Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Маньяс, Л. Мартинес Алонсо, Е. Медина, КП-теория сетей Егорова, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 457–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:54:01

© 2001 г. М. Маньяс*, Л. Мартинес Алонсо*, Е. Медина†

КП-ТЕОРИЯ СЕТЕЙ ЕГОРОВА

Теория многокомпонентной КП-иерархии используется для характеристики явных примеров сетей Егорова. Особенно эффективным оказывается метод ∂ -одевания для пропагаторов Коши.

1. ВВЕДЕНИЕ

Два десятилетия тому назад было обнаружено, что теория ортогональных сетей

$$ds^2 = \sum_{i=1}^M H_i^2 (du_i)^2$$

тесно связана с теорией интегрируемых систем гидродинамического типа в размерности $1+1$ [1]–[3]. Более того, частный тип ортогональных сетей (∂ -инвариантные сети Егорова) оказался актуальным при классификации топологических квантовых теорий поля [4]. В настоящей работе описываются некоторые недавние достижения в применении теории Кадомцева–Петвиашвили (КП) к теории сетей Егорова.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных [5]–[7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_k} - \beta_{ik} \beta_{kj} &= 0, \quad i, j, k = 1, \dots, N, \quad \text{если } i, j, k \text{ различны,} \\ \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u_j} + \sum_{\substack{k=1, \dots, N \\ k \neq i, j}} \beta_{ki} \beta_{kj} &= 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

где $\beta_{ij} := H_i^{-1} \partial H_j / \partial u_i$, при условиях

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}; \quad \partial H_i = 0, \quad \partial := \sum_j \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

*Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense, Madrid, Spain. E-mail: manuel@darboux.fis.ucm.es; luism@eucmos.sim.ucm.es

†Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, Cádiz, Spain. E-mail: elena.medina@uca.es

Важная в данном контексте математическая структура – класс многообразий Фробениуса – была предложена в работах [2], [4], [8]–[10]. Локально многообразие Фробениуса определяется [4] плоской метрикой

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^N \eta^{ij} dx_i dx_j$$

и структурой коммутативной ассоциативной алгебры

$$\partial_i \cdot \partial_j = \sum_k c_{ij}^k(x) \partial_k, \quad \partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad x^i := \sum_k \eta^{ik} x_k,$$

с единицей ∂_1 . Метрика ds^2 должна быть инвариантной по отношению к данному произведению, а *деформированная связность*

$$\nabla_i X^j := \partial_i X^j + z \sum_k c_{ik}^j(\mathbf{x}) X^k, \quad (1)$$

где z – спектральный параметр, должна иметь нулевую кривизну.

Значительная часть структуры многообразия Фробениуса содержится в системах *деформированных плоских координат* $\theta_k(z, \mathbf{x})$ [4], [8]–[10] для связности (1)

$$\nabla_i \nabla_j \theta_k = 0$$

или, эквивалентным образом,

$$\partial_i \partial_j \theta_k = z \sum_l c_{ij}^l(\mathbf{x}) \partial_l \theta_k. \quad (2)$$

С другой стороны, из сделанных допущений относительно $(\eta, c_{ij}^k(\mathbf{x}))$ следует, что существует такая функция $F = F(\mathbf{x})$ (*функция свободной энергии*), что

$$c_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k F,$$

и в силу свойства ассоциативности алгебры функция F удовлетворяет уравнениям Виттена–Дайкграфа–Э. Верлинде–Х. Верлинде (ВДВВ) [11], [12]

$$\sum_{r,s} \partial_i \partial_j \partial_r F \eta^{rs} \partial_s \partial_m \partial_k F = \sum_{r,s} \partial_i \partial_m \partial_s F \eta^{sr} \partial_r \partial_j \partial_k F. \quad (3)$$

В системе деформированных плоских координат, нормированных условием

$$\theta_i(0, \mathbf{x}) = x_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

из уравнения (2) вытекает [4], что функцию свободной энергии можно получить из уравнения

$$\partial_i F(\mathbf{x}) = \frac{\partial \theta_i}{\partial z}(0, \mathbf{x}).$$

Более того, коэффициенты разложения

$$\theta_i(z, \mathbf{x}) = \sum_{p \geq 0} h_{i,p}(\mathbf{x}) z^p \quad (4)$$

определяют бесконечное семейство функционалов

$$H_{i,p}[\mathbf{x}] := \int h_{i,p+1}(\mathbf{x}) dt,$$

которые находятся в инволюции по отношению к скобке Пуассона

$$\{x^i(t_1), x^j(t_2)\} := \eta^{ij} \delta'(t_1 - t_2).$$

Соответствующие гамильтоновы системы составляют интегрируемую иерархию *систем гидродинамического типа*.

2. КП-ИЕРАРХИИ И ГРАССМАННИАН

N -компонентную КП-иерархию можно ввести как семейство потоков в бесконечномерном грассманиане [13], [14]. Пусть $D(r)$ и $\gamma(r)$ обозначают соответственно диск $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r\}$ и его границу $\{z \in \mathbb{C}: |z| = r\}$ и пусть $H_{\gamma(r)}$ – множество рядов Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

с коэффициентами $a_n \in M_N(\mathbb{C})$ (кольцо комплексных $(N \times N)$ -матриц), которые сходятся на окружности $\gamma(r)$. В дальнейшем нам понадобятся два различных грассманиана $\text{Gr}_{\gamma(r)}$ и $\text{Gr}_{\gamma(r)}^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элементы из $\text{Gr}_{\gamma(r)}$ являются такими подмножествами W в $H_{\gamma(r)}$, что

- 1) W есть левый $M_N(\mathbb{C})$ -модуль,
- 2) проекция оператора $P_+ W \rightarrow H_{\gamma(r)}^+$ из W в

$$H_{\gamma(r)}^+ = \left\{ w \in H_{\gamma(r)} : w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\}$$

является биекцией.

Аналогично грассманиан $\text{Gr}_{\gamma(r)}^*$ состоит из таких подмножеств V в $H_{\gamma(r)}$, что

- 1*) V есть правый $M_N(\mathbb{C})$ -модуль,
- 2*) проекция оператора $P_+ : V \rightarrow H_{\gamma(r)}^+$ является биекцией.

Имеется отображение

$$\text{Gr}_{\gamma(r)} \xrightarrow{*} \text{Gr}_{\gamma(r)}^*, \quad W \mapsto W^*$$

такое, что для всякого заданного $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$ подпространство $W^* \in \text{Gr}_{\gamma(r)}^*$ является множеством тех элементов $v \in H_{\gamma(r)}$, которые удовлетворяют уравнению

$$\int_{\gamma(r)} w(z)v(z) dz = 0 \quad \forall w \in W.$$

Типичные элементы грассманиана возникают в рамках $\bar{\partial}$ -метода. Для заданной подходящей $(N \times N)$ -матричной обобщенной функции $R(z, z')$ с носителем в $D(r) \times D(r)$ соответствующий элемент $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$ дается множеством ограничений на $\gamma(r)$ решений $w(z)$ уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}(z) = \int_{D(r)} w(z') R(z', z) d^2 z'.$$

Тогда $W^* \in \text{Gr}_{\gamma(r)}^*$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}(z) = - \int_{D(r)} R(z, z') v(z') d^2 z'.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Связанная с заданным элементом $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$ *КП-функция Бейкера* является единственным элементом $\psi \in W$, который допускает сходящееся разложение вида

$$\psi(z, \mathbf{u}) = \chi(z, \mathbf{u})\psi_0(z, \mathbf{u}), \quad \chi(z, \mathbf{u}) = I_N + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n(\mathbf{u})}{z^n}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}(r)^N, \quad z \in \gamma(r).$$

Сопряженная КП-функция Бейкера есть единственный элемент $\psi^* \in W^*$ с разложением

$$\psi^*(z, \mathbf{u}) = \psi_0(z, \mathbf{u})^{-1}\chi^*(z, \mathbf{u}), \quad \chi^*(z, \mathbf{u}) = I_N + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^*(\mathbf{u})}{z^n}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}(r)^N, \quad z \in \gamma(r).$$

Здесь $I_N := \sum_{i=1}^N E_i$ обозначает единичную матрицу в $M_N(\mathbb{C})$. Отметим, что при любых $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(r)^N$ как $\chi(z, \mathbf{u})$, так и $\chi^*(z, \mathbf{u})$ являются аналитическими функциями z в области $\mathbb{C} \setminus D(r)$.

Функция Бейкера удовлетворяет так называемой N -компонентной КП-иерархии. Эта иерархия является бесконечной системой линейных уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_{i,n}} = P_{i,n}(\mathbf{u}, \partial)\psi, \quad i = 1, \dots, N, \quad n \geq 1, \quad \partial := \partial_1 + \dots + \partial_N, \quad (5)$$

где $P_{i,n}(\mathbf{u}, \partial)$ – семейство линейных по ∂ дифференциальных операторов.

Первые несколько членов иерархии (5) имеют вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_{i,1}} = E_i \partial \psi + [a_1, E_i]\psi, \quad i = 1, \dots, N,$$

что можно переписать как

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \psi_k, \quad i \neq k, \quad (6)$$

где

$$\psi_i := (\psi_{i1}, \dots, \psi_{iN}), \quad u_k := u_{k,1}, \quad \beta = a_1.$$

Сопряженная подобным образом функция Бейкера удовлетворяет линейной системе

$$\frac{\partial \psi_j^*}{\partial u_k} = \psi_k^* \beta_{kj}, \quad j \neq k, \quad (7)$$

где

$$\psi_i^* := \begin{pmatrix} \psi_{1i}^* \\ \vdots \\ \psi_{Ni}^* \end{pmatrix}.$$

Условия совместности как уравнений (6), так и уравнений (7) приводят к системе уравнений Дарбу для сопряженной сети. Более того, из уравнений (6) и (7) видно, что с набором коэффициентов вращения β_{ij} связано семейство сопряженных сетей с касательными векторами и коэффициентами Ламе вида $(\mathbf{X}_i)_j := \mathbf{X}_{ij}$ и $H_i = \mathbf{H}_{li}$, $l = 1, \dots, N$, где

$$\mathbf{X}(\mathbf{u}) := \int_{\mathbb{C}} \psi(z, \mathbf{u}) N(z) d^2 z, \quad \mathbf{H}(\mathbf{u}) := \int_{\mathbb{C}} M(z) \psi^*(z, \mathbf{u}) d^2 z.$$

Здесь $N(z)$ и $M(z)$ – подходящие $(N \times N)$ -матричные обобщенные функции.

3. ПРОПАГАТОР КОШИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Связанный с заданным элементом $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$ *пропагатор Коши* есть функция Грина $\Psi = \Psi(z, z', \mathbf{u})$ $\bar{\partial}$ -оператора

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{z}}(z, z', \mathbf{u}) = \pi \delta(z - z'), \quad z, z' \in \mathbb{C} \setminus D(r), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}(\infty)^N,$$

удовлетворяющая следующим граничным условиям:

- 1) для каждого фиксированного $\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\infty)^N$ и $z' \in \mathbb{C} \setminus D(r)$ ограничение Ψ на $\gamma(r)$, рассматриваемое как функция z , является элементом W ;
- 2) при $z \rightarrow \infty$ имеем

$$\Psi(z, z', \mathbf{u}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \psi_0(z, \mathbf{u}).$$

Следующая теорема [2] связывает пропагатор Коши с функцией Бейкера. Используем обозначения

$$[z] = ([z]_1, \dots, [z]_N), \quad [z]_i = \left(\frac{1}{z}, \dots, \frac{1}{nz^n}, \dots \right).$$

ТЕОРЕМА 1. *Пропагатор Коши, связанный с элементом W из $\text{Gr}_{\gamma(r)}$, можно записать в терминах волновых функций КП ψ и ψ^* как*

$$\Psi(z, z', \mathbf{u}) = \begin{cases} -\frac{1}{z'} \psi^*(z', \mathbf{u}) \psi(z, \mathbf{u} + [z']) & \text{при } |z| \leq |z'|, \\ \frac{1}{z} \psi^*(z', \mathbf{u} - [z]) \psi(z, \mathbf{u}) & \text{при } |z'| \leq |z|. \end{cases}$$

Матричные элементы Ψ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial \Psi_{jk}}{\partial u_i}(z, z', \mathbf{u}) = \psi_{ji}^*(z', \mathbf{u}) \psi_{ik}(z, \mathbf{u}). \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что сетевая функция сопряженной сети с касательными векторами и коэффициентами Ламе, задаваемыми соответственно формулами $(\mathbf{X}_i)_j := \mathbf{X}_{ij}$ и $H_i = \mathbf{H}_{li}$, $l = 1, \dots, N$, выражается как l -я строка в матричной функции

$$\mathbf{x} := \int_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} M(z') \Psi(z, z') N(z) d^2 z d^2 z' + \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x}_0$ — произвольная постоянная матрица.

4. РЕДУКЦИЯ ЕГОРОВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$ удовлетворяет *редукции Егорова*, если

- 1) для каждого $w \in W$ функция $\tilde{w}(z) := zw(z)$ также лежит в W ;
- 2) для каждого $v \in W^*$ функция $\tilde{v}(z) := v(-z)^t$ лежит в W .

Следующая теорема доказана в работе [15].

ТЕОРЕМА 2. Если элемент $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$ удовлетворяет редукции Егорова, то для любой несингулярной матрицы $\mathcal{N}$ функции

$$\theta_i(z, \mathbf{u}) := \left(\mathcal{N}^t \left(\Psi(z, 0, \mathbf{u}) - \frac{1}{z} \right) \mathcal{N} \right)_{1i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (9)$$

являются системой нормированных деформированных плоских координат для многообразия Фробениуса, определенного:

1) ∂ -инвариантной метрикой Егорова

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N H_i^2 (du_i)^2, \quad H_i(\mathbf{u}) := (\psi(0, \mathbf{u}) \mathcal{N})_{i1};$$

2) системой плоских координат

$$x_i := \theta_i(0, \mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^N \eta^{ij} dx_i dx_j, \quad \eta = (\mathcal{N}^t \mathcal{N})^{-1};$$

3) структурными константами

$$c_{ij}^l = \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \frac{\partial u_k}{\partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial u_k}.$$

Отметим, что из формул (9) и (4) следует, что каждый элемент $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$, удовлетворяющий редукции Егорова, определяет иерархию систем гидродинамического типа с гамильтоновыми плотностями

$$h_{i,p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial^{p+1}}{\partial z^{p+1}} (\mathcal{N}^t z \Psi(z, 0, \mathbf{u}) \mathcal{N})_{1i} \Big|_{z=0}.$$

5. ОДЕВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ СЕТЕЙ

Рассмотрим теперь метод одевания для сопряженных сетей [16]. Пусть $D(r)$ и $D(\tilde{r})$ — два диска с центрами в начале координат, $r < \tilde{r}$. Пусть $\gamma(r)$ и $\gamma(\tilde{r})$ — границы этих дисков, а A — кольцо $D(\tilde{r}) - D(r)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Матричная обобщенная функция $R = R(z, z')$ с носителем в $A \times A$ определяет *одевающее преобразование*

$$T_R : \text{Gr}_{\gamma(r)} \mapsto \text{Gr}_{\gamma(\tilde{r})}, \quad W \mapsto \widetilde{W},$$

где для каждого $W \in \text{Gr}_{\gamma(r)}$ соответствующий элемент $\widetilde{W} \in \text{Gr}_{\gamma(\tilde{r})}$ дается граничными значениями на $\gamma(\tilde{r})$ матричных функций $w = w(z)$, удовлетворяющих $\bar{\partial}$ -уравнениям

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}(z) = \int_A w(z') R(z', z) d^2 z', \quad z \in A,$$

причем ограничение w на $\gamma(r)$ является элементом из W .

Для случая сепарабельного ядра

$$R(z, z') = \pi \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n C_{k\ell} f_k(z) g_\ell(z')$$

одевание пропагатора Коши можно выполнить явно. В этом случае $C_{k\ell}$ – постоянные комплексные $(N \times N)$ -матрицы, а f_k и g_ℓ – скалярные распределения. Чтобы определить соответствующее преобразование, полезно ввести обозначения

$$\begin{aligned} \mu_k(z) &:= \int_A \Psi(z', z) f_k(z') d^2 z', \quad k = 1, \dots, m, \\ \nu_\ell(z) &:= \int_A \Psi(z, z') g_\ell(z') d^2 z', \quad \ell = 1, \dots, n, \\ \omega_{\ell k} &:= \int_{A \times A} \Psi(z', z'') f_k(z') g_\ell(z'') d^2 z' d^2 z'', \quad k = 1, \dots, m, \quad \ell = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Определим также матрицы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m) : A \rightarrow M_{N \times mN}(\mathbb{C}), \quad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix} : A \rightarrow M_{nN \times N}(\mathbb{C}), \\ \mathbf{C} = (C_{k\ell}) \in M_{mN \times nN}(\mathbb{C}), \quad \boldsymbol{\omega} = (\omega_{\ell k}) \in M_{nN \times mN}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Тогда имеем [16]

$$\tilde{\Psi}(z, z') = \Psi(z, z') + \boldsymbol{\mu}(z') \mathbf{C} (1 - \boldsymbol{\omega} \mathbf{C})^{-1} \boldsymbol{\nu}(z).$$

6. ОДЕВАНИЕ СЕТЕЙ ЕГОРОВА

Редукция Егорова сохраняется при одевании, если

$$v \in \widetilde{W}^* \Rightarrow v^t(-z) \in \widetilde{W}.$$

Для ядра, удовлетворяющего уравнениям

$$\begin{aligned} z R(z, z') &= z' R(-z', -z)^t, \\ R(z, z') &= R(-z', -z)^t, \end{aligned}$$

соответствующее преобразование одевания сохраняет эту редукцию. Более того, из этих условий следует, что

$$R(z, z') = R_0(z) \delta(z - z'), \quad R_0(z) = R_0(-z)^t.$$

Сепарабельные ядра этого типа имеют вид

$$R_0(z) = \pi \sum_{k=1}^n [C_k \delta(z - p_k) + C_k^t \delta(z + p_k)],$$

где C_k — комплексные $(N \times N)$ -матрицы и $p_k \in \mathbb{C}$, т.е.

$$R(z, z') = \pi \sum_{k=1}^n [C_k \delta(z - p_k) \delta(z' - p_k) + C_k^t \delta(z + p_k) \delta(z' + p_k)].$$

Соответствующее одевающее преобразование, в котором могут возникнуть проблемы, связанные с сингулярностями, оказывается корректно определенным, если

$$C_k^2 = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Явные примеры сетей Егорова и соответствующих им многообразий Фробениуса можно, таким образом, охарактеризовать как вакуумные решения [15]. Например, функция свободной энергии

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_N) = & \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{p}(x_2^2 + \dots + x_N^2) + \frac{x_1}{2}(x_2^2 + \dots + x_N^2) + \\ & + \frac{1}{6p^3} [1 + 2p^2(x_2^2 + \dots + x_N^2)] \sqrt{1 - p^2(x_2^2 + \dots + x_N^2)} - \\ & - \sum_{j=2}^N \frac{x_j^2}{2p} \ln \left[-\frac{2x_j}{c_j} \frac{1 + \sqrt{1 - p^2(x_2^2 + \dots + x_N^2)}}{x_2^2 + \dots + x_N^2} \right] \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнениям ассоциативности ВДВВ (3).

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica (проект PB98-0821).

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1983. Т. 270. С. 781.
- [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29.
- [3] С. П. Царев. ДАН СССР. 1985. Т. 282. С. 534.
- [4] B. Dubrovin. Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627.
- [5] G. Darboux. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Paris: Gauthier-Villars, 1910; Reprinted: Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1993.
- [6] G. Lamé. Leçons sur la théorie des coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris: Mallet-Bachelier, 1859.
- [7] V. E. Zakharov. Duke Math. J. 1998. V. 94. P. 103; B. E. Захаров, С. В. Мананков. ДАН. 1998. Т. 360. № 3. С. 324.
- [8] B. Dubrovin. Geometry of 2D topological field theory. Preprint SISSA-89/94/FM, SISSA, Trieste, 1994; hep-th/9407018.
- [9] B. Dubrovin, Y. Zhang. Commun. Math. Phys. 1998. V. 198. P. 311.
- [10] B. Dubrovin, Y. Zhang. Frobenius manifolds and Virasoro constraints. math.AG/9808048.
- [11] E. Witten. Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 281.
- [12] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde. Nucl. Phys. B. 1991. V. 325. P. 59.
- [13] G. Segal, G. Wilson. Publ. Math. IHES. 1985. V. 61. P. 5.
- [14] E. Witten. Commun. Math. Phys. 1988. V. 113. P. 529.
- [15] M. Mañas, L. Martínez Alonso, E. Medina. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 7181.
- [16] M. Mañas, L. Martínez Alonso, E. Medina. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 2871.