Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Клейн, О точном релятивистском рассмотрении стационарных противоположно вращающихся пылевых дисков. II. Ось, диск и предельные случаи, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 418–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:38:06

© 2001 г.

К. Клейн*

О ТОЧНОМ РЕЛЯТИВИСТСКОМ РАССМОТРЕНИИ
СТАЦИОНАРНЫХ ПРОТИВОПОЛОЖНО
ВРАЩАЮЩИХСЯ ПЫЛЕВЫХ ДИСКОВ.
II. ОСЬ, ДИСК И ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Продолжено исследование конструкции явных решений стационарных аксиально-симметричных уравнений Эйнштейна, допускающих интерпретацию в виде вращающихся в противоположных направлениях пылевых дисков. Обсуждается построенный ранее класс решений для дисков с постоянной угловой скоростью и постоянной относительной плотностью. Метрика для такого пространства-времени дается в терминах тета-функций на римановой поверхности рода 2. Обсуждаются метрические функции на оси симметрии и на диске. Интересными предельными случаями решений являются ньютоновский, статический и ультрарелятивистский пределы (в последнем центральное красное смещение расходится).

1. ВВЕДЕНИЕ

Стационарные аксиально-симметричные уравнения Эйнштейна имеют огромное физическое значение, поскольку их решения могут описывать гравитационное поле звезд и галактик в термодинамическом равновесии. В этом случае материю можно рассматривать как идеальную жидкость, но полевые уравнения в области материи не являются, по-видимому, интегрируемыми. Вакуумные уравнения, однако, эквивалентны уравнениям Эрнста [1], которые полностью интегрируемы [2]–[4]. Если рассматривать двумерные распределения материи в виде дисков (как принимается в моделях вещества в галактиках или в аккреционных дисках вокруг черных дыр), то можно получить задачу с граничными условиями для вакуумных уравнений. Решение этой задачи с граничными условиями приводит к глобальному решению уравнений Эйнштейна, которое выполнено в области как материи, так и вакуума.

Нейгебауер и Майнел [5] обнаружили, что первое аналитическое решение для стационарного диска принадлежит к алгебро-геометрическим решениям Короткина [6] уравнения Эрнста. Систематическое изучение этих решений [7], [8] позволило выделить

*Laboratoire de Gravitation et Cosmologie Relativistes, Université P. et M. Curie, Paris, France

класс решений, которые можно интерпретировать как два соосных противоположно вращающихся диска, состоящих из пыли [9]. В первой статье настоящей серии [10] (далее именуемой ч. I) обсуждались следствия для граничных условий на диске, выводимые из свойств римановой поверхности. Это дало возможность построить решение [9] и указать область физических параметров, в которой решение является глобально регулярным, за исключением диска, для которого заданы граничные значения.

2. ПОТЕНЦИАЛ ЭРНСТА И МЕТРИКА

Суммируем кратко результаты ч. I. Мы используем метрику Вейля–Льюиса–Паппетру (см., например, [11])

$$ds^2 = -e^{2U}(dt + a d\phi)^2 + e^{-2U}(e^{2k}(d\rho^2 + d\zeta^2) + \rho^2 d\phi^2), \quad (2.1)$$

где ρ и ζ – канонические координаты Вейля. Векторные поля ∂_t и ∂_ϕ – соответствующие коммутирующие асимптотически времениподобные и пространственноподобные векторы Киллинга (подробнее об обозначениях см. ч. I). При $z = \rho + i\zeta$ и для потенциала b , определяемого формулой

$$b_z = -\frac{i}{\rho}e^{4U}a_z,$$

где $b \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, введем комплексный потенциал Эрнста $f = e^{2U} + ib$, который подчинен уравнению Эрнста [1]

$$f_{z\bar{z}} + \frac{1}{2(z + \bar{z})}(f_{\bar{z}} + f_z) = \frac{2}{f + \bar{f}}f_z f_{\bar{z}},$$

где черта означает комплексное сопряжение в $\mathbb{C}$. Метрическая функция k получается из соотношения

$$k_z = 2\rho \frac{f_z \bar{f}_z}{(f + \bar{f})^2}. \quad (2.2)$$

В ч. I мы рассмотрели диски, которые можно интерпретировать как две вращающиеся в противоположных направлениях компоненты материи без давления – так называемую пыль. Поверхностный тензор энергии-импульса этих моделей определен на гиперповерхности $\zeta = 0$. Его можно записать в виде

$$S^{\mu\nu} = \sigma_+ u_+^\mu u_+^\nu + \sigma_- u_-^\mu u_-^\nu, \quad (2.3)$$

где индексы μ и ν обозначают t , ρ и ϕ компоненты, а $u_\pm = (1, 0, \pm\Omega)$. Мы привели явное решение для дисков с постоянной угловой скоростью Ω и постоянной относительной плотностью $\gamma = (\sigma_+ - \sigma_-)/(\sigma_+ + \sigma_-)$. Этот класс решений характеризуется двумя вещественными параметрами λ и δ , которые связаны с Ω и γ и метрическим потенциалом U_0 в центре диска как

$$\lambda = 2\Omega^2 e^{-2U_0}, \quad \delta = \frac{1 - \gamma^2}{\Omega^2}. \quad (2.4)$$

Мы полагаем радиус диска ρ_0 равным единице, если не оговорено противное. Поскольку радиус появляется в физических величинах только в комбинациях ρ/ρ_0 , ζ/ρ_0 и $\Omega\rho_0$, он

не играет независимой роли. Всегда можно использовать его как естественный масштаб длины, если только он не стремится к нулю как в случае ультрарелятивистского предела однокомпонентного диска.

Решение уравнений Эрнста, рассматриваемое в данной работе, задается на гиперэллиптической римановой поверхности Σ_2 рода 2, определяемой алгебраическими соотношениями

$$\mu^2(K) = (K + iz)(K - i\bar{z}) \prod_{i=1}^2 (K - E_i)(K - \bar{E}_i).$$

Положим $\operatorname{Re} E_1 < 0$, $\operatorname{Im} E_i < 0$ и $E_1 = -\bar{E}_2$ при $\bar{E}_2 = \alpha_1 + i\beta_1$. Мы используем систему разрезов, показанную на рисунке. Базисной точкой отображения Абеля ω является $P_0 = -iz$.

Основной результат ч. I состоял в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $0 \leq \delta \leq \delta_s(\lambda) := 2(1 + \sqrt{1 + 1/\lambda^2})$ и $0 < \lambda \leq \lambda_c$, где $\lambda_c(\gamma)$ – наименьшее положительное значение λ , при котором $e^{2U_0} = 0$. Пусть $E_1^* = \alpha + i\beta$, где

$$\alpha = -1 + \frac{\delta}{2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \delta - \frac{\delta^2}{4}}$$

вещественны. Тогда решение уравнения Эрнста для тензора энергии-импульса вида (2.3) с постоянными Ω и γ можно записать как

$$f(\rho, \zeta) = \frac{\Theta[m](\omega(\infty^+) + u)}{\Theta[m](\omega(\infty^+) - u)} e^I, \quad (2.5)$$

где

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G(\tau) d\omega_{\infty^+ \infty^-}(\tau), \quad u_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega_i,$$

Γ есть накрытие мнимой оси на положительном листе Σ_2 между $-i$ и i , характеристика имеет вид

$$[m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a

$$G(\tau) = \frac{\sqrt{(\tau^2 - \alpha)^2 + \beta^2} + \tau^2 + 1}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha)^2 + \beta^2} - (\tau^2 + 1)}. \quad (2.6)$$

Отметим, что при заданных α и β риманова поверхность полностью определяется в данной точке пространства-времени, т.е. для данного значения P_0 . В отличие от алгебро-геометрических решений нелинейных эволюционных уравнений, она зависит от физических координат исключительно через точки ветвления P_0 и $\bar{P}_0$. Поскольку важны только модулярные свойства тэта-функций, то решения не являются ни периодическими, ни квазипериодическими. Полную метрику (2.1) можно выразить через тэта-функции.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть характеристики $[n_i]$ имеют вид

$$[n_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [n_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда функцию e^{2U} можно записать как

$$e^{2U} = \frac{\Theta[n_1](u)\Theta[n_2](u)}{\Theta[n_1](0)\Theta[n_2](0)} \frac{\Theta[n_1](\omega(\infty^-))\Theta[n_2](\omega(\infty^-))}{\Theta[n_1](\omega(\infty^-) + u)\Theta[n_2](\omega(\infty^-) + u)} e^I. \quad (2.7)$$

Метрическая функция a определяется формулой

$$(a - a_0)e^{2U} = -\rho \left(\frac{\Theta[n_1](0)\Theta[n_2](0)}{\Theta[n_1](\omega(\infty^-))\Theta[n_2](\omega(\infty^-))} \times \right. \\ \left. \times \frac{\Theta[n_1](u)\Theta[n_2](u + 2\omega(\infty^-))}{\Theta[n_1](u + \omega(\infty^-))\Theta[n_2](u + \omega(\infty^-))} - 1 \right), \quad (2.8)$$

где постоянная $a_0 = -\gamma/\Omega$ определяется условием обращения функции a в нуль на регулярной части оси u на бесконечности. Метрическая функция e^{2k} имеет вид

$$e^{2k} = C \frac{\Theta[n_1](u)\Theta[n_2](u)}{\Theta[n_1](0)\Theta[n_2](0)} \times \\ \times \exp \left(\frac{2}{(4\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} dK_1 dK_2 h(K_1)h(K_2) \ln \frac{\Theta_o(\omega(K_1) - \omega(K_2))}{K_1 - K_2} \right), \quad (2.9)$$

где Θ_o — тэта-функция с нечетной характеристикой, $h(\tau) = \partial_{\tau} \ln G(\tau)$, а C — постоянная, определяемая условием обращения k в нуль на регулярной части оси u на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Метрический потенциал e^{2U} является просто вещественной частью потенциала Эрнста и может быть записан [8] в виде (2.7) с использованием тройного тождества Фейя [12]. Короткин [6] получил выражение для метрической функции a через производные тэта-функций по аргументу. В работе [8] эта формула была записана в виде (2.8) без производных с использованием тройного тождества. Метрическая функция e^{2k} связана с так называемой τ -функцией линейной системы, ассоциированной с уравнением Эрнста [13]. Эта связь позволяет явно выразить k из соотношения (2.9) через тэта-функции [14].

3. ОСИ И ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ

Интересно рассмотреть величины теории непосредственно на оси симметрии, поскольку мультипольные моменты, подобные массе Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ), и момент импульса можно получить из потенциала Эрнста на оси. Точки ветвления P_0 и $\bar{P}_0$ совпадают на оси, а поэтому риманова поверхность становится сингулярной и некоторые из периодов расходятся. Однако потенциал Эрнста регулярен на оси вне диска. Доказательство этого основано на результатах Фей [12] и Ямады [15] и приведено в работе [8]. Эллиптические тэта-функции обозначаются через ϑ_i , где i принимает значение 1, 2, 3 или 4 для характеристик

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

соответственно. Замечая, что a_0 и C определены условием, что метрические функции a и k обращаются в нуль на регулярной части оси, можно суммировать результаты в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.1. *Отметим штрихом величины, определенные на эллиптической римановой поверхности Σ' , задаваемой уравнением $\mu'^2(\tau) = (\tau^2 - \alpha)^2 + \beta^2$. Тогда потенциал Эрнста на оси при $\zeta > 0$ имеет вид*

$$f(0, \zeta) = \frac{\vartheta_4\left(\int_{\zeta^+}^{\infty^+} d\omega' + u'_1\right) - e^{-\omega_2(\infty^+) - u_2} \vartheta_4\left(\int_{\zeta^-}^{\infty^+} d\omega' + u'_1\right)}{\vartheta_4\left(\int_{\zeta^+}^{\infty^+} d\omega' - u'_1\right) - e^{-\omega_2(\infty^+) + u_2} \vartheta_4\left(\int_{\zeta^-}^{\infty^+} d\omega' - u'_1\right)} e^{I' + u_2}, \quad (3.1)$$

где $d\omega_1 = d\omega'$, $d\omega_2 = d\omega'_{\zeta^+ - \zeta^-}$,

$$u_i = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega_i, \quad I' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega'_{\infty^+ \infty^-},$$

а вещественная часть потенциала Эрнста

$$e^{2U} = \frac{\vartheta_4^2(u)}{\vartheta_4^2(0)} \frac{\vartheta_4^2\left(\int_{\zeta^+}^{\infty^-} d\omega'\right) - e^{-2\omega_2(\infty^-)} \vartheta_4^2\left(\int_{\zeta^-}^{\infty^-} d\omega'\right)}{\vartheta_4^2\left(u + \int_{\zeta^+}^{\infty^-} d\omega'\right) - e^{-2\omega_2(\infty^-) - 2u_2} \vartheta_4^2\left(u + \int_{\zeta^-}^{\infty^-} d\omega'\right)}. \quad (3.2)$$

Постоянную a_0 можно записать через тэта-функции как

$$a_0 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \frac{\vartheta_4^4(0)}{\vartheta_3^2(\omega(\infty^-)) \vartheta_4^2(\omega(\infty^-))} \frac{\vartheta_4(u + 2\omega(\infty^-))}{\vartheta_4(u)} e^{-I'}, \quad (3.3)$$

а постоянную C –

$$\frac{1}{C} = \frac{\vartheta_4^2(u')}{\vartheta_4^2(0)} \exp\left(\frac{2}{(4\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} dK_1 dK_2 h(K_1) h(K_2) \ln \frac{\vartheta_1(\omega'(K_1) - \omega'(K_2))}{K_1 - K_2}\right). \quad (3.4)$$

Потенциал Эрнста на оси можно использовать для определения потенциала Эрнста e^{2U_0} в начале координат, который связан с красным смещением $z_R = e^{-U_0} - 1$ фотонов, испущенных из центра диска и детектируемых на бесконечности. Поверхность Σ' допускает инволюцию $\tau \rightarrow -\tau$, откуда

$$\int_{0+}^{\infty+} d\omega' \equiv \frac{\pi'}{2}, \quad \int_{0-}^{\infty+} d\omega' \equiv i\pi,$$

где символ $\equiv$ означает “равны с точностью до периодов”, а $\pi' - b$ -период Σ' . Аналогичным образом имеем $u'_1 = 2I'$ и $u_2 = \ln G(0)/2 + I'$, где интеграл u_2 понимается в смысле главного значения (что приводит к появлению половины вычета). Используя

$$e^{-\omega_2(\infty+)} = -\frac{\vartheta_1\left(\int_{0+}^{\infty+} d\omega'\right)}{\vartheta_1\left(\int_{0-}^{\infty+} d\omega'\right)}$$

и $G(0) = (\sqrt{1+\lambda^2} + \lambda)^2$, получаем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Потенциал Эрнста f_0 в центре диска имеет вид*

$$f_0 = \frac{(\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda)X - 1}{\sqrt{1+\lambda^2} - \lambda + X},$$

где

$$X = \frac{\vartheta_3(u'_1)\vartheta_4(0)}{\vartheta_1(u'_1)\vartheta_2(0)}$$

— чисто мнимая величина.

Массу АДМ M и момент импульса J пространства-времени можно получить, разлагая осевой потенциал (3.1) в окрестности бесконечности. Вещественная часть потенциала Эрнста при $\epsilon < 1$ имеет вид $e^{2U} = 1 - 2M/\zeta + o(1/\zeta)$, а мнимая $-b = 2J/\zeta^2 + o(1/\zeta^2)$ (см., например, [16]).

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Масса АДМ дается формулой*

$$M = -D_{\infty-} \ln \vartheta_4(u') - \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega_{1,\infty+},$$

а момент импульса —

$$J = -\frac{\gamma}{\Omega} \left(D_{\infty-} \ln \vartheta_4(u') + D_{\infty-} \ln \vartheta_2(u') + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega_{1,\infty+} \right),$$

где $D_P F(\omega(P))$ — коэффициент при линейном члене в разложении функции F по локальному параметру в окрестности P .

Поскольку нас интересуют лишь положительные значения ζ , риманова поверхность может быть сингулярной, только если точка P_0 совпадает с $\bar{P}_0$, т.е. на оси, или совпадает с E_2 . Тогда, как и на оси, несколько периодов римановой поверхности расходятся. С использованием тех же методов, что и для оси, в работе [8] было доказано, что потенциал Эрнста и метрические функции регулярны в этой точке.

ТЕОРЕМА 3.2. *Отметим двумя штрихами величины, определенные на римановой поверхности Σ'' рода 0, заданной уравнением $\mu''^2(\tau) = (\tau - E_1)(\tau - \bar{E}_1)$. Тогда при $P_0 = E_2$ дифференциалы на Σ_2 редуцируются к дифференциалам на Σ'' , $d\omega_1 = d\omega''_{E_2^- E_2^+}$, $d\omega_2 = d\omega''_{\bar{E}_2^- \bar{E}_2^+}$ и*

$$I = I'' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega''_{\infty^+ \infty^-}.$$

Потенциал Эрнста имеет вид

$$f = \frac{\operatorname{sh} \frac{\omega_1(\infty^+) + u_1}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\omega_1(\infty^+) - u_1}{2}} e^{I''},$$

функция a получается из

$$(a - a_0)e^{2U} = \rho \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi_{12}}{4}}{\operatorname{sh} \frac{\omega_1(\infty^+)}{2} \operatorname{sh} \frac{\omega_2(\infty^+)}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{\frac{\pi_{12}}{4}} \operatorname{ch} \frac{u_1 + u_2 + 2\omega_1(\infty^+) + 2\omega_2(\infty^+)}{2} - e^{-\frac{\pi_{12}}{4}} \operatorname{ch} \frac{u_1 - u_2 + 2\omega_1(\infty^+) - 2\omega_2(\infty^+)}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{u_1 - \omega_1(\infty^+)}{2} \operatorname{sh} \frac{u_2 - \omega_2(\infty^+)}{2}} - 1 \right),$$

а функция e^{2k} дается формулой

$$e^{2k} = C \frac{e^{\frac{\pi_{12}}{4}} \operatorname{ch} \frac{u_1 + u_2}{2} - e^{-\frac{\pi_{12}}{4}} \operatorname{ch} \frac{u_1 - u_2}{2}}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi_{12}}{4}} \times \\ \times \exp \left(\left(\frac{1}{4\pi i} \right)^2 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{dK_1 dK_2}{(K_1 - K_2)^2} \ln G(K_1) \ln G(K_2) \times \right. \\ \left. \times \left(\sqrt{\frac{(K_1 - E_1)(K_2 - \bar{E}_1)}{(K_1 - \bar{E}_1)(K_2 - E_1)}} + \sqrt{\frac{(K_1 - \bar{E}_1)(K_2 - E_1)}{(K_1 - E_1)(K_2 - \bar{E}_1)}} - 2 \right) \right).$$

4. МЕТРИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ НА ДИСКЕ

В экваториальной плоскости риманова поверхность Σ_2 имеет дополнительную инволюцию $\tau \rightarrow -\tau$, которая позволяет выразить потенциал Эрнста в терминах эллиптических функций [8]. В ч. I было показано, что существуют алгебраические соотношения между вещественной и мнимой частями потенциала Эрнста, функции $Z := (a - a_0)e^{2U}$ и их односторонние производные на диске ($\lim_{\zeta \rightarrow 0, \zeta > 0}$ и $\rho \leq 1$). Саму функцию e^{2U} можно выразить через эллиптические тэта-функции на поверхности Σ_w , определенной уравнением $\mu_w^2 = (\tau + \rho^2)((\tau - \alpha)^2 + \beta^2)$. Разрежем поверхность так, что разрез a является

замкнутым контуром на верхнем листе вокруг разреза $[-\rho^2, \overline{E}]$, а разрез b начинается от разреза $[\infty, E]$. Отображение Абеля w определено при $P \in \Sigma_w$ как

$$w(P) = \int_{\infty}^P dw.$$

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть

$$u_w = \frac{1}{i\pi} \int_{-\rho^2}^{-1} \ln G(\sqrt{\tau}) dw(\tau).$$

Тогда вещественная часть потенциала Эрнста на диске дается формулой

$$\begin{aligned} e^{2U} = & \frac{1}{Y - \delta} \left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{Y}{\delta} \left(\frac{\frac{1}{\lambda^2} + \delta}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2}} - \frac{1}{\lambda} \right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{Y^2((\rho^2 + \alpha)^2 + \beta^2)}{\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2} - 2Y(\rho^2 + \alpha) + \frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$Y = \frac{\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2}{\sqrt{(\rho^2 + \alpha)^2 + \beta^2}} \frac{\vartheta_3^2(u_w)}{\vartheta_1^2(u_w)}. \quad (4.2)$$

На диске выполнены соотношения

$$\frac{\delta^2}{2}(e^{4U} + b^2) = \left(\frac{1}{\lambda} - \delta e^{2U} \right) \left(\frac{\frac{1}{\lambda^2} + \delta}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2}} - \frac{1}{\lambda} \right) + \delta \left(\frac{\delta + \rho^2}{2} - 1 \right) \quad (4.3)$$

для e^{2U} и b , соотношения

$$Z^2 - \rho^2 + \delta e^{4U} = \frac{2}{\lambda} e^{2U} \quad (4.4)$$

для Z и e^{2U} и соотношения

$$(e^{2U})_{\zeta} = \frac{Z^2 + \rho^2 + \delta e^{4U}}{2Z\rho} b_{\rho} \quad (4.5)$$

для производных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим дивизор W на Σ_w как решение задачи обращения Якоби

$$\int_{\infty}^W dw := u_w,$$

поэтому его можно стандартным образом выразить через тэта-функции на Σ_w :

$$W + \rho^2 = \sqrt{(\rho^2 + \alpha)^2 + \beta^2} \frac{\vartheta_3^2(u_w)}{\vartheta_1^2(u_w)}. \quad (4.6)$$

В ч. I было показано, что дивизор W связан с функцией e^{2U} :

$$W + \rho^2 = \frac{\delta^2((\rho^2 + \alpha)^2 + \beta^2)}{2(\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2)} \times \\ \times \frac{\rho^2 + \frac{2e^{2U}}{\lambda} - \delta e^{4U}}{(\frac{1}{\lambda} - \delta e^{2U})((\frac{1}{\lambda^2} + \delta)(\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\lambda}) + \frac{\delta(\rho^2 + 2\alpha)}{2} - \frac{\delta^2 e^{4U}}{2}}.$$

Подставляя это соотношение в (4.6) и разрешая в терминах e^{2U} , получаем (4.1). Соотношения (4.3)–(4.5) были приведены в ч. I. Это завершает доказательство.

Для определения физических величин на диске важно поведение метрики в окрестностях центра и обода диска.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *На диске ($\zeta \rightarrow 0$, $\zeta > 0$) при $\rho \rightarrow 0$, $\lambda < \lambda_c$ и $\delta \leq \delta_s(\lambda)$ метрические функции и их производные можно разложить как $F = F_0 + F_2\rho^2 + F_4\rho^4 + \dots$, где F обозначает e^{2U} , Z , b , $(e^{2U})_\zeta$, а функции e^{2k} и F_i являются постоянными при $b_0^2 = 1 - 4\Omega^2 - e^{4U_0}$ и $Z_0 = \gamma/\Omega e^{2U_0}$. При $\delta = 0$ и $\lambda = \lambda_c$ метрические функции и их производные можно разложить как*

$$e^{2U} = -\frac{\lambda\rho^2}{2} + \rho^4 y_4 + \dots, \quad Z = \rho^2 Z_2 + \dots, \quad b = -1 + \rho^4 \lambda y_4 + \dots, \\ (e^{2U})_\zeta = -\sqrt{2\lambda y_4} \rho^2 + \dots, \quad k = \ln \rho + k_0 + k_2 \rho^2 + \dots.$$

При $\delta \neq 0$ критическое значение λ_c стремится к бесконечности. В этом случае разложение метрических функций таково же, как и при $\delta = 0$ и $\lambda = \lambda_c$, или имеет вид

$$e^{2U} = y_1 \rho + \rho^3 y_3 + \dots, \quad Z = Z_1 \rho + \rho^3 Z_3 + \dots, \quad b = b_0 + \rho^2 b_2 + \dots, \\ (e^{2U})_\zeta = s_1 \rho + \dots, \quad k = \ln \frac{\rho}{4} + k_0 + k_2 \rho^2 + \dots.$$

На обода диска ($\rho = 1$) мнимая часть потенциала Эрнста обращается в нуль, как $(1 - \rho^2)^{3/2}$ при $\delta > \delta_s$ и $\rho \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку риманова поверхность Σ_w регулярна при $0 \leq \rho \leq 1$, все периоды являются функциями от ρ^2 . Интеграл u_w также является гладкой функцией ρ^2 , это следует из формулы

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-\rho^2}^{-1} \frac{\ln G(\sqrt{\tau}) d\tau}{\sqrt{(\tau + \rho^2)((\tau - \alpha)^2 + \beta^2)}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^1 \tilde{G}((1 - \rho^2)t + \rho^2) dt, \quad (4.7)$$

где

$$\tilde{G}(\tau) = \frac{2 \ln(\sqrt{(\tau + \alpha)^2 + \beta^2} + 1 - \tau) - \ln(\frac{1}{\lambda^2} + \delta\tau)}{\sqrt{(\tau + \alpha)^2 + \beta^2}}.$$

Поэтому величина Y в (4.2) является гладкой функцией ρ^2 . При $\lambda < \lambda_c$ она имеет вид $Y(\rho) = Y_0 + Y_2\rho^2 + \dots$. Тогда в силу соотношений из теоремы 4.1 получаем, что e^{2U} ,

Z, b и $(e^{2U})_\zeta$ также являются гладкими функциями от ρ^2 . Поведение k определяется из соотношения (2.2) с учетом обращения k в нуль на оси.

В случае $\gamma = 1$ ультрарелятивистский предел $e^{2U_0} = 1$ достигается, если $\vartheta_3(u_w) = 0$ при $\rho = 0$, т.е. $Y = 0$ в центре диска. Поскольку тэта-функции, входящие в соотношение (4.2), являются функциями от ρ^2 , а Y зависит от тэта-функций квадратично, то Y имеет вид $Y = Y_4\rho^4 + \dots$. Разлагая e^{2U} (4.1) при малых Y , получаем $e^{2U} = -\lambda\rho^2/2 + \lambda Y/2$. При $\lambda \rightarrow \infty$ и $0 < \gamma < 1$ формула (4.1) приводит к $e^{2U} = \rho y_1 + \rho^3 y_3 + \dots$ при $y_1 \neq 0$ или $e^{2U} = \rho^2 y_2 + \rho^4 y_4 + \dots$ при $y_1 = 0$. При $y_1 \neq 0$ соотношение (4.3) выполняется, если функция b имеет вид $b = b_0 + b_2\rho^2 + \dots$ или $b = b_1\rho + \dots$. Для того чтобы определить, какой из этих двух случаев реализуется, следует рассмотреть функцию b_0 , которая имеет вид $\delta b_0^2/2 = \alpha - \theta + \sqrt{\theta^2 - 2\alpha\theta + 1}$, где $\theta = \vartheta_2^2(u_w)/\vartheta_1^2(u_w)$ при $\rho = 0$. Функция b_0 может обращаться в нуль при $\delta \neq 0$, только если $\delta = 4$ – статический предел, где обращение в нуль тождественное.

Поведение b на ободе диска следует из (4.3), откуда с учетом (4.1) получаем

$$b^2 = \frac{2}{(Y - \delta)^2} \left(\delta\alpha - \frac{1}{\lambda^2} - Y \left(\alpha + \frac{2 - \rho^2 + \delta\lambda^2}{1 + \lambda^2\delta\rho^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\frac{1}{\lambda^2} + \delta}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2}} \sqrt{\frac{Y^2((\rho^2 + \alpha)^2 + \beta^2)}{\frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2} - 2Y(\rho^2 + \alpha) + \frac{1}{\lambda^2} + \delta\rho^2} \right).$$

Поскольку риманова поверхность Σ_w , а следовательно, и ее периоды регулярны при $\rho = 1$, интеграл u_w доминируется интегралом (4.7), который пропорционален $(1 - \rho^2)^{3/2}$ при $\rho \approx 1$ в диске. Тэта-функция $\vartheta_1(x)$ имеет нули первого порядка при $x = 0$, откуда следует, что Y расходится при $\rho \rightarrow 1$. Соответственно при $\rho \approx 1$ имеем

$$b^2 \approx \frac{2}{Y} \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \delta} - \frac{\delta}{2} \right),$$

откуда вытекает, что $b \propto \vartheta_1(u_w)$, т.е. $b \propto (1 - \rho^2)^{3/2}$ в нестатическом случае.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Однокомпонентный диск, изучавшийся Бардином и Вагонером [17], получается при выборе $\delta = 0$ в потенциале Эрнста (2.5). Это дает решение Нейгебауера и Майнеля [5] в обозначениях, использованных в работах [7], [8].

5.1. Ньютоновский предел. Ньютоновский предел достигается при $\lambda \rightarrow 0$ для произвольных δ , что следует из (2.4). Если $e^{-U_0} - 1 \ll 1$ и $\Omega = \Omega\rho_0 \ll 1$, то это означает, что и центральное красное смещение, и максимальная скорость в диске (по сравнению со скоростью света, которая равна единице в принятой нами системе единиц) малы, что как раз и определяет ньютоновский режим.

ТЕОРЕМА 5.1. *В пределе $\lambda \ll 1$ потенциал Эрнста (2.5) становится вещес-*

твенным при U , задаваемом формулой

$$U(\rho, \zeta) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-i}^i \frac{2\lambda(\tau^2 + 1)}{\sqrt{(\tau - \zeta)^2 + \rho^2}} d\tau. \quad (5.1)$$

Метрические функции a и k имеют порядки Ω^3 и Ω^4 , соответственно.

Формула (5.1) описывает в точности диск Маклорена в обозначениях ч. I. Метрика демонстрирует поведение, ожидаемое из общих постньютоновских разложений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пределе $\lambda \rightarrow 0$ точки ветвления E_i и $\bar{E}_i$, $i = 1, 2$, стремятся к бесконечности. Для рассмотрения этого предельного случая используем конформное преобразование $\tau \rightarrow \tau/\sqrt{\lambda}$. На преобразованной поверхности разрез $[\sqrt{\lambda}P_0, \sqrt{\lambda}\bar{P}_0]$ стягивается на ось, а другие разрезы остаются конечными. В пределе $\lambda \rightarrow 0$ абелевы интегралы можно выразить в терминах величин на эллиптической римановой поверхности $\tilde{\Sigma}$, задаваемой уравнением $\tilde{\mu}^2(\tau) = \tau^4 + 1$. Получаем

$$f = e^{I - u_1 - u_2} \frac{\vartheta_3(u_1)\vartheta_4(0) - \vartheta_2(0)\vartheta_1(u_1)e^{u_2 + u_1/2}}{\vartheta_3(u_1)\vartheta_4(0) + \vartheta_2(0)\vartheta_1(u_1)e^{-u_2 - u_1/2}}. \quad (5.2)$$

Однако u_i и I не являются абелевыми интегралами. Имеем

$$\oint_{a_1} \frac{\tau^n d\tau}{\mu(\tau)} \propto \lambda^{1-n/2},$$

тогда как соответствующие a_2 -периоды пропорциональны λ . При $\ln G \approx 2\lambda(\tau^2 + 1)$ находим, что u_1 и I пропорциональны $\lambda^{3/2}$ и

$$u_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{2\lambda(\tau^2 + 1) d\tau}{\sqrt{(\tau - \zeta)^2 + \rho^2}}$$

в низшем порядке.

Главный вклад в соотношении (5.2) дается величиной u_2 , т.е. $f = 1 - u_2$. Поскольку в данном случае $f = e^{2U}$, получаем формулу (5.1). Аналогичным образом вклады низших порядков в мнимую часть можно получить из соотношения (5.2). Они возникают из члена $\vartheta_1(u_1)$, который является нечетной чисто мнимой функцией, имеющей нули первого порядка, откуда следует $b \propto u_1$, что имеет порядок $\lambda^{3/2}$, т.е. порядок Ω^3 . Поэтому a также имеет порядок Ω^3 . Для метрической функции k с учетом (2.9) находим, как и ранее, что главные вклады возникают из интеграла в экспоненте; они квадратичны по G и потому имеют порядок Ω^4 . Это завершает доказательство.

5.2. Статический предел. Статический предел потенциала Эрнста (2.5) получается при $\beta = 0$, т.е. $\delta_s(\lambda) = 2(1 + \sqrt{1 + 1/\lambda^2})$.

ТЕОРЕМА 5.2. Функция (2.5) становится вещественной в пределе $\delta = \delta_s(\lambda)$ при потенциале U , заданном формулой

$$U(\rho, \zeta) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{-i}^i \ln \left(1 - \frac{4}{\delta}(\tau^2 + 1) \right) \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - \zeta)^2 + \rho^2}}. \quad (5.3)$$

Метрическая функция a тождественно обращается в нуль, а функция k определяется выражением

$$k = \frac{1}{2(4\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} dK_1 dK_2 \ln G(K_1) \ln G(K_2) \times \\ \times \frac{1}{(K_1 - K_2)^2} \left(\sqrt{\frac{(K_1 - i\bar{z})(K_2 + iz)}{(K_2 - i\bar{z})(K_1 + iz)}} + \sqrt{\frac{(K_2 - i\bar{z})(K_1 + iz)}{(K_1 - i\bar{z})(K_2 + iz)}} - 2 \right). \quad (5.4)$$

Это дает статический диск Моргана и Моргана [18] при равномерном вращении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пределе $\delta \rightarrow \delta_s$ точки ветвления E_i и $\bar{E}_i$ совпадают при $i = 1, 2$ на вещественной оси, поскольку $\delta_s \geq 4$, а потому $\alpha(\delta_s) = \delta_s/2 - 1 > 0$. Математически этот предел соответствует стандартному солитонному пределу алгебро-геометрических решений эволюционных уравнений (см., например, [19]). В системе разрезов, показанной на рисунке, b -периоды π_{11} и π_{22} расходятся, а остальные периоды конечны. В этом пределе тэта-функции, входящие в соотношение (2.5), становятся поэтому тождественно равными единице, а для дифференциала третьего рода имеем

$$d\omega_{\infty^+ \infty^-} \rightarrow -\frac{d\tau}{\sqrt{(\tau - \zeta)^2 + \rho^2}}.$$

В пределе $\delta = \delta_s$ функция (2.6) определяется потенциалом (5.3), что совпадает с

$$\ln G = 4U_0 + \ln(1 + 2\lambda e^{-2U_0} \tau^2),$$

т.е. с видом, приведенным для диска Моргана и Моргана с постоянной Ω [20]. Поскольку все тэта-функции в формуле (2.8) стремятся к единице, получаем, что в данном случае a есть тождественный нуль, когда $a_0 = -\gamma/\Omega$ равно нулю при $\gamma = 0$.

В выражении (2.9) для метрической функции k тэта-функции снова стремятся к единице. Для того чтобы вычислить интеграл в экспоненте, проинтегрируем по частям как по K_1 , так и по K_2 , используя тот факт, что $\ln G$ обращается в нуль на пределах интегрирования. Дифференциал второго рода принимает тогда вид (5.4). Поскольку очевидно, что k обращается в нуль на оси, постоянная C тождественно равна единице в этом пределе. Это завершает доказательство.

5.3. Ультрарелятивистский предел. Ультрарелятивистский предел достигается, если красное смещение испущенных из центра диска и детектируемых на бесконечности фотонов расходитя, что равносильно ситуации, при которой фотоны из центра диска не могут уйти на бесконечность, как из-за горизонта черной дыры. В случае $\gamma = 1$ предел достигается при $\vartheta_4(u') = 0$. С учетом (3.3) и (3.4) отсюда следует, что обе постоянные a_0 и C расходятся при $\epsilon \rightarrow 1$. Ось является в действительности сингулярной в том смысле, что на ней, как видно из (3.2), метрическая функция e^{2U} тождественно обращается в нуль. Потенциал Эрнста тождественно равен $-i$ на оси при $\zeta > 0$. Вследствие расходимости постоянной a_0 угловая скорость $\Omega = \Omega \rho_0$, являющаяся координатной угловой скоростью в диске, измеряемой из бесконечности, обращается в нуль. Из этого следует, что одна из величин ρ_0 или Ω обращается в нуль. Бардин и Вагонер [17] привели аргументы в пользу того, что пространство-время можно интерпретировать в пределе

$\epsilon \rightarrow 1$ и $\rho_0 \rightarrow 0$ как экстремальное пространство-время Керра вне диска. В работе [7] было показано, что такой предел (расходящиеся мультиполи, сингулярная ось и т.п.) может появляться в общих гиперэллиптических решениях и всегда может быть интерпретирован как экстремальное пространство-время Керра (см. работу [21] по поводу алгебраического анализа ультрарелятивистского предела диска Бардина–Вагонера).

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть f – потенциал Эрнста вида (2.5), регулярный всюду за исключением диска, $\vartheta_4(u') = 0$ и $\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \rho_0 a_0 =: -2m$, где m – положительная вещественная конечная постоянная. Тогда в пределе $\rho_0 \rightarrow 0$ потенциал Эрнста (2.5) при $\rho^2 + \zeta^2 \neq 0$ принимает вид

$$f = \frac{\rho^2 + \zeta^2 + m(i\zeta - \sqrt{\rho^2 + \zeta^2})}{\rho^2 + \zeta^2 + m(i\zeta + \sqrt{\rho^2 + \zeta^2})}. \quad (5.5)$$

В ультрарелятивистском пределе указанных дисков при $\gamma = 1$ отсюда следует, что пространство-время становится экстремальным пространством-временем Керра с $m = 1/(2\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По-видимому, наиболее прямой способ доказать это утверждение состоит в определении потенциала в пределе на оси и в использовании затем теоремы Хаузера и Эрнста [22] о том, что потенциал Эрнста однозначно определяется для заданных источников, если он задан на некоторой конечной регулярной части оси. Потенциал на оси дается формулой (3.1). Предел $\rho_0 \rightarrow 0$ эквивалентен пределу $\zeta \rightarrow \infty$, используемому при вычислении массы АДМ и момента импульса в разделе 3 при $\vartheta_4(u') = 0$. Постоянную a_0 можно записать, используя тройное тождество Фей [12]:

$$a_0 = -2i \frac{D_{\infty-} \vartheta_1(0) \vartheta_4(u' + 2\omega(\infty^-))}{\vartheta_1(2\omega(\infty^-)) \vartheta_4(u')}.$$

Тогда с учетом тождеств между эллиптическими тэта-функциями (см., например, [23]), равенства $u' \equiv \pi'/2$ и формул для b -периодов на Σ' имеем, что $a_0 = -2D_{\infty-} \ln \vartheta_4(u')$. Разлагая потенциал на оси (3.1) до первого порядка по ρ_0 , получаем

$$f(0, \zeta) = \frac{\zeta + m(i-1)}{\zeta + m(i+1)},$$

что дает потенциал (5.5) на оси. Это завершает доказательство.

При $\gamma < 1$ ось остается регулярной везде, за исключением начала координат, а постоянные a_0 (3.3) и C (3.4) остаются конечными, потому что они могут расходиться, только если $\vartheta_4(u') = 0$, что возможно только при $\gamma = 1$. Интегралы в соответствующих экспонентах (3.3) и (3.4) всегда являются конечными, хотя, как легко видеть, $\ln G(\tau)$ содержит член $\ln \tau$ в пределе $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому ультрарелятивистский предел дисков, вращающихся в противоположных направлениях, является диском конечного радиуса с расходящимся центральным красным смещением.

Благодарности. Автор благодарен Р. Кернеру, Д. Короткину, Х. Пфистеру, О. Рихтеру и У. Шаудту за полезные замечания и указания. Работа поддержана Marie-Curie program of the European Community.

Список литературы

- [1] *F. J. Ernst*. Phys. Rev. 1968. V. 167. P. 1175; 1968. V. 168. P. 1415.
- [2] *D. Maison*. Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 521.
- [3] *В. А. Белинский, В. Е. Захаров*. ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 6. С. 1955.
- [4] *G. Neugebauer*. J. Phys. A. 1979. V. 12. P. L67.
- [5] *G. Neugebauer, R. Meinel*. Astrophys. J. Lett. 1993. V. 414. P. L97; Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 2166; 1995. V. 75. P. 3046.
- [6] *Д. А. Короткин*. ТМФ. 1988. Т. 77. С. 25; *D. A. Korotkin*. Commun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 383; Class. Q. Grav. 1993. V. 10. P. 2587.
- [7] *C. Klein, O. Richter*. Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 565.
- [8] *C. Klein, O. Richter*. Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. CID 124018.
- [9] *C. Klein, O. Richter*. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 2884.
- [10] *C. Klein*. Phys. Rev. D (submitted).
- [11] *Д. Крамер и др.* Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
- [12] *J. Fay*. Theta Functions on Riemann Surfaces. Lect. Notes Math. V. 352. New York: Springer, 1973.
- [13] *D. Korotkin, H. Nicolai*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 475. P. 397.
- [14] *D. Korotkin, V. Matveev*. Solutions of Schlesinger system and Ernst equation in terms of theta-functions. gr-qc/9810041.
- [15] *A. Yamada*. Kodai Math. J. 1980. V. 3. P. 114.
- [16] *R. Wald*. General Relativity. Chicago: Univ. Chicago Press, 1984.
- [17] *J. M. Bardeen, R. V. Wagoner*. Astrophys. J. 1971. V. 167. P. 359.
- [18] *T. Morgan, L. Morgan*. Phys. Rev. 1969. V. 183. P. 1097; Errata 1969. V. 188. P. 2544.
- [19] *Д. Мамфорд*. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
- [20] *C. Klein*. Class. Q. Grav. 1997. V. 14. P. 2267.
- [21] *R. Meinel*. The rigidly rotating disk of dust and its black hole limit. gr-qc/9703077.
- [22] *I. Hauser, F. Ernst*. J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 1126.
- [23] *E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enolskii, A. R. Its, V. B. Matveev*. Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations. Berlin: Springer, 1994.