Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж.-Х. Ли, О. К. Пашаев, Самодуальные вихри в гидродинамике Черна–Саймонса, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 432–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:38:31

САМОДУАЛЬНЫЕ ВИХРИ В ГИДРОДИНАМИКЕ ЧЕРНА–САЙМОНСА

Дана формулировка классической теории нерелятивистской заряженной частицы, взаимодействующей с $U(1)$ -калибровочным полем, в терминах волнового уравнения Шредингера с добавленным квантовым нелинейным потенциалом де Бройля–Бома. В случае, когда постоянная при деформирующем квантовом потенциале равна $1 - \hbar^2$, модель становится эквивалентна стандартному уравнению Шредингера с постоянной Планка $\hbar$, а в случае, когда эта постоянная равна $1 + \hbar^2$, получается пара уравнений диффузии–антидиффузии. Если выбрать калибровочную теорию в виде абелевой теории Черна–Саймонса (ЧС) в размерности $2+1$, взаимодействующей с полем, подчиняющимся нелинейному уравнению Шредингера (НШ), т.е. модель Джакива–Пи, то эта теория представима в виде теории плоской жидкости Маделунга; при этом гауссов закон ЧС имеет простой физический смысл локальной завихренности потока жидкости. Для статического потока, в котором скорость центра масс (классическая скорость) равна квантовой скорости (порождаемой квантовым потенциалом скорости внутреннего движения), в задаче о движении жидкости возникают решения с N вихрями. Преобразуя фазу вихревой волновой функции с помощью калибровочного преобразования типа Оберсона–Сабатье, можно показать, что параметр деформации $\hbar$, константа связи ЧС и постоянная квантового потенциала квантуются. Обсуждается редукция модели в размерность $1+1$, при которой возникают модифицированные и дискретные уравнения НШ с резонансным взаимодействием солитонов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщение уравнения Шредингера с помощью введения нелинейного “квантового потенциала” рассматривалось в связи с задачей стохастического квантования [1] и поправками к квантовой механике, обусловленными эффектами квантовой гравитации [2]. Это обобщение также появляется в волновой формулировке классической механики [3] и в бездисперсионном пределе нелинейной волновой динамики [4]. Сабатье [5] показал, что такое обобщение сохраняет лагранжеву структуру. Более того, Оберсон и Сабатье [6] нашли такое преобразование фазы волновой функции модели, которое линеаризует эту модель и сводит ее в зависимости от величины константы связи, стоящей при квантовом

*Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan

†Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Cankaya–Izmir, Turkey; Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

потенциале, либо к уравнению Шредингера с масштабно преобразованным потенциалом, либо к паре диффузионных уравнений с обратным направлением времени. Из-за наличия такой линеаризации не существует солитонных решений этого уравнения [5], [6].

Нелинейное обобщение квантовой механики в формулировке Бома [7] было исследовано в недавних работах авторов [4], [8], в которых изучались солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера (НШ) в присутствии квантового потенциала. Применение фазового преобразования типа преобразования Оберсона–Сабатье к этой модели при надкритическом значении константы квантового потенциала позволяет свести задачу к паре уравнений диффузии с обратным направлением времени, которые задают модель вещественной (q, r) -системы типа НШ при мнимом времени [9] ($SL(2, R)$ -редукцию задачи Захарова–Шабата). Взаимодействие солитонов в двухсолитонном решении такой системы имеет выраженный резонансный характер [4], [8].

В настоящей статье рассматривается влияние квантового потенциала на плоские вихри, возникающие в $(2 + 1)$ -мерной задаче для уравнения НШ с взаимодействием с калибровочным полем Черна–Саймонса (ЧС). Применение преобразования типа Оберсона–Сабатье к фазе волновой функции приводит к тому, что параметры вихревых конфигураций резко меняются. В представлении Маделунга модель может быть переформулирована в терминах вихревой плоской гидродинамики. В пределе самодуального поля в модели возникают решения с N вихрями, а само условие самодуальности приобретает простую физическую интерпретацию условия равенства “классической скорости” (скорости центра масс) и “квантовой скорости” (скорости движения в системе центра масс, связанной с внутренним “движением спина”, или *zitterbewegung* по Шредингеру).

В разделе 2 классическая динамика заряженной частицы, взаимодействующей с абелевым калибровочным полем, переформулируется в терминах волнового уравнения типа НШ. Вводя зависимость от постоянной Планка в константу взаимодействия квантового потенциала и производя преобразование фазы волновой функции, можно получить стандартное уравнение Шредингера. В разделе 3 рассматривается случай абелева калибровочного поля ЧС, взаимодействующего с полем НШ. Показано, что эта модель сводится к вихревой гидродинамике типа Маделунга, и исследованы ее бездисперсионный предел и деформации. Квантовая скорость и ее свойства исследуются в разделе 4, где показано, что задача для статического потока,двигающегося со скоростью, равной квантовой скорости, сводится к уравнению Лиувилля, и дано описание соответствующих вихревых конфигураций. Из условия регулярности и однолистности решения получаются условия квантования констант связи. Размерная редукция к одномерному уравнению НШ и ее различные модификации с помощью квантового потенциала рассматриваются в разделе 5. Краткое обсуждение результатов приведено в разделе 6.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Классическая динамика заряженной нерелятивистской частицы,двигающейся в $U(1)$ -калибровочном поле $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ с функцией Гамильтона

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e}{c}A_0 + U,$$

описывается уравнением Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\nabla S, A_0, \mathbf{A}, U) = 0 \quad (2.1)$$

с импульсом

$$\mathbf{p} = \nabla S + \frac{e}{c}\mathbf{A}.$$

Объединяя уравнение (2.1) с уравнением Лиувилля $\partial\rho/\partial t + \nabla(\rho\mathbf{V}) = 0$ на плотность ρ интегрального инварианта в потенциальной динамической системе

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V} = \frac{1}{m}\mathbf{p} = \frac{1}{m}\left(\nabla S + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right), \quad (2.2)$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\nabla S + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{e}{c}A_0 + U = 0, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{V}) = 0. \quad (2.3b)$$

Эта классическая система может быть представлена в полевом виде. Для этого введем комплексную волновую функцию (“параметр порядка”)

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{iS}, \quad (2.4)$$

и представим систему (2.3) в виде единого нелинейного волнового уравнения

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}\mathbf{D}^2\psi - U\psi = \frac{1}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi, \quad (2.5)$$

в котором $D_0 = \partial_t + eA_0/c$ и $\mathbf{D} = \nabla + e\mathbf{A}/c$. Уравнение (2.5) имеет вид уравнения Шредингера (без константы Планка) с добавленным в правую часть так называемым квантовым потенциальным членом. Это уравнение допускает все обычные решения классической механики, но не позволяет брать суперпозиции этих решений. Поскольку система (2.3) описывает формальный квазиклассический предел квантово-механического уравнения Шредингера, то уравнение (2.5) описывает его бездисперсионный предел. В действительности волновое уравнение (2.5) ковариантно относительно калибровочных преобразований

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \frac{c}{e}\nabla\alpha,$$

порождающих сдвиги классического действия $S \rightarrow S + \alpha$. Поскольку дополнительный член в правой части (2.5) калибровочно-инвариантен относительно группы $U(1)$,

он полностью компенсирует соответствующий калибровочно-инвариантный вклад дисперсии в левой части.

Как уже было отмечено, в уравнение (2.5) не входит константа Планка. Если теперь сдвинуть константу связи при квантовом потенциале в правой части уравнения (2.5) на постоянную $\hbar^2$,

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}\mathbf{D}^2\psi - U\psi = \frac{1}{2m}(1 - \hbar^2)\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi, \quad (2.6)$$

то, вводя новую волновую функцию

$$\chi = \sqrt{\rho}e^{\frac{iS}{\hbar}}, \quad (2.7)$$

получим стандартное линейное уравнение Шредингера

$$i\hbar D_0\chi + \frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{D}^2\chi - U\chi = 0,$$

в котором $\hbar$ уже играет роль постоянной Планка. Таким образом, уравнение (2.6) калибровочно-эквивалентно уравнению Шредингера при $\hbar \neq 0$, в то время как при $\hbar = 0$ это уравнение сводится к нелинейному волновому уравнению (2.5) классической механики. Более того, при $\hbar = \pm 1$ это уравнение непосредственно сводится либо к линейному уравнению Шредингера, либо к его комплексно-сопряженному.

С другой стороны, если деформация уравнения (2.5) имеет противоположный знак, т.е.

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}\mathbf{D}^2\psi - U\psi = \frac{1}{2m}(1 + \hbar^2)\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi, \quad (2.8)$$

то это уравнение не может быть линеаризовано в виде уравнения Шредингера с помощью преобразования (2.7) в том же классическом пределе $\hbar = 0$, что и уравнение (2.6). Тем не менее уравнение (2.8) можно свести к уравнению (2.6) с помощью формальной аналитической подстановки чисто мнимого значения $\hbar \rightarrow i\hbar$ постоянной Планка (в квантовой механике такое аналитическое продолжение в классически недостижимую область приводит к экспоненциально убывающим (растущим) волновым функциям). Тогда, будучи записанными в терминах двух вещественных функций

$$Q^\pm = \sqrt{\rho}e^{\frac{\pm S}{\hbar}},$$

уравнение (2.8) и его комплексно-сопряженное уравнение становятся парой расцепленных уравнений диффузии–антидиффузии

$$\pm\hbar D_0Q^\pm + \frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{D}^2Q^\pm - UQ^\pm = 0,$$

похожих на уравнение, рассмотренное Шредингером в 1931 г. [10]. Вышеприведенные рассуждения показывают, что уравнение Шредингера, возмущенное квантовым потенциалом, включает в себя как частные случаи классическую механику ($\hbar = 0$), квантовую механику ($\hbar = \pm|\hbar|$) и пару уравнений диффузии–антидиффузии ($\hbar = i|\hbar|$).

3. ГИДРОДИНАМИКА ЧС

Квазиклассический предел дефокусирующего уравнения НШ

$$i\hbar\partial_t\chi + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\chi + 2g|\chi|^2\chi = 0, \quad g < 0, \quad (3.1)$$

был недавно исследован в случаях одного [11] и двух [12] пространственных измерений. Этот предел аналитически описывает ударные волны в нелинейной оптике и вихри в сверхтекучей жидкости. Разлагая волновую функцию так же, как и в формуле (2.7), получим квантовую деформацию уравнения Гамильтона–Якоби с помощью квантового потенциала или после дифференцирования по пространственным координатам – жидкость Маделунга. В формальном квазиклассическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ (до появления ударных волн) можно пренебречь вкладом квантового потенциала; при этом жидкость становится эйлеровой системой, а волновая функция (2.4) удовлетворяет бездисперсионному уравнению НШ

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2m}\Delta\psi + 2g|\psi|^2\psi = \frac{1}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi. \quad (3.2)$$

Если ввести квантовую деформацию уравнения (3.2)

$$i\partial_t\psi + \frac{1}{2m}\Delta\psi + 2g|\psi|^2\psi = (1 - \hbar^2)\frac{1}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi$$

и переписать его для волновой функции (2.7), то опять получится исходное уравнение (3.1).

Модель НШ (3.1), взаимодействующая с калибровочным полем ЧС в размерности $2 + 1$, называется моделью Джаквива–Пи, она описывает частицы дробной статистики (анионы) [13]. Чтобы исследовать квазиклассический предел анионной модели, надо уметь брать предел $\hbar \rightarrow 0$ в этой модели или в модели, возмущенной квантовым потенциалом, как в случае (3.2).

Деформированная модель, описываемая лагранжианом

$$L = \frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \frac{i}{2}(\bar{\psi}D_0\psi - \psi\bar{D}_0\bar{\psi}) - \frac{1}{2m}|\mathbf{D}\psi|^2 + (1 - \hbar^2)\frac{1}{2m}(\nabla|\psi|)^2 + g|\psi|^4, \quad (3.3)$$

где $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu/c$, приводит к системе уравнений движения

$$iD_0\psi + \frac{1}{2m}\mathbf{D}^2\psi + 2g|\psi|^2\psi = (1 - \hbar^2)\frac{1}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\psi, \quad (3.4a)$$

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e}{\kappa c}\bar{\psi}\psi, \quad (3.4b)$$

$$\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = -\frac{ie}{2m\kappa c}\epsilon_{jk}(\bar{\psi}D_k\psi - \psi\bar{D}_k\bar{\psi}). \quad (3.4v)$$

Факторизуя волновую функцию ψ (2.4) и вводя новую функцию χ (2.7), получим модель Джакива–Пи:

$$i\hbar \left(\partial_0 + \frac{ie}{\hbar c} A_0 \right) \chi + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \chi + 2g|\chi|^2 \chi = 0, \quad (3.5a)$$

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e}{\kappa c} \bar{\chi} \chi, \quad (3.5b)$$

$$\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = -\frac{ie\hbar}{2m\kappa} \epsilon_{jk} \left[\bar{\chi} \left(\partial_k + \frac{ie}{\hbar c} A_k \right) \chi - \chi \left(\partial_k - \frac{ie}{\hbar c} A_k \right) \bar{\chi} \right]. \quad (3.5v)$$

Соответствующий лагранжиан

$$L = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{i\hbar}{2} \left[\bar{\chi} \left(\partial_0 + \frac{ie}{\hbar c} A_0 \right) \chi - \chi \left(\partial_0 - \frac{ie}{\hbar c} A_0 \right) \bar{\chi} \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \bar{\chi} \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \chi + g|\chi|^4 \quad (3.6)$$

может быть получен из лагранжиана (3.3). Параметр деформации $\hbar$ играет роль постоянной Планка для системы уравнений (3.5). Как система (3.4), так и система (3.5) допускают одно и то же гидродинамическое представление (типа системы Маделунга). Из уравнения (3.4a) получаются квантовое уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left[\frac{mV^2}{2} + \frac{e}{c} A_0 - 2g\rho - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right] = 0 \quad (3.7)$$

и уравнение непрерывности (2.3б), где введено поле локальных скоростей (2.2). После этого уравнения (3.5б) и (3.5в) преобразуются соответственно в уравнения

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{e}{\kappa c} \rho, \quad (3.8)$$

$$\partial_0 A_j - \partial_j A_0 = \frac{e}{\kappa c} \epsilon_{jk} \rho V_k. \quad (3.9)$$

Теперь можно полностью исключить из рассмотрения векторные потенциалы $\mathbf{A}$, заменив их полями скоростей (2.2). Отметим, что эти поля явно калибровочно-инвариантны. Уравнения (3.9) и (3.7) при этом приводят к уравнению Эйлера на скорость $\mathbf{V}$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{m} \nabla P, \quad (3.10)$$

где соответствующее давление имеет вид

$$P = -2g\rho - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (3.11)$$

В терминах гидродинамических переменных закон Гаусса (3.8) для поля ЧС имеет вид

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{e^2}{m\kappa c^2} \rho \quad (3.12)$$

и допускает простую интерпретацию: он описывает вихревую жидкость, локальная завихренность которой не обращается в нуль ни в одной точке пространства с ненулевой плотностью жидкости ρ . Система уравнений (2.3б), (3.10)–(3.12) задает в рассматриваемой модели описание с помощью системы Маделунга. Подобно полю скоростей в формуле (2.2), эта жидкость явно $U(1)$ -калибровочно-инвариантна. Более того, в этой системе уравнение непрерывности (2.3б) не является независимым. Оно появляется как условие сохранения закона Гаусса (3.12) для поля ЧС в процессе эволюции. Чтобы это проверить, достаточно просто продифференцировать (3.12) по времени и затем подставить результат в уравнение (3.10). После этого получим гидродинамическую модель, определяемую двумя уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{1}{m} \nabla \left(-2g\rho - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right), \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{e^2}{m\kappa c^2} \rho.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Квазиклассический, или бездисперсионный, предел этой модели при $\hbar \rightarrow 0$ задается системой

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{1}{m} \nabla (-2g\rho), \\ \nabla \times \mathbf{V} &= \frac{e^2}{m\kappa c^2} \rho.\end{aligned}$$

Нелинейно-волновой вид этих уравнений следует непосредственно из системы (3.4), а лагранжиан – из формулы (3.3) при $\hbar = 0$.

4. КВАНТОВАЯ СКОРОСТЬ И СТАЦИОНАРНЫЙ ПОТОК

Квантовый потенциал допускает интерпретацию в терминах скорости внутреннего движения жидкости [14]. В этом подходе нерелятивистская локальная скорость раскладывается с использованием тока Паули на две составляющие, первая из которых параллельна, а вторая ортогональна импульсу. Первая составляющая, задаваемая ∇S и интерпретируемая как “классическая” составляющая, отвечает движению центра масс. Вторая составляющая, называемая “квантовой” составляющей, – это скорость движения в системе центра масс (внутреннее “спиновое движение”, или *zitterbewegung* по Шредингеру). Тогда вклад квантового потенциала в лагранжиан (3.6) имеет простой физический смысл кинетической энергии этого спинового движения:

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla |\chi|)^2 = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right)^2 = \frac{m \mathbf{V}_q^2}{2},$$

где “квантовая” скорость определяется как

$$\mathbf{V}_q = \frac{\nabla \rho \times \mathbf{s}}{m\rho}.$$

При движении в плоскости (x, y) получим, что $\nabla_z = 0$ и $s_x = s_y = 0$. Таким образом, $s_z = \hbar/2$ и выражения для компонент квантовой скорости имеют вид

$$(V_q)_x = \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial_y \rho}{\rho}, \quad (V_q)_y = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial_x \rho}{\rho},$$

или

$$(\mathbf{V}_q)_i = \frac{\hbar}{2m} \epsilon_{ij} \frac{\partial_j \rho}{\rho}. \quad (4.1)$$

Дифференцируя уравнение (4.1) по времени и применяя уравнение непрерывности (2.36), получим

$$\partial_0 \mathbf{V}_q + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V}_q = 0.$$

Это означает, что вектор квантовой скорости $\mathbf{V}_q$ переносится с основной скоростью потока $\mathbf{V}$, т.е. скорость $\mathbf{V}_q$ — это скорость внутреннего движения. Более того, прямое следствие уравнения (4.1) есть условие нулевой дивергенции для потока квантовой скорости: $\nabla(\rho \mathbf{V}_q) = 0$. Если применить это условие к уравнению непрерывности (2.36) для потока, двигающегося с квантовой скоростью

$$\mathbf{V} = \pm \mathbf{V}_q \quad (4.2)$$

(т.е. рассмотреть специальное движение в плоскости с равными скоростями классического движения (движения центра масс) и квантового (внутреннего) движения), то полученный поток будет с необходимостью стационарен: $\partial_0 \rho = 0$.

С другой стороны, уравнения жидкости Маделунга (3.13) для стационарного потока, для которого $\partial_0 \mathbf{V} = 0$ и

$$\frac{\kappa g}{e^2} = \pm \frac{\hbar}{2mc^2}, \quad (4.3)$$

могут быть переписаны в следующем виде:

$$\frac{m}{2} \nabla_j (\mathbf{V} - \mathbf{V}_q) (\mathbf{V} + \mathbf{V}_q) - \frac{e^2}{\kappa c^2} \rho \epsilon_{jk} (\mathbf{V} \mp \mathbf{V}_q)_k \mp \frac{\hbar}{2} \nabla_j [\nabla \times (\mathbf{V} \mp \mathbf{V}_q)] = 0.$$

Эти уравнения тождественно выполнены для потоков с ограничением (4.2). При выводе этого уравнения использовалось тождество

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \frac{m \mathbf{V}_q^2}{2} - \frac{\hbar}{2} [\partial_1 (\mathbf{V}_q)_2 - \partial_2 (\mathbf{V}_q)_1]$$

и закон Гаусса (3.12) для поля ЧС. Таким образом, если выполнено условие (4.2), то достаточно наложить одно лишь условие завихренности для компоненты квантовой скорости поля в системе (3.13)

$$\nabla \times \mathbf{V}_q = \pm \frac{e^2}{\kappa mc^2} \rho,$$

чтобы из определения (4.1) получить в итоге уравнение Лиувилля

$$\Delta \ln \rho = \mp \frac{2e^2}{\kappa \hbar c^2} \rho.$$

Подчеркнем, что уравнение Лиувилля в рассматриваемой модели имеет смысл условия завихренности квантового потока. Решения такого уравнения хорошо известны [13], [15]. Отметим здесь лишь то, что в полярно-симметричном случае (для знака минус) получим решение

$$\rho = 4 \frac{\kappa \hbar c^2 N^2}{e^2 r^2} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^N + \left(\frac{r_0}{r} \right)^N \right]^{-2},$$

которое регулярно при $N \geq 1$ и может быть получено из общего решения

$$\rho = \alpha \frac{|\zeta'(z)|^2}{(1 + |\zeta(z)|^2)^2},$$

в котором

$$\zeta(z) = \frac{c_N}{(z - z_0)^N}, \quad z = x + iy.$$

В исходной $(\psi, \mathbf{A})$ -формулировке модели заложены два физических условия, которые накладывают естественные ограничения на решения. Из регулярности калибровочного потенциала $\mathbf{A}$ следует, что фаза поля χ (2.7) (см. уравнения (3.5)) должна быть

$$\frac{S}{\hbar} = (N - 1)\theta, \quad \theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right),$$

а число N обязано быть целым для однолистных функций χ . В то же время однолистность исходной функции ψ (2.4) в системе (3.4) предполагает, что произведение $(N - 1)\hbar$ должно быть целочисленным. Это, в свою очередь, требует, чтобы параметр деформации $\hbar$ был целочисленным при любом целочисленном N , $\hbar = n$. Тогда согласно (4.3) получим условие квантования:

$$\frac{\kappa g}{e^2} = \pm \frac{n}{2mc^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Это условие означает, что константы связи поля ЧС и квантового потенциала квантуются:

$$\kappa = n \frac{e^2}{2gmc^2}, \quad 1 - \hbar^2 = 1 - n^2 = (1 - n)(1 + n).$$

Найдем теперь лагранжеву формулировку модели жидкости, описываемой системой (3.13). Исключая векторные потенциалы A_μ из лагранжиана (3.6), получим выражение

$$L = \frac{\kappa m^2 c^2}{2e^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} V_\mu \partial_\nu V_\lambda - \rho V_0 - \rho \frac{m \mathbf{V}^2}{2} - \rho \frac{m \mathbf{V}_q^2}{2} + g \rho^2,$$

в котором V_0 играет роль множителя Лагранжа. Функция Гамильтона (с наложенным законом Гаусса для поля ЧС)

$$H = \int \rho \frac{m \mathbf{V}^2}{2} + \rho \frac{m \mathbf{V}_q^2}{2} - g \rho^2$$

представляет собой всего лишь сумму кинетических энергий классического и квантового движений и энергии самодействия. Легко проверить, что гамильтониан обращается в нуль для самодуального потока (4.2) с константами, фиксированными условиями (4.3).

5. РЕДУКЦИЯ К (1 + 1)-МЕРНОМУ СЛУЧАЮ

Для одномерного движения, происходящего, например, в направлении оси x с $\partial_2 = 0$ для всех исследуемых величин, система (3.13) сводится к системе

$$\partial_0 V_1 + V_1 \partial_1 V_1 = \frac{1}{m} \partial_1 \left(2g\rho + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_1^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right), \quad (5.1a)$$

$$\partial_0 V_2 + V_1 \partial_1 V_2 = 0, \quad (5.1b)$$

$$\partial_1 V_2 = \frac{e^2}{\kappa m c^2} \rho. \quad (5.1v)$$

Подставляя величину $\partial_1 V_2$ из уравнения (5.1v) в уравнение (5.1b), получим, что в уравнении (5.1a) компонента V_2 поля скорости полностью отделяется и определяется из системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_1 V_2 = \frac{e^2}{\kappa m c^2} \rho, \quad \partial_0 V_2 = -\frac{e^2}{\kappa m c^2} \rho V_1.$$

Условие согласованности для этой системы – это просто условие непрерывности одномерного потока:

$$\partial_0 \rho + \partial_1 (\rho V_1) = 0. \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1a) и (5.2) задают динамику жидкости Маделунга в одном пространственном измерении. Переписывая эти уравнения для волновой функции

$$\chi = \sqrt{\rho} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^x V_1 \right),$$

получим модель НШ:

$$i\hbar \partial_0 \chi + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_1^2 \chi + 2g|\chi|^2 \chi = 0.$$

Отметим, что если квантовая деформация системы (3.4) взята со знаком минус, что отвечает замене $\hbar^2 \rightarrow -\hbar^2$, то одномерная редукция уравнений жидкости задается системой уравнений (5.2), (5.1a), в которой необходимо изменить знак вклада квантового потенциала в уравнении (5.1a) на противоположный. В результате для волновой функции

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp \left(i \int_{-\infty}^x V_1 \right)$$

получим модель НШ, деформированную квантовым потенциалом:

$$i\partial_0 \psi + \frac{1}{2m} \partial_1^2 \psi + 2g|\psi|^2 \psi = (1 + \hbar^2) \frac{1}{2m} \frac{\partial_1^2 |\psi|}{|\psi|} \psi. \quad (5.3)$$

В терминах двух вещественных функций

$$Q^\pm = \sqrt{\rho} \exp \left(\pm \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^x V_1 \right)$$

в этом случае получим “диссипативную” (диффузионную) разновидность модели НШ:

$$\pm \hbar \partial_0 Q^\pm + \frac{\hbar^2}{2m} \partial_1^2 Q^\pm + 2g Q^+ Q^- Q^\pm = 0.$$

Используя эту аналогию, можно вывести билинейное представление для модели (5.3). Решение для волновой функции ψ записывается через три вещественные функции $G^\pm$ и F следующим образом:

$$\psi = \frac{(G^+)^{(1-i\hbar)/2} (G^-)^{(1+i\hbar)/2}}{F}, \quad \bar{\psi} = \frac{(G^+)^{(1+i\hbar)/2} (G^-)^{(1-i\hbar)/2}}{F};$$

при этом указанные функции удовлетворяют системе билинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\pm \hbar D_t - \frac{\hbar^2}{2m} D_x^2 \right) (G^\pm * F) &= 0, \\ \frac{\hbar^2}{2m} D_x^2 (F * F) &= 2g G^+ G^-. \end{aligned}$$

Теперь можно выразить гидродинамические переменные в терминах этих новых функций:

$$V_1 = \frac{\hbar}{2m} \partial_1 \ln \frac{G^-}{G^+}, \quad \rho = \frac{\hbar^2}{2mg} \partial_1^2 (\ln F).$$

Построенные с помощью этой конструкции одно- и двух-солитонные решения показывают, что солитонная динамика уравнения (5.3), в отличие от случая модели НШ, допускает богатую резонансную феноменологию [4], [8]. Другая редукция $(2+1)$ -мерной модели (3.4) приводит к уравнению типа дискретного НШ или к его диффузионному аналогу. Детали процедуры редукции и резонансного взаимодействия солитонов будут материалом следующих публикаций.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье классическая динамика нерелятивистской частицы, взаимодействующей с абелевым калибровочным полем, переформулирована в виде нелинейного волнового уравнения с квантовым потенциалом. Вводя деформации этого уравнения, мы показали, что в зависимости от знака деформирующего члена получаются модели двух типов. При одном знаке получается стандартная модель Шредингера, в которой параметр деформации играет роль постоянной Планка. При противоположном знаке получаются уравнения диффузии–антидиффузии. Если выбрать в качестве калибровочного поля поле ЧС и добавить кубический нелинейный член в уравнение Шредингера, то в итоге получается бездисперсионный предел модели Джакива–Пи, который задает квазиклассический предел модели анионов. Деформация такой модели эквивалентна стандартной модели Джакива–Пи, которая в данной статье была представлена как вихревая гидродинамика жидкости маделунговского типа. Вводя ограничение на поток этой жидкости с помощью требования, чтобы классическое и квантовое движения имели равные

скорости, получим уравнение Лиувилля, допускающее многовихревые решения. Ранее было найдено [4], [8], что похожее уравнение определяет горизонт событий в решениях типа черной дыры, возникающих в одномерном уравнении НШ с квантовым потенциалом (5.3). Более того, выраженное в терминах волновой функции, это ограничение оказывается в точности условием само (антисамо)дуальности для поля ЧС [13]. На самом деле, поскольку уравнения самодуальности суть дифференциальные уравнения первого порядка, то они могут быть выписаны через поля скоростей. Поэтому авторы надеются, что их интерпретация может быть применена и к другим, более сложным моделям.

Благодарности. Один из авторов (О.К.П.) благодарен профессору Пьеру Сабатье за ценные обсуждения, а также профессору Фон-Че Лиу и Институту Математики Академии Синика (Тайбей) за гостеприимство. Работа была поддержана Измирским технологическим институтом (Турция) и Институтом математики Академии Синика (Тайбей, Тайвань).

Список литературы

- [1] *F. Guerra, M. Pusterla.* Lett. Nuovo Cimento. 1982. V. 34. P. 351; *J. P. Visier.* Phys. Lett. A. 1989. V. 135. P. 99.
- [2] *L. Smolin.* Phys. Lett. A. 1986. V. 113. P. 408; *O. Bertolami.* Phys. Lett. A. 1991. V. 154. P. 225.
- [3] *R. Schiller.* Phys. Rev. 1962. V. 125. P. 1100; P. 1109; P. 1116; *N. Rosen.* Amer. J. Phys. 1964. V. 32. P. 597.
- [4] *O. K. Pashaev, J. H. Lee.* Black holes and solitons of quantized dispersionless NLS and DNLS equations ANZIAM J. Appl. Math. (to appear).
- [5] *P. C. Sabatier.* Inverse Problems. 1990. V. 6. P. L47.
- [6] *G. Auberson, P. C. Sabatier.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 4028.
- [7] *D. Bohm.* Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 166.
- [8] *O. K. Pashaev, J. H. Lee.* J. Nonlinear Math. Phys. (Suppl.). 2001. V. 8. P. 1; Resonance NLS solitons as black holes in Madelung fluid. hep-th/9810139.
- [9] *L. Martina, O. K. Pashaev, G. Soliani.* Class. Q. Grav. 1997. V. 14. P. 3179; Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 084025.
- [10] *E. Schrödinger.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Klasse. 1931. P. 144.
- [11] *S. Jin, C. D. Levermore, D. W. McLaughlin.* Commun. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. P. 613.
- [12] *N. Ercolani, R. Montgomery.* Phys. Lett. A. 1993. V. 180. P. 402.
- [13] *R. Jackiw, S.-Y. Pi.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2969; Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 3500.
- [14] *G. Salesi.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 22. P. 1815; *G. Salesi, E. Recami.* Hydrodynamics of spinning particles. hep-th/9802106.
- [15] *V. A. Arkadiev, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov.* Inverse Problems. 1989. V. 5. P. L1.