Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Сен-Бен Ляо, Нелинейный ренормгрупповой поток и приближенные решения,
ТМФ, 2001, том 127, номер 3, 444–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:31:56

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕНОРМГРУППОВОЙ ПОТОК И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Предлагается самосогласованная ренормгрупповая схема в скалярной теории поля. Формализм совпадает с приближением локального потенциала в пределе ступенчатого обрезания, но отличается от гладкого обрезания. Исследуется зависимость критического индекса ν от параметра гладкости и поля разложения. Используется схема оптимизации, основанная на принципе минимальной чувствительности, для обеспечения наиболее быстрой сходимости критического индекса ν в зависимости от степени полиномиального усеечения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время снова наблюдается интерес к использованию точного ренормгруппового (ТРГ) формализма в исследовании таких непертурбативных явлений, как КХД в экстремальных условиях, динамическое нарушение киральной симметрии и критическое поведение статистических систем. Исследования с использованием ТРГ-формализма, впервые выполненные Вильсоном [1], Вегнером и Хьютоном [2], а также Полчински [3], были основаны на концепции блочного преобразования в импульсном пространстве, при котором связанные с большими импульсами степени свободы объединяются с помощью процедуры укрупнения. Систематическое уменьшение параметра обрезания приводит к нелинейному уравнению РГ-эволюции, которое определяет, как эффект нерелевантных (связанных с малыми расстояниями) мод можно включить в низкоэнергетическое эффективное блочное действие.

Уравнение ТРГ-потока можно вывести исходя из производящего функционала для связанных функций Грина

$$e^{W_k[J]} = \int D[\phi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \phi \cdot C_k^{-1} \cdot \phi - S[\phi] + J \cdot \phi \right\}, \quad (1.1)$$

где $C_k = \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p) / (p^2(1 - \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)))$ – аддитивное инфракрасное (ИК) обрезание, $\tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)$ – сглаживающая функция, которая стремится к $\Theta(p - k)$ при стремлении параметра

*Department of Physics, National Chung-Cheng University, Chia-Yi 621, Taiwan R. O. C.
E-mail: senben@phy.ccu.edu.tw

гладкости σ к бесконечности. Инфинитезимально варьируя эффективный ИК-масштаб k и выполняя преобразование Лежандра

$$-W_k[J] + J \cdot \Phi = \tilde{S}_k[\Phi] + \frac{\Phi \cdot C_k^{-1} \Phi}{2}, \quad \Phi = \frac{\delta W_k}{\delta J},$$

получаем РГ-уравнение для блочного действия $\tilde{S}_k[\Phi]$:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \tilde{S}_k}{\partial k} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{1}{C_k} k \frac{\partial C_k}{\partial k} \left(1 + C_k \frac{\delta^2 \tilde{S}_k}{\delta \Phi^2} \right)^{-1} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{1}{\tilde{\rho}_{k,\sigma}(1 - \tilde{\rho}_{k,\sigma})} k \frac{\partial \tilde{\rho}_{k,\sigma}}{\partial k} \left(1 + \frac{\tilde{\rho}_{k,\sigma}}{p^2(1 - \tilde{\rho}_{k,\sigma})} \frac{\delta^2 \tilde{S}_k}{\delta \Phi^2} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Это уравнение изучалось многими авторами (см. [4]–[6], а также [7] и приведенную там литературу). Оно является точным, но его нельзя решить аналитически. Для практических применений требуются дальнейшие приближения. Наиболее надежной на настоящий момент процедурой, не приводящей к потере непертурбативных свойств, является разложение по производным (см. [8], [9] и приведенную там литературу), при котором блочное действие записывается в виде

$$\tilde{S}_k[\Phi] = \int_x \left\{ \frac{Z_k(\Phi)}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + U_k(\Phi) + O(\partial^4) \right\}, \quad (1.3)$$

где $Z_k(\Phi)$ – константа перенормировки волновой функции, а $U_k(\Phi)$ – блочный потенциал [10]. В $O(\partial^0)$ -порядке – так называемом приближении локального потенциала (ПЛП) [11] – при $Z_k(\Phi) \rightarrow 1$ РГ-эволюция характеризуется уравнением

$$k \frac{\partial U_k(\Phi)}{\partial k} = \frac{1}{2} \int_p k \frac{\partial \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)}{\partial k} \frac{U''(\Phi)}{p^2 + \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p) U_k''(\Phi)}. \quad (1.4)$$

Это уравнение можно решать численными методами [12].

РГ-поток можно аппроксимировать и далее, разлагая $U_k(\Phi)$ по степеням Φ и затем усекая ряды на некотором порядке M [13], [14]:

$$U_k(\Phi) = \sum_{n=1}^M \frac{g_{2n}(k)}{(2n)!} (\Phi - \Phi')^{2n}, \quad g_{2n}(k) = \frac{\partial^{2n} U_k}{\partial \Phi^{2n}} \Big|_{\Phi=\Phi'}. \quad (1.5)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных таким образом преобразуется в набор M связанных обыкновенных уравнений. Поскольку точка Φ' полевого разложения произвольна, ее можно выбрать в начале координат, в зависящем от k минимуме или любым другим ненулевым значением поля [15]. Таким образом, усечение до многочленов не только позволяет непосредственно изучать поток констант связи, но и значительно упрощает численные аппроксимации. Недостаток такой схемы усечения состоит в том, что она приводит к нефизическим эффектам, таким как осцилляции значений критических индексов и появление комплексных собственных значений при больших M [4], [14]. Поэтому было бы желательно использовать схему, обеспечивающую как однозначное

отождествление релевантных неподвижных точек, так и сходимость физических величин.

В работе [16] была предложена процедура оптимизации для измерения критического индекса ν , основанная на принципе минимальной чувствительности. Значение параметра σ варьируется до достижения условия минимальной чувствительности $d\nu/dM|_\sigma = 0$. При оптимальном выборе σ индекс ν наименее чувствительно зависит от M , поскольку максимальное подавление вкладов высших порядков приводит к максимальной скорости сходимости для ν . Схема оптимизации, в которой удерживается только релевантный набор операторов и несколько ведущих нерелевантных операторов для характеристики РГ-потока, может приводить к нетривиальным следствиям для более сложных систем, включающих фермионы или калибровочные поля. В частности, вычисление можно было бы радикально упростить, если бы были подавлены некоторые классы диаграмм Фейнмана высших порядков.

В данной работе мы исходим из однопетлевого вклада и вводим “мультипликативную” сглаживающую функцию $\tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)$ для регуляризации интегрирования в импульсном пространстве [17]:

$$\tilde{U}_k^{(1)}(\Phi) = \frac{1}{2} \int_p \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p) \ln \left[1 + \frac{V''(\Phi)}{p^2} \right]. \quad (1.6)$$

Использование функции $\tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)$ позволяет ясно увидеть, каким образом регуляризуется каждая диаграмма Фейнмана. Самосогласованное РГ-уравнение можно построить из уравнения (1.6), дифференцируя по $\ln k$ и затем заменяя $V''(\Phi) \rightarrow U_k''(\Phi)$ в правой части:

$$k \frac{\partial U_k(\Phi)}{\partial k} = \frac{1}{2} \int_p k \frac{\partial \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)}{\partial k} \ln \left[1 + \frac{U_k''(\Phi)}{p^2} \right]. \quad (1.7)$$

Эта процедура аналогична самосогласованному улучшенному подходу Швингера–Дайсона. Основное внимание в данной работе уделяется иллюстрации того, как с помощью уравнения (1.7) получить альтернативный, эффективный рецепт удержания непертурбативной информации, содержащейся в исходном полном РГ-уравнении для $\tilde{S}_k[\Phi]$.

2. ПЛП И САМОСОГЛАСОВАННАЯ РГ-СХЕМА

Уравнение ТРГ можно построить, вводя сглаживающую функцию $\rho_{k,\sigma}(x)$, управляющую процедурой укрупнения, где k выступает как эффективное ИК-обрезание, разделяющее моды с низкими и высокими импульсами. В ПЛП при $Z_k(\Phi) = 1$ эволюция характеризуется потоком $U_k(\Phi)$. Для произвольной гладкой функции $\rho_{k,\sigma}(p) = \Theta_\sigma(k, p)$ удобно записать $\Theta_\sigma(k, p) = t$, где $0 \leq t \leq 1$, и репараметризация приводит к выражению

$$k \frac{dU_k(\Phi)}{dk} = \frac{S_d}{2} \int_{t(p=0)}^{t(p=\infty)} dt \frac{p^d(t) U''(\Phi)}{p^2(t) + (1-t) U_k''(\Phi)}. \quad (2.1)$$

Уравнение РГ для $U_k(\Phi)$ получается, таким образом, путем обращения $\rho_{k,\sigma}(p)$ в терминах $p(t)$.

Эволюционное уравнение, очевидно, зависит от выбора сглаживающей функции. В то время как ступенчатое обрезание приводит к хорошо определенной границе между модами высоких (проинтегрированных) и низких (непроинтегрированных) импульсов и дает дифференциальное уравнение в частных производных, в случае гладкого обрезания нет подобного четкого разделения и РГ-уравнение остается интегро-дифференциальным. Извлекаемое из решения РГ-потока физическое содержание, вообще говоря, не должно зависеть от формы обрезавшей функции, которая просто отражает способ интегрирования по нерелевантным степеням свободы. Однако из-за используемой аппроксимации такая зависимость явно возникает, и критический индекс ν демонстрирует некоторую зависимость от σ [8]. Эта зависимость может являться указанием на то, что был отброшен эффект некоторых релевантных операторов [18].

Мы видим, что в рамках ПЛП уравнение (1.4) можно также получить подобным самосогласованным приемом [19] исходя из соотношения

$$\tilde{U}_k^{(1)}(\Phi) = \frac{1}{2} \int_p \ln \left[1 + \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p) \frac{V''(\Phi)}{p^2} \right]. \quad (2.2)$$

Это можно объяснить следующим образом: поскольку здесь используется “точный” пропагатор, все графы Фейнмана высших порядков, принадлежащие к типу пересуммируемых в одной петле (т.е. маргаритки и супермаргаритки), включаются автоматически. В более общем виде можно записать

$$\tilde{U}_k^{(1)}(\Phi) = \frac{1}{2} \int_p \ln \left[1 + \mathcal{P}_{k,\sigma}(p) \frac{V''(\Phi)}{p^2} \right], \quad (2.3)$$

где

$$\mathcal{P}_{k,\sigma}(p) \frac{1}{p^2} = \frac{\tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)}{p^2} = \Delta_{k,\sigma}(p). \quad (2.4)$$

Здесь $\mathcal{P}_{k,\sigma}(p)$ действует как оператор проекции на безмассовый пропагатор $1/p^2$ и превращается в эффективный пропагатор $\tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)/p^2$, содержащий только моды с высокими импульсами $p \gtrsim k$.

Исследуем, в чем заключается отличие основанной на уравнении (1.6) альтернативной самосогласованной РГ-схемы от обычного ПЛП. Заметим сначала, что поскольку процедура укрупнения начинается при высоких импульсах, где $V''(\Phi)/p^2 \ll 1$, соотношение (2.2) можно разложить как

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k^{(1)}(\Phi) &= \frac{1}{2} \int_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\mathcal{P}_{k,\sigma}(p) \frac{V''(\Phi)}{p^2} \right]^n = \frac{1}{2} \int_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[\tilde{\rho}_{k,\sigma} \frac{V''(\Phi)}{p^2} \right]^n = \\ &= \frac{1}{2} \int_p \tilde{\rho}_{k,\sigma} \ln \left[1 + \frac{V''(\Phi)}{p^2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_p \tilde{\rho}_{k,\sigma} (1 - \tilde{\rho}_{k,\sigma}^n) \left(\frac{V''(\Phi)}{p^2} \right)^{n+1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дифференцируя обе части по $\ln k$ и применяя самосогласованное описание, получаем

$$k \frac{\partial U_k(\Phi)}{\partial k} = \frac{1}{2} \int_p k \frac{\partial \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)}{\partial k} \ln \left[1 + \frac{U_k''(\Phi)}{p^2} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_p k \frac{\partial \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)}{\partial k} [1 - (n+1) \tilde{\rho}_{k,\sigma}^n(p)] \left(\frac{U_k''(\Phi)}{p^2} \right)^{n+1}. \quad (2.6)$$

В первом члене в правой части этого уравнения обнаруживаем полную факторизацию зависимостей от бегущего масштаба k и от Φ . Мы подробно рассмотрим это уравнение в следующих разделах. Второй член, представляющий разность между самосогласованным приближением РГ и ПЛП, можно также записать в виде

$$\Delta U_k(\Phi) = \frac{S_d}{2} \int_{t(p=0)}^{t(p=\infty)} dt p^d(t) \left\{ \frac{U_k''(\Phi)}{p^2(t) + (1-t)U_k''(\Phi)} - \ln[p^2(t) + U_k''(\Phi)] \right\}. \quad (2.7)$$

Видно, что две РГ-схемы совпадают, когда $\mathcal{P}_{k,\sigma}^2(p) = \mathcal{P}_{k,\sigma}(p)$ или $\tilde{\rho}_{k,\sigma}^2(p) = \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)$. Однако это выполнено только для тривиального случая ступенчатого обрезания. С другой стороны, гладкое обрезание, подобное $\tilde{\rho}_{k,b}(p) = 1 - e^{-a(p/k)^b}$ и $\tilde{\rho}_{k,m}(p) = (p/k)^m / (1 + (p/k)^m)$, дает малое отклонение при больших m и b в режиме $p/k \gg 1$.

Отличительной чертой нашего подхода является использование того факта, что коль скоро известны пертурбативные результаты, то их можно преобразовать в соответствующие самосогласованные РГ-уравнения. Легко реализовать и обобщение на более высокие порядки разложения по производным. Например, поток $Z_k(\Phi)$ можно получить как [20], [21]

$$k \frac{\partial Z_k}{\partial k} = \int_p k \frac{\partial \tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)}{\partial k} \left\{ \frac{Z_k''}{Z_k p^2 + U_k''} - 2Z_k' \frac{Z_k' p^2 + U_k'''}{(Z_k p^2 + U_k'')^2} - \frac{p^2}{d} \frac{(Z_k')^2}{(Z_k p^2 + U_k'')^2} + \frac{4p^2}{d} Z_k Z_k' \frac{Z_k' p^2 + U_k'''}{(Z_k p^2 + U_k'')^3} + Z_k \frac{(Z_k' p^2 + U_k''')^2}{(Z_k p^2 + U_k'')^3} - \frac{4p^2}{d} Z_k^2 \frac{(Z_k' p^2 + U_k''')^2}{(Z_k p^2 + U_k'')^4} \right\}. \quad (2.8)$$

Приведенная выше схема, напоминающая подход Швингера–Дайсона, широко использовалась при рассмотрении более сложных вопросов, таких как нахождение эффективного кваркового пропагатора [22] и изучение динамического нарушения киральной симметрии в калибровочных теориях [23]. Одно из существенных преимуществ нашей схемы состоит в том, что в отличие от ТРГ-подхода, здесь поток $Z_k(\Phi)$ полностью аналитичен, даже в пределе ступенчатого обрезания, и поэтому можно легко реализовать численный алгоритм. Было показано, что включение эффекта от $Z_k(\Phi)$ в указанную схему улучшает точность вычисления ν [24]. Ниже для простоты мы полагаем $Z_k(\Phi) = 1$.

3. САМОСОГЛАСОВАННАЯ РГ-СХЕМА: СТУПЕНЧАТОЕ ОБРЕЗАНИЕ

Чтобы воспроизвести предел ступенчатого обрезания, следует считать, что t непрерывно меняется от 1 до 0 при $z = 1$, что приводит к уравнению [4]

$$\left[k \frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2}(d-2)\bar{\Phi} \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}} + d \right] \bar{U}_k(\bar{\Phi}) = - \int_0^1 dt \ln[1 + \bar{U}_k''(\Phi)] = - \ln[1 + \bar{U}_k''(\Phi)], \quad (3.1)$$

где $\bar{U}_k(\bar{\Phi}) = \zeta^2 k^{-d} U_k(\Phi)$, $\bar{\Phi} = \zeta k^{-(d-2)/2} \Phi$ и $\zeta = \sqrt{2/S_d} = \sqrt{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)}$. Соответствующее неподвижной точке решение имеет вид

$$-\frac{1}{2}(d-2)\bar{\Phi} \bar{U}^{*'} + d \bar{U}^* = - \ln[1 + \bar{U}^{*''}], \quad (3.2)$$

где $U^{*'}(0) = 0$ в силу симметрии относительно отражений.

Как уже было указано, только определенные значения $\bar{g}_0^* = \bar{U}^*(0) = -\ln(1 + \bar{g}_2^*)/d$ могут привести к физически осмысленным решениям [4], [13]; во всех других случаях встречается сингулярность вида $\bar{U}^* \sim \ln(\bar{\Phi}_c - \bar{\Phi})$ и потенциал становится комплексным после прохождения некоторого критического значения $\bar{\Phi}_c$. В размерности $d = 3$ были найдены только два решения: первое решение $\bar{g}_0^* = 0$ соответствует тривиальной гауссовой неподвижной точке, а второе решение $\bar{g}_0^* = 0.206343 \equiv s_0$ (или $\bar{g}_2^* = -0.461533 \equiv s$) – неподвижной точке Вильсона–Фишера. Качественные черты этих решений иллюстрируются на рис. 1.

Рис. 1. Сингулярность $\bar{\Phi}_c$ как функция g_0 при $d = 3$.

Как было отмечено во введении, вместо того чтобы решать полное уравнение потока, можно разложить $\bar{U}_k(\bar{\Phi})$ по степеням $\bar{\Phi}$, оборвать ряды на члене $\bar{\Phi}^{2M}$ и тем самым превратить нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных в набор M связанных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ниже мы рассмотрим как $\mathbb{Z}_2$ -инвариантные, так и неинвариантные схемы разложения.

3.1. Инвариантное разложение. Простейшее инвариантное полиномиальное разложение $\bar{U}_k(\bar{\Phi})$ можно выполнить вблизи точки $\bar{\Phi}' = 0$, как в соотношении (1.5). $\bar{\beta}$ -Функции $\bar{\beta}_n = k\partial\bar{g}_n/\partial k$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_2 &= -2\bar{g}_2 - \bar{G}_4, \\ \bar{\beta}_4 &= -\epsilon\bar{g}_4 - (-3\bar{G}_4^2 + \bar{G}_6), \\ \bar{\beta}_6 &= (2d-6)\bar{g}_6 - (30\bar{G}_4^3 - 15\bar{G}_4\bar{G}_6 + \bar{G}_8), \quad \dots,\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $\bar{G}_n = \bar{g}_n/(1 + \bar{g}_2)$ [25], и положения неподвижных точек можно теперь определить, требуя $\bar{\beta}_n = 0$ для всех n . Однако при характеристизации потока степенями $\bar{\Phi}$ происходит перетасовка вкладов от рядов по ϵ . Отметим также, что в соответствии с нашими соглашениями наибольшее *отрицательное* собственное значение соответствует обратному критическому индексу $1/\nu$.

Рис. 2. Осцилляции критического индекса ν и величины g_2^* как функций M .

Хорошо известно, что критический индекс ν , получаемый из полиномиального усечения со ступенчатым обрезанием, вообще не сходится, а осциллирующим образом зависит от M , как показано на рис. 2. Мы нашли, что при $M = 22$ порождается дополнительное релевантное направление. При дальнейшем увеличении M обнаруживается большее число нефизических решений и идентификация неподвижной точки Вильсона–Фишера становится неоднозначной. Осцилляция по ν тесно связана с осцилляцией по $\bar{g}_2^*$, а причина их связана с сингулярной структурой неусеченного потенциала неподвижной точки $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$ на комплексной плоскости [4]: асимптотическое поведение доминируется полюсом $\bar{\Phi}_c = |\bar{\Phi}_c|e^{i\theta_c}$ при $\theta_c \approx \pm\pi/2$, что дает приближенную четырехкратную периодичность. Такая зависимость от усечения не является неожиданной, поскольку неподвижные точки, идентифицируемые в каждом порядке, являются только приближенными, а не *истинными* неподвижными точками Вильсона–Фишера; поэтому возможный нерелевантный набор операторов продолжает эволюционировать, приводя к зависимости физических величин от M . Чтобы улучшить сходимость ν в полиномиальном усечении, Аоки с соавторами [15] выполнили разложение вблизи $\mathbb{Z}_2$ -инвариантного по-

ля $\bar{\chi}_0 = \bar{\Phi}_0^2/2$:

$$\bar{U}_k(\bar{\chi}) = \sum_{n=0}^M \frac{c_n(k)}{n!} (\bar{\chi} - \bar{\chi}_0)^n, \quad c_n(k) = \bar{U}_k^{(n)}(\chi_0) = \left. \frac{\partial^n \bar{U}_k}{\partial \bar{\chi}^n} \right|_{\bar{\chi}=\bar{\chi}_0}. \quad (3.4)$$

Сходимость радикально улучшается.

3.2. Неинвариантное разложение. Возможно альтернативное разложение потенциала вблизи некоторого ненулевого значения $\bar{\Phi}'$, как в соотношении (1.5). В этом случае присутствие нечетных степеней $\bar{\Phi}$ явным образом нарушает $\mathbb{Z}_2$ -симметрию. Эта новая схема оказывается особенно полезной при изучении спонтанного нарушения симметрии или когда бегущий параметр массы $\bar{g}_2(k)$ все еще является отрицательным в ходе РГ-эволюции. Оно также позволяет следить за потоком вблизи некоторой точки $\bar{\Phi}'$, а не вблизи начала координат.

Выбирая $\bar{\Phi}' = \bar{\Phi}_0$ как зависящий от k минимум, мы решаем связанные уравнения $\hat{\beta}_n = 0$ для нахождения неподвижных точек и находим, что число нефизических решений по-прежнему растет с ростом M . Кроме того, из-за потери $\mathbb{Z}_2$ -симметрии неподвижная точка Вильсона–Фишера больше не обладает только одним релевантным собственным направлением, как это имело место в $\mathbb{Z}_2$ -симметричном случае.

Новая неподвижная точка Вильсона–Фишера, управляющая критическим поведением класса универсальности Изинга, удовлетворяет следующим условиям:

- 1) все константы связи в неподвижных точках $\hat{g}_n^*$ вещественны;
- 2) экстремум $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$ близок к $\bar{\Phi}_0^* = 1.9287$ – значению поля, полученному из решения полного неусеченного ПЛП-уравнения;
- 3) при $M = 2j$ ($j > 2$) имеются $\ell = j + 1$ релевантных собственных направлений, собственные значения которых в соответствии с нашими соглашениями имеют отрицательную вещественную часть.

Изучим, как действуют указанные критерии. Сначала заметим, что неравенство $\bar{g}_2^* < 0$ при $M < 6$ указывает на то, что $\bar{\Phi}_0$ является локальным максимумом. При $M \geq 6$ экстремум становится локальным минимумом и мы имеем $\ell = j + 1$. Это происходит потому, что нарушающие $\mathbb{Z}_2$ -симметрию поля остаются релевантными на протяжении всего процесса. Кроме того, имеются еще две константы связи $\bar{g}_2^*$ и $\bar{g}_4^*$, которые являются релевантными по индексу. Например, при $M = 10$ релевантный набор должен иметь вид $\{\bar{g}_2^*, \bar{g}_3^*, \bar{g}_4^*, \bar{g}_5^*, \bar{g}_7^*, \bar{g}_9^*\}$, т.е. $\ell = 6$. Заметим, что классификация операторов вблизи тривиальной гауссовой неподвижной точки по-прежнему основана на подсчете их канонических размерностей $[\bar{g}_n] = d - n(d/2 - 1)$.

На рис. 3 изображен потенциал неподвижной точки $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$ как функция $\bar{\Phi} > 0$ при различных M . Заметим, что аппроксимация сначала улучшается с увеличением M , почти совпадая с полным неусеченным потенциалом при $M = 20$. Это же значение M оказывается порядком, при котором минимизируется линейный член в $\bar{\Phi}$, представляющий главный вклад от нарушения симметрии. Однако при $M > 20$ потенциал начинает отклоняться от неусеченного ПЛП-решения. При $M = 28$ разумный результат можно получить, только выбирая комплексное собственное значение. Замечательная сходимость индекса ν с ростом M вплоть до $M = 26$ показана на рис. 4. Отметим, что в схеме $\mathbb{Z}_2$ -инвариантного полиномиального усечения в зависимости от выбора точки разложения

критический индекс ν сходится к значению 0.689 (значение, полученное решением неусеченного ПЛП-уравнения) или осциллирует вокруг него. С другой стороны, наша неинвариантная схема дает значение 0.649 для широкого диапазона M . Такое несовпадение не удивительно, поскольку в двух рассматриваемых случаях различаются симметрии неподвижных точек для класса универсальности Изинга. Интересно также, что наш результат очень близок к значению 0.651, полученному процедурой оптимизации, в которой параметр оптимальной гладкости ищется из соображения достижения минимальной чувствительности [16].

Рис. 3. Потенциал неподвижной точки $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$, получаемый полиномиальным усечением. Точное ПЛП-решение показано сплошной линией.

Вообще говоря, вместо начала координат или зависящего от k минимума $\bar{\Phi}_0$ в качестве $\bar{\Phi}'$ можно выбрать произвольную точку. Однако скорость сходимости тесно связана с выбором $\bar{\Phi}'$. Аоки с соавторами [15] показали, что разложение РГ-уравнения для $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$ со ступенчатым обрезанием вблизи минимума $\bar{\Phi}_0$ дает больший радиус сходимости, чем разложение в начале координат, и такое разложение приводит к точному решению в пределе больших N . Поэтому при разложении вблизи минимума $\bar{\Phi}_0$ сглаживающая функция ступенчатого обрезания при $\sigma \rightarrow \infty$ дает оптимальную “гладкость”, удовлетворяющую принципу минимальной чувствительности (см. следующий раздел).

4. САМОСОГЛАСОВАННАЯ РГ-СХЕМА: ГЛАДКИЕ ОБРЕЗАНИЯ

Рассмотрим теперь потенциал неподвижной точки $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$, получаемый из полиномиального усечения с гладкими обрезаниями. В отличие от случая ступенчатого обрезания, РГ-поток характеризуется (безразмерным) интегро-дифференциальным уравнением

$$\left[k \frac{\partial}{\partial k} - \frac{1}{2} (d-2) \bar{\Phi} \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}} + d \right] \bar{U}_k(\bar{\Phi}) = \int_0^\infty dz z^{d-1} k \frac{\partial \tilde{\rho}_{k,\sigma}}{\partial k} \ln[z^2 + \bar{U}_k'(\bar{\Phi})]. \quad (4.1)$$

Рис. 4. Критический индекс ν как функция M , получаемый из неинвариантного разложения $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$ вблизи минимума $\bar{\Phi}_0$.

Мы получаем, что в гладком случае в пределах определенного диапазона k бегущий параметр массы $\bar{g}_2(k)$ (как и $\bar{g}_2^*$) является отрицательной величиной, а в функциях $\bar{\beta}_n$ появляется сингулярность, если $z^2(t) + \bar{U}_k''(\bar{\Phi})$ стремится к нулю.

Причина, по которой такой сингулярности нет для ступенчатого обрезания, но она присутствует в случае гладкого обрезания для самосогласованной РГ-схемы, заключается в том способе, который используется для исключения соответствующих большим импульсам мод. В случае ТРГ-формализма ступенчатое обрезание обеспечивает четкое разделение между проинтегрированными ($z \equiv p/k > 1$) и непроинтегрированными модами ($z \equiv p/k < 1$). При отрицательной массовой кривизне $\bar{g}_2^* = s \approx -0.461533$ (в единицах k) для неусеченного потенциала интегрирование полностью аналитично, поскольку условие $1 + s > 0$ всегда выполнено в знаменателе. Однако в самосогласованной формулировке РГ при гладком обрезании нет резкой границы и для любого конечного σ область интегрирования по z растягивается от нуля до бесконечности. Поэтому возникает сингулярность при $z^2 + s \leq 0$. В действительности ситуация, с которой мы здесь сталкиваемся, напоминает спонтанное нарушение симметрии, когда потенциал имеет вид двойной ямы. Подчеркнем, однако, что потенциал $\bar{U}^*(\bar{\Phi})$ описывает масштабно-инвариантную теорию в симметричной фазе; при интегрировании вплоть до $k = 0$ в размерном РГ-уравнении потенциал принимает вид однократной ямы с единственным минимумом в начале координат [12]. Истинное нарушение симметрии выделено тем, что справедливо неравенство $\lim_{k \rightarrow 0} g_2(k) < 0$. Заметим, что интегрирование с гладким обрезанием было бы полностью аналитично, если бы использовалось ПЛП; различие между двумя схемами можно отнести на счет различия способов, которыми модифицируются пропагаторы.

Для преодоления трудности, связанной с расходимостью вблизи $z = \sqrt{-\bar{g}_2^*}$, разло-

жим потенциал вблизи ненулевого минимума $\bar{\Phi}_0$, где $\bar{U}''(\bar{\Phi}_0) = \hat{g}_2 > 0$. Рассмотрим два гладких представления $\rho_{k,b}(p) = e^{-a(p/k)^b}$ при $a = \ln 2$ и $\rho_{k,m}(p) = [1 + (p/k)^m]^{-1}$. Из рис. 5 и 6 ясно видно, что чем более близким к ступенчатому является обрезание, тем быстрее сходимость ν в схеме полиномиального усечения. Таким образом, $m, b = \infty$ являются оптимальными значениями, при которых достигается условие минимальной чувствительности $d\nu/dM|_{b,m} = 0$. При убывании $b(m)$ происходит увеличение амплитуды осцилляций ν . Сравнивая два рисунка, видим также меньшую амплитуду осцилляций при экспоненциальном обрезании.

Рис. 5. Критический индекс ν как функция b при различных M .

Подчеркнем еще раз, что оптимальная гладкость σ , получаемая из принципа минимума чувствительности, вообще говоря, зависит как от рассматриваемой модели, так и от используемой аппроксимации. В то время как ступенчатое обрезание дает оптимальную гладкость при выборе $\bar{\Phi}'$ в качестве минимума $\bar{\Phi}_0$ потенциала, оптимальное значение σ , удовлетворяющее условию минимальной чувствительности для произвольно выбранного $\bar{\Phi}'$, будет соответствовать гладкому обрезанию. С другой стороны, ступенчатое обрезание дает достаточно слабую сходимость для $\bar{\Phi}' = 0$. Как недавно показал Литим [18], общий критерий для нахождения оптимального выбора σ можно получить, анализируя безмассовый блочный пропагатор $\Delta_\sigma(z) = 1/P_\sigma^2(z) = \tilde{\rho}_{k,\sigma}/z^2$.

5. ПОДВЕДЕНИЕ ИТОГОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Мы ввели самосогласованную РГ-схему исходя из однопетлевого пертурбативного выражения. Наше самосогласованное уравнение совпадает с ПЛП-уравнением в пределе ступенчатого обрезания. Преимущество нового подхода состоит в том, что пертурбативные результаты для независимых мод легко можно “одеванием” превратить в набор связанных нелинейных РГ-уравнений.

Рис. 6. Критический индекс ν как функция t при различных M .

При использовании аппроксимации полиномиального усечения мы нарушаем $\mathbb{Z}_2$ -симметрию, выбирая минимум потенциала в качестве точки разложения. Физическая неподвижная точка Вильсона–Фишера идентифицируется с помощью требования, чтобы все $\bar{g}_n^*$ были вещественны и чтобы потенциал имел минимум вблизи $\bar{\Phi}_0^* = 1.9287$ (значения, получаемого без усечения). Кроме того, при $M = 2j$, $j > 2$, число релевантных собственных направлений должно быть равно $j + 1$. Сходимость радикально улучшается в неинвариантном разложении вблизи $\bar{\Phi}_0$, которое быстро сходится к $\nu = 0.649$, что отличается от значения 0.689 – решения полного ПЛП-уравнения. Расхождение возникает из-за различия в симметрии двух подходов.

При гладком обрезании амплитуда осцилляций растет при уменьшении σ , а скорость сходимости убывает. Поэтому ступенчатое обрезание является “оптимальной” сглаживающей функцией для самосогласованной РГ-схемы при разложении вблизи минимума $\bar{\Phi}_0$. В самом деле, условие минимальной чувствительности $d\nu/dM|_\sigma = 0$ достигается при $\sigma \rightarrow \infty$.

Полученные нами результаты показывают, что на сходимость физических величин при решении усеченных РГ-уравнений относительно $\bar{U}_k(\bar{\Phi})$ сильное влияние оказывают два фактора: точка разложения $\bar{\Phi}_0$ и параметр гладкости σ в сглаживающей функции $\tilde{\rho}_{k,\sigma}(p)$. Оптимальный выбор $\bar{\Phi}_0$, за который обычно принимается минимум $\bar{U}_k(\bar{\Phi})$, дает наибольший радиус сходимости в разложении [15]. Однако когда выбор $\bar{\Phi}_0$ не является оптимальным, можно определить σ так, чтобы физические величины, подобные ν , проявляли минимальную чувствительность к порядку усечения M .

Представленную здесь процедуру оптимизации легко распространить на фермионные теории и калибровочные поля. Самосогласованную РГ-схему с гладким обрезанием можно также сформулировать с помощью регуляризации операторного обрезания в пространстве собственного времени [26], [27]. Для проверки эффективности нашей са-

мосогласованной РГ-схемы следует принять во внимание влияние константы перенормировки волновой функции $Z_k(\bar{\Phi})$. Эта работа ведется в настоящее время.

Благодарности. Автору приятно поблагодарить организаторов конференции NEEDS 2000 за приглашение и отдельно поблагодарить С.-Y. Lin и М. Стрикленда за совместную работу и Д. Литима, Т. Морриса, Дж. Полоний и К. Веттериха за ценные обсуждения. Работа частично поддержана National Science Council of Taiwan (контракт NSC-89-2112-M-194-005).

Список литературы

- [1] *K. Wilson.* Phys. Rev. B. 1971. V. 4. P. 3174; *K. Wilson, J. Kogut.* Phys. Rep. C. 1975. V. 12. P. 75.
- [2] *F. J. Wegner, A. Houghton.* Phys. Rev. A. 1972. V. 8. P. 401.
- [3] *J. Polchinski.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 231. P. 269.
- [4] *T. R. Morris.* Phys. Lett. B. 1994. V. 334. P. 355; V. 329. P. 241.
- [5] *N. Tetradis, C. Wetterich.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 422. P. 541; *B. Bergerhoff.* Phys. Lett. B. 1998. V. 437. P. 381.
- [6] *C. Bagnuls, C. Bervillier.* Exact renormalization group equations. An introductory review. hep-th/0002034.
- [7] *J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich.* Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. hep-ph/0005122.
- [8] *T. R. Morris.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 2411; Nucl. Phys. B. 1998. V. 509. P. 637.
- [9] *T. R. Morris.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 495. P. 477.
- [10] *S.-B. Liao, J. Polonyi.* Ann. Phys. 1993. V. 222. P. 122; Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 4474.
- [11] *J. F. Nicoll, T. S. Chang, H. E. Stanley.* Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 1446; V. 33. P. 540.
- [12] *S.-B. Liao, M. Strickland.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 497. P. 611; 1998. V. 532. P. 753; Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 3653.
- [13] *A. Hasenfratz, P. Hasenfratz.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 270. P. 687.
- [14] *A. Margaritis, G. Odor, A. Patkos.* Z. Phys. C. 1988. V. 39. P. 109.
- [15] *K. Aoki et al.* Prog. Theor. Phys. 1996. V. 95. P. 409; 1998. V. 99. P. 451.
- [16] *S.-B. Liao, J. Polonyi, M. Strickland.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 567. P. 493.
- [17] *S.-B. Liao, C.-Y. Lin, M. Strickland.* Self-consistent renormalization group flow. hep-th/0010100.
- [18] *D. Litim.* Phys. Lett. B. 2000. V. 486. P. 92.
- [19] *S.-B. Liao, J. Polonyi, D. P. Xu.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 748.
- [20] *J. Alexandre, J. Polonyi.* Renormalization group for the internal space. hep-th/9902144.
- [21] *V. Branchina.* Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 065010; *A. Bonanno, V. Branchina, H. Mohrbach, D. Zappala.* Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 065009; *A. Bonanno, D. Zappala.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 7383.
- [22] *M. Strickland.* Dynamical mass generation and confinement at finite temperature. Ph.D. Thesis. North Carolina, USA: Duke University, 1997; Non-perturbative QED and QCD at finite temperature. hep-ph/9809592.
- [23] *K. Aoki, K. Takagi, H. Terao, M. Tomoyose.* Non-ladder extended renormalization group analysis of the dynamical symmetry breaking. hep-th/0002038.
- [24] *O. Bohr, B.-J. Schaefer, J. Wambach.* Renormalization group flow equations and the phase transition in $O(N)$ -models. hep-ph/0007098.
- [25] *J. Alexandre, V. Branchina, J. Polonyi.* Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 016002.
- [26] *G. Papp et al.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 096002.
- [27] *S.-B. Liao.* Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 2020; 1997. V. 56. P. 5008.