они оказываются статистически независимыми. Поэтому их коррелятор $\overline{(\Delta q \Delta p)} = 0$ и нетривиальное СН Шредингера отсутствует.

Следует подчеркнуть, что с математическим определением скорости броуновской частицы и ее физической интерпретацией с самого начала были связаны существенные

трудности. В связи с этим Эйнштейн [11] и, следуя ему, Фюрт [12] предложили в качестве характерной скорости броуновского движения рассматривать величину, относящуюся не к отдельной броуновской частице, а фактически к *ансамблю* таких частиц в целом. Отметим, что подобный подход идейно близок к квантовой механике, в которой волновая функция также характеризует соответствующий ансамбль.

Вместе с тем, выбирая характерную скорость броуновского движения, необходимо учесть, что в произвольный момент времени подобной величиной не может служить тепловая скорость (при $\bar{v} = 0$)

$$v_T \equiv \Delta v = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad (15)$$

вычисленная по распределению Максвелла. Как подчеркивал Эйнштейн [11], значение этой величины многократно превосходит при $t \gg \tau$ экспериментально наблюдаемые значения скорости броуновской частицы. Здесь $\tau = m/\gamma$ – время релаксации броуновской частицы к тепловому равновесию, а γ – коэффициент сопротивления среды, входящий в формулу для силы Стокса $F = -\gamma v$.

В связи с этим в качестве характерной скорости броуновского движения в конце концов была выбрана текущая скорость потока броуновских частиц [12], [2]

$$v_{\text{тек}}(q, t) \equiv \frac{j_n(q, t)}{\rho_n(q, t)}, \quad (16)$$

где $j_n(q, t)$ – плотность потока броуновских частиц, входящая в уравнение непрерывности, а $\rho_n(q, t)$ – нормированная плотность числа броуновских частиц:

$$\int \rho_n(q, t) dq = 1.$$

Выбрав в качестве сопряженных величин координату броуновской частицы q и текущий импульс $p_{\text{тек}} = mv_{\text{тек}}$, можно в самом общем случае получить СН Шредингера “координата-импульс” для броуновской частицы. Для этого достаточно применить неравенство Коши–Буняковского–Шварца в пространстве состояний с заданной плотностью числа частиц $\rho_n(q, t)$. Тогда для любых функций $F(q)$ и $G(q)$ в этом пространстве выполняется соотношение

$$\int dq F^2(q) \rho_n(q) \int dq G^2(q) \rho_n(q) \geq \left[\int dq F(q) G(q) \rho_n(q) \right]^2. \quad (17)$$

В дальнейшем мы ограничимся только такими ситуациями, когда $\bar{q} = 0$ и $\overline{v_{\text{тек}}} = 0$ относительно распределения $\rho_n(q)$. Тогда, выбирая в качестве функций

$$F \equiv q, \quad G \equiv p_{\text{тек}}(q) = m \frac{j_n(q)}{\rho_n(q)}, \quad (18)$$

неравенство (17) можно привести к виду

$$\int dq q^2 \rho_n(q) \int dq p_{\text{тек}}^2(q) \rho_n(q) \geq \left[\int dq (qp_{\text{тек}}(q)) \rho_n(q) \right]^2. \quad (19)$$

Используя введенные ранее обозначения, придадим неравенству (19) с учетом (16) форму, справедливую в произвольный момент времени,

$$\begin{aligned} (\Delta q)^2 (\Delta p_{\text{тек}})^2 &\geq [\overline{(\Delta q \Delta p_{\text{тек}})}]^2 = \left[\int dq \left(q m \frac{j_n(q)}{\rho_n(q)} \right) \rho_n(q) \right]^2 = \\ &= \left[m \int dq q j_n(q) \right]^2 = (m I_n)^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где I_n – момент первого порядка от функции $j_n(q)$. Нетрудно видеть, что выражение $m I_n$ в формуле (20) внешне похоже на выражение (7) с заменой $j_{\text{вер}}$ на j_n .

Для конкретизации полученного СН (20) необходимо только найти две функции $\rho_n(q, t)$, $j_n(q, t)$ и с их помощью вычислить величины, входящие в (20). Чтобы продемонстрировать основные этапы вычисления на более простом примере, ограничимся сначала броуновским движением при больших промежутках времени $t \gg \tau$, что соответствует теории Эйнштейна [11].

В рамках этой теории математической моделью броуновского движения служит винеровский случайный процесс, т.е. нормальный марковский случайный процесс с независимыми приращениями. Как известно [13], [14], в любой момент времени распределение вероятностей для этого процесса имеет гауссову (нормальную) форму, так что соответствующая плотность вероятности удовлетворяет стандартному уравнению диффузии. Проблема нахождения функций $\rho_n(q, t)$ и $j_n(q, t)$ сводится к решению системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial q} &= 0, \\ j_n(q, t) &= -\mathcal{D}_T \frac{\partial \rho_n(q, t)}{\partial q}, \end{aligned} \quad (21)$$

где функция $j_n(q, t)$ выражается через текущую скорость $v_{\text{тек}}(q, t)$ формулой (16). Нетрудно видеть, что первое из этих уравнений – это уравнение непрерывности для плотности броуновских частиц, а второе – закон Фика с коэффициентом диффузии

$$\mathcal{D}_T = \frac{k_B T}{m} \tau = v_T^2 \tau, \quad (22)$$

где v_T – тепловая скорость (15).

Прежде всего, покажем, как, не решая явно систему уравнений (21), можно найти выражение для коррелятора $\sigma_{qp} = \overline{(\Delta q \Delta p)} = m I_n$. Для этого вычислим (при $\bar{q} = 0$) момент первого порядка от второго уравнения (21),

$$I_n = \int dq q j_n(q) = -\mathcal{D}_T \int dq \frac{\partial \rho_n}{\partial q} = \mathcal{D}_T,$$

где мы проинтегрировали по частям, предполагая, что $\rho_n \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \pm\infty$. Тем самым при таком ограничении на функции $\rho_n(q, t)$ при $t \gg \tau$ коррелятор принимает вид

$$\sigma_{qp} = \overline{(\Delta q \Delta p)} = m I_n = m \mathcal{D}_T. \quad (23)$$

Подстановка в систему уравнений (21) второго уравнения в первое превращает его, как и следовало ожидать, в уравнение одномерной диффузии для функции $\rho_n(q, t)$. Его решение имеет стандартный вид нормированной функции распределения

$$\rho_n(q, t) = [2\pi(\Delta q(t))^2]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{q^2}{2(\Delta q(t))^2}\right\}, \quad (24)$$

где согласно [11] дисперсия координаты ансамбля броуновских частиц при $t \gg \tau$ есть

$$(\Delta q(t))^2 = \int dq q^2 \rho_n(q, t) = 2\mathcal{D}_T t, \quad (25)$$

т.е. зависит линейно от времени.

В рамках теории Эйнштейна [11] броуновское движение при отсутствии внешних сил трактуется как однородный по времени диффузионный (марковский) процесс с нулевой дрейфовой скоростью (нулевым дрейфом). В этом случае текущая скорость $v_{\text{тек}}(q, t)$ (16) определяется только плотностью потока броуновских частиц $j_n(q, t)$ (21), входящей в правую часть прямого уравнения Колмогорова [15]. Учитывая формулы (16), (21) и (24), нетрудно получить явную зависимость (при $t \gg \tau$) текущей скорости ансамбля броуновских частиц от случайной координаты q ,

$$v_{\text{тек}}(q, t) = -\mathcal{D}_T \frac{1}{\rho_n(q)} \frac{\partial \rho_n(q)}{\partial q} = \frac{\mathcal{D}_T}{(\Delta q(t))^2} q. \quad (26)$$

Вычисление моментов текущей скорости $v_{\text{тек}}(q, t)$ по функции распределения $\rho_n(q, t)$ (24) показывает, что $\overline{v_{\text{тек}}} = 0$, а ее дисперсия с учетом (25) есть

$$(\Delta v_{\text{тек}}(t))^2 = \overline{v_{\text{тек}}^2} = \int dq v_{\text{тек}}^2(q, t) \rho_n(q, t) = \int dq \frac{q^2}{4t^2} \rho_n(q, t) = \frac{(\Delta q(t))^2}{4t^2} = \frac{\mathcal{D}_T}{2t}. \quad (27)$$

Подставляя полученные выражения (25) для $(\Delta q(t))^2$, (27) для $(\Delta v_{\text{тек}}(t))^2$ и (23) для $I_n = \sigma_{qp}/m$ в общую формулу (20) и переходя в формулах (26) и (27) от $v_{\text{тек}}$ к $p_{\text{тек}}$, нетрудно показать, что СН “координата-импульс” для броуновского движения при $t \gg \tau$ имеет вид строгого равенства

$$(\Delta q(t))^2 (\Delta p_{\text{тек}}(t))^2 = (mI_n)^2 = (m\mathcal{D}_T)^2 = (k_B T \tau)^2. \quad (28)$$

Это означает, что состояние ансамбля, характеризуемое функцией $\rho_n(q, t)$, при $t \gg \tau$ минимизирует соответствующее СН, являясь коррелированно-когерентным состоянием.

Как и следовало ожидать, при $c_{qp} = 0$ и наличии статистической зависимости координаты и сопряженного ей импульса правая часть СН Шредингера (6) определяется только коррелятором $\sigma_{qp} \neq 0$. Существенно, что если для микрочастицы эта величина зависит от постоянной Планка $\hbar$, характеризующей квантовое неконтролируемое воздействие, то в данном случае σ_{qp} зависит от постоянной k_B , характеризующей тепловое неконтролируемое воздействие.

Возвращаясь к выражению (27) для среднеквадратичного отклонения текущей скорости $\Delta v_{\text{тек}}(t)$ и сравнивая его с выражением (25) для среднеквадратичного отклонения координаты $\Delta q(t)$, получим, что

$$\Delta v_{\text{тек}} = \frac{d}{dt}(\Delta q(t)). \quad (29)$$

Таким образом, эти характеристики сопряженных величин в случае броуновского движения связаны соотношением, аналогичным соотношению между мгновенными индивидуальными характеристиками $v(t)$ и $q(t)$ частицы в классической механике, когда они не являются случайными величинами. Этот факт обычно вызывает удивление. Однако он становится вполне объяснимым, если учесть, что и в квантовой механике имеется аналогичная связь, но уже между операторными сопряженными величинами,

$$\Delta \hat{v} = \frac{\Delta \hat{p}}{m} = \frac{d}{dt}(\Delta \hat{q}). \quad (30)$$

По-существу, мы здесь встречаемся со своеобразным аналогом теоремы Эренфеста, но только при переходе от теории броуновского (стохастического) движения к классической (детерминистской) механике.

3. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ БОЛЬШИХ ПРОМЕЖУТКАХ ВРЕМЕНИ

Математическая модель броуновского движения в виде винеровского случайного процесса применима и к описанию движения классических частиц в потенциальном поле [16]. Поэтому проведенное выше рассмотрение при $t \gg \tau$ можно распространить и на броуновское движение линейного гармонического осциллятора с частотой ω_0 , когда потенциальное поле имеет вид $U(q) = m\omega_0^2 q^2/2$. Ограничимся только аperiодическим режимом приближения к тепловому равновесию, который реализуется при выполнении условия $4Q^2 \lesssim 1$, где $Q = \omega_0 \tau$ – добротность осциллятора. Из решения уравнения Фоккера–Планка [14], [16] для нормированной плотности числа осцилляторов $\rho_n(q, t)$ при $t \gg \tau$ получается стандартное выражение, также соответствующее решению уравнения диффузии, в котором теперь

$$(\Delta q(t))^2 = \frac{k_B T}{m\omega_0^2} (1 - e^{-2\omega_0^2 \tau t}). \quad (31)$$

Для удобства анализа выразим (31) через коэффициент диффузии $\mathcal{D}_T$ и добротность Q ,

$$(\Delta q(t))^2 = \mathcal{D}_T \frac{\tau}{Q^2} (1 - e^{-2Q^2 t/\tau}). \quad (32)$$

С учетом условия $t \gg \tau$ в двух наиболее интересных случаях отсюда следует:

$$(\Delta q)^2 \approx \mathcal{D}_T \frac{\tau}{Q^2} \left(2Q^2 \frac{t}{\tau} \right) = 2\mathcal{D}_T t \quad \text{при} \quad Q^2 \ll 1, \quad (33)$$

$$(\Delta q)^2 \approx \mathcal{D}_T \frac{\tau}{Q^2} = \frac{k_B T}{m\omega_0^2} \quad \text{при} \quad Q^2 \lesssim \frac{1}{4}. \quad (34)$$

Первый соответствует режиму броуновского движения свободной частицы, когда зависимость дисперсии координаты от частоты осциллятора ω_0 отсутствует. Второй соответствует режиму теплового равновесия, когда дисперсия координаты определяется распределением Больцмана для гармонического осциллятора, находящегося в среде с температурой T . В этом случае дисперсия $(\Delta q)^2$ не зависит от времени релаксации τ .

При известной дисперсии $(\Delta q)^2$ величины $\Delta p_{\text{тек}}$ и σ_{qp} находятся, как и выше. Имено,

$$\begin{aligned}\Delta p_{\text{тек}} &= m \frac{d}{dt}(\Delta q) = m \sqrt{\frac{\mathcal{D}_T \tau}{Q^2}} \frac{e^{-2Q^2 t/\tau} \frac{Q^2}{\tau}}{[1 - e^{-2Q^2 t/\tau}]^{1/2}} = \\ &= m Q \sqrt{\frac{\mathcal{D}_T}{\tau}} \frac{e^{-2Q^2 t/\tau}}{[1 - e^{-2Q^2 t/\tau}]^{1/2}}; \quad (35)\end{aligned}$$

$$\sigma_{qp} = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\Delta q^2) = m \mathcal{D}_T e^{-2Q^2 t/\tau}. \quad (36)$$

В тех же самых частных случаях имеем

$$\begin{aligned}\Delta p_{\text{тек}} &\rightarrow m \sqrt{\frac{\mathcal{D}_T}{2t}}, \quad \sigma_{qp} \rightarrow m \mathcal{D}_T \quad \text{при} \quad Q^2 \ll 1; \\ \Delta p_{\text{тек}} &\rightarrow 0, \quad \sigma_{qp} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad Q^2 \lesssim \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

С помощью полученных выше выражений запишем СН “координата-импульс” для гармонического осциллятора, совершающего броуновское движение при условии $t \gg \tau$. Оно в данном случае имеет вид равенства

$$(\Delta q)^2 (\Delta p_{\text{тек}})^2 = \sigma_{qp}^2 = [m \mathcal{D}_T e^{-2Q^2 t/\tau}]^2 = [m I_n(t)]^2. \quad (37)$$

Заметим, что при $Q^2 \lesssim 1/4$ правая часть в СН (37) при условии $t \gg \tau$ обращается в нуль, так что корреляция между координатой q и текущим импульсом $p_{\text{тек}}$ исчезает. Последнее соответствует тому, что обращается в нуль поток броуновских частиц, характеризуемый величиной $I_n(t)$. Это, в свою очередь, означает, что всякое движение, отличное от колебаний осциллятора вблизи положения равновесия, в этом пределе можно не учитывать. В другом предельном случае, когда $Q^2 \ll 1$, наоборот, можно не учитывать упругие колебания в поле $U(q)$, так что осциллятор ведет себя подобно свободной броуновской частице.

4. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПРОМЕЖУТКИ ВРЕМЕНИ

Математической моделью такого движения является процесс Орнштейна–Уленбека [17], [18], представляющий собой стационарный гауссовский марковский случайный процесс. Рассмотренная в разделах 2 и 3 модель, называемая винеровским процессом, соответствует описанию броуновского движения в частном случае – в пределе большой вязкости среды и интенсивного шума. Теория броуновского движения при произвольных

промежутках времени основана на строгих решениях либо уравнения Фоккера–Планка, либо уравнения Ланжевена, трактуемого как стохастическое дифференциальное уравнение [14], [17], [18].

Мы покажем, что интересующие нас дисперсии $(\Delta q)^2$, $(\Delta p_{\text{тек}})^2$ и коррелятор σ_{qp} координаты q и текущего импульса $p_{\text{тек}}$ можно получить гораздо более простым приближенным методом. В его основе лежит кинетическое уравнение Крамерса [19], применимое на стадии, когда равновесное состояние по импульсам уже достигнуто,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \rho}{\partial q} = -\frac{\rho - \rho_0}{\tau}, \quad (38)$$

где $\rho(q, p, t)$ – функция распределения в фазовом пространстве (при $U(q) = 0$), а $\rho_0 = \rho(q, p, 0)$.

Как показано в работе [20], переход к уравнениям для нулевого и первого моментов функции распределения $\rho(q, p, t)$ по переменной p приводит к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка для функций $\rho_n(q, t)$ и $j_n(q, t)$,

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial j_n}{\partial q} = 0, \quad (39)$$

$$j_n = -\mathcal{D}_T \frac{\partial \rho_n}{\partial q} - \tau \frac{\partial j_n}{\partial t}. \quad (40)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (39), (40) обобщают систему уравнений (21), справедливую при $t \gg \tau$. Первое из них – это прежнее уравнение непрерывности, а второе представляет собой обобщение закона Фика на случай, когда вязкость среды не слишком велика, т.е. время релаксации τ не слишком мало.

Будем рассматривать систему уравнений (39), (40) как обобщение уравнения диффузии, в котором вклад слагаемого с производной по времени от $j_n(q, t)$ в уравнении (40) играет роль малой поправки. При решении рассматриваемой системы в таком приближении будем опираться на аналогию с точными решениями системы уравнений (21), рассмотренными выше.

Прежде всего, предположим, что функция $\rho_n(q, t)$ в произвольный момент времени по-прежнему имеет вид решения стандартного уравнения одномерной диффузии (24). Однако теперь в нем в качестве дисперсии $(\Delta q(t))^2$ мы будем использовать точное выражение, полученное для произвольных моментов времени t в теории Орнштейна–Уленбека на основе решения уравнения Фоккера–Планка [14], [16]–[18] (при $\bar{q} = 0$),

$$(\Delta q(t))^2 = 2\mathcal{D}_T \tau \left(\frac{t}{\tau} - 1 + e^{-t/\tau} \right). \quad (41)$$

При $t \gg \tau$ формула (41) переходит в формулу Эйнштейна (25).

Для текущей скорости $v_{\text{тек}}(q, t)$, входящей в функцию $j_n(q, t)$, и ее среднеквадратичного отклонения мы сохраним определения (16) и (29). Кроме того, мы по-прежнему будем требовать, чтобы $\overline{v_{\text{тек}}} = 0$, а предельные значения $v_{\text{тек}}$ и $\Delta v_{\text{тек}}$ при $t \gg \tau$ совпадали бы с результатами (26) и (27), соответственно.

С учетом этих соображений в качестве приближенного решения системы уравнений (39), (40), наряду с функцией $\rho_n(q, t)$ вида (24), содержащей $(\Delta q(t))^2$ вида (41), возьмем выражение

$$j_n(q, t) \equiv \rho_n v_{\text{тек}} = \rho_n \left[\mathcal{D}_T (1 - e^{-t/\tau}) \frac{q}{(\Delta q(t))^2} \right], \quad (42)$$

где выражение для текущей скорости $v_{\text{тек}}$ отличается по структуре от предельного выражения (26) только множителем $(1 - e^{-t/\tau})$.

Убедимся теперь в том, что формулы (24) для функции $\rho_n(q, t)$ и (25) для функции $j_n(q, t)$ с $(\Delta q(t))^2$ вида (41) действительно можно рассматривать как приближенное решение системы уравнений (39), (40). Если подставить предполагаемые решения в уравнение (39), то нетрудно убедиться в том, что оно обращается в тождество. Иначе говоря, предложенное решение обеспечивает строгое выполнение уравнения непрерывности при любом значении параметра τ . Что касается уравнения (40), то при подстановке в него приближенного решения оно в тождество не обращается. Однако, по крайней мере, обращаются в нуль три первых момента от уравнения (40) относительно переменной q . Последнее обстоятельство и позволяет трактовать предложенные выше выражения для функций $\rho_n(q, t)$ и $j_n(q, t)$ как приближенное решение уравнения (40).

Особый интерес представляет момент первого порядка I_n от обеих частей уравнения (40), определяющий правую часть СН (20),

$$I_n = \int dq q j_n(q) = -\mathcal{D}_T \int dq q \frac{\partial \rho_n}{\partial q} - \tau \int dq q \frac{\partial j_n}{\partial t}. \quad (43)$$

Нетрудно видеть, что соотношение (43) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $I_n(t)$,

$$I_n(t) = \mathcal{D}_T - \tau \frac{\partial I_n(t)}{\partial t}. \quad (44)$$

Его решение

$$I_n(t) = \mathcal{D}_T (1 - e^{-t/\tau}) \quad (45)$$

не зависит от конкретного выражения для функции $j_n(q, t)$ и потому соответствует точному решению системы уравнений (39), (40).

Исходя из определения (29) и точного выражения (41) для дисперсии координаты, нетрудно получить среднеквадратичное отклонение текущей скорости

$$\Delta v_{\text{тек}} = \frac{d}{dt}(\Delta q(t)) = \frac{\mathcal{D}_T}{\Delta q(t)} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (46)$$

совпадающее с выражением, полученным для той же величины на основе приближенного выражения (42) для случайной функции $v_{\text{тек}}(q, t)$. В пределе $t \gg \tau$ выражение (46), как и ожидалось, переходит в выражение $\Delta v_{\text{тек}}$, определяемое формулой (27).

Таким образом, в произвольный момент времени мы имеем точные выражения (41) для $(\Delta q)^2$ и (45) для I_n , а также приближенное выражение (46) для $\Delta v_{\text{тек}} = \Delta p_{\text{тек}}/m$. Подстановка их в СН “координата-импульс” (21) превращает это соотношение в строгое равенство

$$\Delta q^2 \Delta p_{\text{тек}}^2 = \sigma_{qp}^2 = [m \mathcal{D}_T (1 - e^{-t/\tau})]^2 \quad (47)$$

(по-видимому, в точном решении знак равенства заменится на знак $\geq$).

5. СРАВНИТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЙ СВОБОДНОЙ МИКРОЧАСТИЦЫ В ВАКУУМЕ И БРОУНОВСКОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Как известно, в течение многих десятилетий предпринимались попытки представить квантовую механику как своеобразную классическую статистическую механику, отрицая тем самым ее первичный фундаментальный характер. Одним из направлений было истолкование квантовой динамики как некоего процесса диффузии с квантовым коэффициентом диффузии $\mathcal{D}_{\text{кв}} = \hbar/2m$, поскольку для свободной микрочастицы уравнение Шредингера в одномерном случае нетрудно представить в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\mathcal{D}_{\text{кв}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}. \quad (48)$$

Уравнение (48) действительно имеет вид уравнения диффузии для волновой функции $\psi(q, t)$, но с чисто мнимым коэффициентом диффузии $i\mathcal{D}_{\text{кв}}$, что в корне меняет дело. Качественное различие между решениями уравнения диффузии с вещественным и чисто мнимым коэффициентами состоит в том, что первое из них относится к параболическому типу и описывает необратимый процесс приближения к состоянию равновесия с плотностью $\rho_{\text{н}}(q, t)$, тогда как второе, относящееся фактически к гиперболическому типу, — обратимый процесс эволюции волновой функции $\psi(q, t)$. Дополнительные трудности в анализе этого вопроса возникли в связи с появлением стохастической механики Нельсона [18] в качестве еще одного варианта квантовой механики и с последовательным применением параллельно с нею теории стохастических уравнений к описанию броуновского движения классических частиц при любых промежутках времени [13], [18].

На самом деле, несмотря на свое название, стохастическая механика по своим результатам в простейших случаях полностью эквивалентна квантовой механике и является столь же обратимой во времени теорией. В то же время современная формулировка теории броуновского движения [13], [18] — это всего лишь математически более строгая версия этой теории. Она эквивалентна по своим результатам исходным теориям Эйнштейна и Ориштейна–Уленбека, основанным на необратимых уравнениях Фоккера–Планка или Ланжевена. По этой причине, хотя и квантовая механика, и теория броуновского движения могут быть сегодня изложены формально на одном и том же “стохастическом” языке, говорить изначально о том, что эти две теории эквивалентны друг другу, нет никаких оснований.

Вместе с тем исследование общего и различного в квантовой механике и теории броуновского движения представляет несомненный интерес с точки зрения места этих теорий в физике в целом и выяснения особенностей корреляций в них флуктуаций сопряженных физических величин. Тем более, что в обеих теориях возможны коррелированные-когерентные состояния, обращающие соответствующие СН Шредингера в строгие равенства. В данном разделе мы рассмотрим эту проблему подробнее, используя стохастическую механику просто в качестве другой, более удобной для сопоставления с теорией броуновского движения, версии квантовой механики.

Следуя Нельсону [18], модуль обобщенного коррелятора (ковариации), входящий в правую часть СН Шредингера (6) “координата-импульс”, в стохастической механике

можно представить в виде [10]

$$|\tilde{R}_{qp}| = (\sigma_{qp}^2 + c_{qp}^2)^{1/2} = m\{\overline{(qv)}^2 + \overline{(qu)}^2\}^{1/2}, \quad (49)$$

где $\overline{qv}$ и $\overline{qu}$ обозначают корреляторы, усредненные с плотностью вероятности $\rho_{\text{вер}}(q)$ при $\bar{q} = 0$, $\bar{v} = 0$, $\bar{u} = 0$. Входящие в правую часть (49) скорости $v \equiv v_{\text{тек}}$ и $u \equiv u_{\text{осм}}$ согласно Нельсону называются текущей и осмотической скоростями микрочастицы, соответственно,

$$v_{\text{тек}} = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \varphi(q)}{\partial q}, \quad u_{\text{осм}} = -\mathcal{D}_{\text{кв}} \frac{1}{\rho_{\text{вер}}(q)} \frac{\partial \rho_{\text{вер}}(q)}{\partial q}. \quad (50)$$

Тем самым первое слагаемое в обобщенном корреляторе (49) соответствует вкладу от фазы, а второе – вкладу от амплитуды волновой функции, причем в любом случае

$$m\overline{qu} = m\mathcal{D}_{\text{кв}} = \frac{\hbar}{2}.$$

Как следует из формулы (14), для свободной микрочастицы в вакууме в состоянии гауссова волнового пакета выражение (49) принимает вид

$$|\tilde{R}_{qp}| = m\mathcal{D}_{\text{кв}} \left(1 + \frac{t^2}{\tau_{\text{кв}}^2}\right)^{1/2}. \quad (51)$$

В то же время правая часть аналогичного СН для свободной броуновской частицы при произвольных значениях t с учетом (45) имеет вид

$$\sigma_{qp} = mI_{\text{n}} = m\overline{(qv_{\text{тек}})} = m\mathcal{D}_T(1 - e^{-t/\tau}). \quad (52)$$

Нетрудно видеть, что выражения (51) и (52) резко отличаются в произвольные моменты времени и особенно при больших временах $t \gg \tau$.

В последнем случае для свободной броуновской частицы $\sigma_{qp} \approx m\mathcal{D}_T$. Для свободной микрочастицы близкое по виду выражение, наоборот, имеет место при очень малых временах $t \ll \tau_{\text{кв}}$, когда $|\tilde{R}_{qp}| \approx m\mathcal{D}_{\text{кв}}$. Таким образом, как заметил еще Нельсон [18], движение свободной микрочастицы в квантовой динамике можно было бы интерпретировать как броуновское движение лишь в том случае, если приписать “эффиру” бесконечную вязкость ($\tau \rightarrow 0$), что, конечно, физически бессмысленно.

Последнее нетрудно понять, если сравнить определения (50) текущей и осмотической скоростей $v_{\text{тек}}$ и $u_{\text{осм}}$ в стохастической механике и определение (26) текущей скорости $v_{\text{тек}}$ в теории броуновского движения (при $t \gg \tau$). Сравнение показывает, что текущая скорость броуновской частицы больше похожа на осмотическую скорость $u_{\text{осм}}$ микрочастицы, связанную с амплитудой волновой функции, а вовсе не на текущую скорость $v_{\text{тек}}$ микрочастицы, связанную с ее фазой и определяющую в стохастической механике плотность потока $j_{\text{вер}} = \rho_{\text{вер}} v_{\text{тек}}$.

Вместе с тем, поскольку другие величины той же размерности в теории броуновского движения не рассматриваются, плотность потока броуновских частиц $j_{\text{n}} = \rho_{\text{n}} v_{\text{тек}}$

приходится определять через ту же текущую скорость $v_{\text{тек}}$. Иными словами, для броуновских частиц одна и та же величина исполняет роли и текущей скорости $v_{\text{тек}}$, связанной с фазой, и осмотической скорости $u_{\text{осм}}$, связанной с амплитудой волновой функции микрочастицы.

С учетом проведенного исследования различий двух теорий обратимся вновь к сравнению формул (51) и (52) и выясним, не существует ли промежутка времени, общего для обеих моделей, в течение которого эти две качественно различные теории дают одинаковые результаты. Для этого, прежде всего, проанализируем броуновское движение в другом предельном случае, когда $t \ll \tau$. Тогда из формул (41), (46) и (47) получим

$$\Delta q^2 \approx v_T^2 t^2, \quad \Delta p_{\text{тек}}^2 = (m \Delta v_{\text{тек}})^2 \approx m^2 v_T^2, \quad (53)$$

$$\sigma_{qp} \approx m v_T^2 t, \quad (54)$$

где v_T – тепловая скорость (15), играющая роль скорости распывания начального распределения броуновских частиц.

Анализируя этот предельный случай броуновского движения, отметим, что при $t \rightarrow 0$ выражение (54) для σ_{qp} стремится к нулю. Иначе говоря, в этом пределе любая корреляция координаты q и текущего импульса $p_{\text{тек}}$, совпадающего с тепловым импульсом $p_T = m v_T$, отсутствует. Это означает, что пока неконтролируемое тепловое воздействие среды можно не учитывать, величины q и $p_{\text{тек}} \approx p_T$ являются статистически независимыми. Напомним, что для микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета при $t \rightarrow 0$ также $\sigma_{qp} \rightarrow 0$, и поэтому модуль обобщенного коррелятора $|\tilde{R}_{qp}|$ согласно (14) стремится к $\hbar/2$. В этом пределе у нее наблюдается сугубо квантовая корреляция, обеспечивающая качественное различие двух рассматриваемых моделей.

Ниже мы ограничимся анализом свойств этих моделей исключительно во временном интервале

$$\tau_{\text{кв}} \ll t \ll \tau. \quad (55)$$

В этом случае распывание гауссова волнового пакета уже достаточно велико, так что его начальной шириной b можно пренебречь. В то же время ансамбль броуновских частиц еще далек от релаксации к полному равновесию, если при этом вязкость среды достаточно мала.

Выпишем теперь для сравнения аналогичные формулам (53) и (54) формулы для микрочастицы в состоянии гауссова пакета, справедливые во временном интервале (55). Из соотношений (11), (12), (14) в этом пределе получим

$$(\Delta q)^2 \approx v_{\text{кв}}^2 t^2, \quad \Delta p^2 = (m v_{\text{кв}})^2, \quad (56)$$

$$|\tilde{R}_{qp}| \approx \sigma_{qp} = m v_{\text{кв}}^2 t. \quad (57)$$

Нетрудно видеть, что две совокупности формул (56), (57) и (53), (54) имеют полное внешнее сходство. Тем самым характер корреляции флуктуаций координаты и сопряженного с ней импульса, возникающей при квантовом и тепловом воздействии, соответственно, оказывается совершенно одинаковым (с заменой скорости распывания $v_{\text{кв}}$

на v_T). При этом в обеих моделях системы находятся приблизительно в коррелированно-когерентных состояниях, обеспечивающих обращение СН “координата-импульс” в равенство.

Однако с принципиальной точки зрения это ничего не меняет. Выражение (57) для $|\tilde{R}_{qp}|$ в стохастической механике, как было показано выше, определяется вкладом фазы волновой функции. В то же время выражение (54) для σ_{qp} в теории броуновского движения определяется вкладом плотности числа частиц (аналогом амплитуды волновой функции), полученным из обобщенного закона Фика (40). По-существу, мы имеем дело с ситуацией, типичной для квазиклассического приближения, когда в некоей области две качественно различные теории дают совпадающие по форме результаты.

Итоги проведенного сопоставления описаний движения свободной микрочастицы в состоянии гауссова волнового пакета и броуновского движения классической частицы содержатся в таблице.

Модель	Промежуток времени	
	$t \ll \tau_{\text{кв}}$ или τ	$t \gg \tau_{\text{кв}}$ или τ
Микрочастица (гауссов пакет)	$ \tilde{R}_{qp} \approx m\mathcal{D}_{\text{кв}} = \frac{\hbar}{2}$	$ \tilde{R}_{qp} \approx mv_{\text{кв}}^2 t$
Броуновская классическая частица	$\sigma_{qp} \approx mv_T^2 t$	$\sigma_{qp} \approx m\mathcal{D}_T = k_B T \tau$

Из таблицы следует, что корреляции флуктуаций в этих моделях имеют много общих черт. Тем самым теория броуновского (стохастического) движения классической частицы концептуально гораздо ближе к квантовой механике, чем к классической (детерминистской) механике. В то же время эти модели в каком-то смысле альтернативны. Иными словами, движение микрочастицы при малых временах качественно аналогично броуновскому движению при больших временах и наоборот. Последнее с физической точки зрения вполне объяснимо и отражает существующее различие в типах неконтролируемого воздействия. Неконтролируемое квантовое воздействие, определяемое постоянной Планка, существенно уже при $t = 0$. С увеличением t описание переходит в квазиклассическую область, когда роль собственно квантовых эффектов ослабляется. В то же время неконтролируемое тепловое воздействие, определяемое постоянной Больцмана, при малых временах проявляет себя недостаточно, ибо процесс стохастизации тогда только начинается. Однако в пределе $t \gg \tau$ оно проявляет себя в полной мере.

С этой точки зрения представляет интерес более подробное исследование броуновского движения *микрочастицы*, когда оба типа неконтролируемых воздействий, определяемые постоянными $\hbar$ и k_B , могут проявлять себя совместно и равноправно. Предварительный анализ, проведенный в работе [21], показал следующее. По крайней мере, на промежутках времени (55), когда $t \sim \tau_{\text{пор}} = \hbar/2k_B T$, где $\tau_{\text{пор}}$ – характерное время, при котором качественно меняется характер неконтролируемого воздействия, выражение для модуля обобщенного коррелятора принимает вид

$$|\tilde{R}_{qp}| \approx \left\{ (k_B T \tau)^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right\}^{1/2}. \quad (58)$$

Тем самым в этих условиях решение вопроса о том, определяется ли корреляция флуктуаций координаты и импульса *микрочастицы* преимущественно постоянными Планка или Больцмана, зависит от значений *макропараметров* – температуры термостата T и времени релаксации к тепловому равновесию τ , определяемому вязкостью окружающей броуновскую частицу среды.

Благодарности. Автор благодарит А. И. Оксака и участников семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” в ИФВЭ и семинара в Санкт-Петербургском отделении МИАН за плодотворную дискуссию, а также О. Н. Голубеву за помощь в окончательном редактировании рукописи.

Список литературы

- [1] В. Гейзенберг. УФН. 1977. Т. 122. № 4. С. 657.
- [2] I. Fenyés. Z. Phys. 1952. V. 132. P. 81; рус. пер. И. Феньеш. Теоретико-вероятностное обоснование и истолкование квантовой механики. В сб.: Вопросы причинности в квантовой механике. Ред. Я. П. Терлецкий, А. А. Гусев. М.: ИЛ, 1955. С. 244.
- [3] J. Uffink, J. van Lith. Found. Phys. 1998. V. 28. P. 323.
- [4] Ю. Г. Рудой, А. Д. Суханов. УФН. 2000. Т. 170. № 12. С. 1265.
- [5] А. Д. Суханов. К столетию неклассической физики. В сб.: Труды международной конференции “100 лет квантовой теории. История. Физика. Философия” (Москва, декабрь, 2000). Ред. Е. А. Манчур. М.: НИИ-Природа, 2002. С. 39.
- [6] В. Гейзенберг. Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989.
- [7] Э. Шредингер. К принципу неопределенности Гейзенберга. В сб.: Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. С. 210.
- [8] В. В. Додонов, В. И. Манько. Тр. ФИАН. 1987. Т. 183. С. 5.
- [9] А. Д. Суханов. ЭЧАЯ. 2001. Т. 32. № 5. С. 1177.
- [10] А. Д. Суханов. ТМФ. 2002. Т. 132. № 3. С. 449.
- [11] А. Эйнштейн. К теории броуновского движения. В сб.: Собрание научных трудов. Т. III. М.: Наука, 1966. С. 118.
- [12] R. Führrth. Z. Phys. 1933. V. 81. P. 143.
- [13] М. Кац. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
- [14] С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ, 1947.
- [15] А. Н. Колмогоров. Теория вероятности и математическая статистика. М.: Наука, 1986.
- [16] А. И. Ансельм. Основы статистической физики и термодинамики. М.: Наука, 1973.
- [17] L. S. Ornstein, G. E. Uhlenbeck. Phys. Rev. 1930. V. 36. P. 823.
- [18] E. Nelson. Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 1079; Dynamical Theory of Brownian Motion. Princeton, N. Y.: Princeton Univ. Press, 1967.
- [19] H. A. Kramers. Physica. 1940. V. 7. P. 284.
- [20] E. Guth. Adv. Chem. Phys. 1969. V. 15. P. 363.
- [21] А. И. Оксак, А. Д. Суханов. ТМФ. 2003. Т. 136. № 1. С. 115.