Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Нутку, М. Б. Шефтель, Метод группового расслоения для комплексного уравнения Монжа–Ампера, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 465–474

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:55:26

© 2001 г.

Й. Нутку*, М. Б. Шефтель*

МЕТОД ГРУППОВОГО РАССЛОЕНИЯ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА

Метод группового расслоения применен для нахождения неинвариантных решений комплексного уравнения Монжа–Ампера (СМА₂). Группа бесконечной симметрии уравнения СМА₂ использована для расслоения пространства решений на орбиты решений относительно этой группы и для соответствующего разложения уравнения СМА₂ на автоморфную и резольвентную системы. Предложен новый подход к групповому расслоению, основанный на коммутаторной алгебре операторов инвариантного дифференцирования. Эта алгебра вместе с тождеством Якоби дает коммутаторное представление резольвентной системы. Для решения этой системы предлагается редукция симметрии, позволяющая получить редуцированные разрешающие уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важной проблемой теории уравнений в частных производных, обладающих лиевыми группами симметрии, является построение решений, которые не имеют непрерывных симметрий, т.е. неинвариантных решений в смысле группового анализа [1], [2]. Так, чтобы построить метрику для наиболее важного гравитационного инстантона $K3$, требуются неинвариантные решения комплексного уравнения Монжа–Ампера (СМА₂).

По нашему мнению, метод группового расслоения может служить основой для нахождения неинвариантных решений дифференциальных уравнений. Мы применяем этот метод к СМА₂ и развиваем его, существенно используя коммутаторную алгебру операторов инвариантного дифференцирования.

Основные черты метода группового расслоения описаны в разделе 2. Дифференциальные инварианты второго и третьего порядков относительно бесконечной симметричной группы всех унимодулярных биголоморфизмов представлены в разделе 3, а операторы инвариантного дифференцирования – в разделе 4. Дифференциальные инварианты высших порядков получаются в результате применения этих операторов к базисным инвариантам. Мы находим коммутаторную алгебру векторных полей, образуемую опера-

*Feza Gürsey Institute, P. O. Box 6, Cengelkoy, Istanbul, Turkey

торами инвариантного дифференцирования. В разделе 5 мы разлагаем множество дифференциальных инвариантов на многообразии решений CMA_2 на два множества: множество новых независимых переменных и множество функций от этих переменных. Тем самым фиксируется общий вид автоморфной системы. Применяя коммутаторную алгебру к дифференциальным инвариантам, трактуемым как независимые переменные, мы получаем главную часть резольвентной системы. Показано, что коммутаторная алгебра операторов инвариантного дифференцирования и ее тождества Якоби эквивалентны полному набору разрешающих уравнений для CMA_2 . Эти уравнения являются уравнениями в частных производных по четырем независимым переменным. В разделе 6 определены две симметрии резольвентной системы, унаследованные от симметрий исходного CMA_2 , они используются для вывода редуцированных разрешающих уравнений, которые являются уравнениями в частных производных по двум независимым переменным и, следовательно, их легче интегрировать.

2. ГРУППОВОЕ РАССЛОЕНИЕ

Используемый нами подход основан на методе *группового расслоения*, который первоначально был предложен Ли [1], затем развит Весьо [3] и сформулирован в современном виде Овсянниковым [2]. Мы используем бесконечную группу симметрии уравнения, чтобы разложить уравнение на *автоморфную* и *резольвентную* системы. Исходная проблема тогда сводится к решению резольвентной системы. Автоморфная система имеет следующее свойство: все ее решения можно получить, применяя преобразования группы симметрии к любому ее частному решению. Это свойство делает систему интегрируемой. Неинвариантные решения могут быть найдены явно, если найдены решения резольвентной системы.

Мы считаем, что метод группового расслоения может служить основой для нахождения неинвариантных решений уравнений в частных производных. В случае инвариантных решений мы имеем дело с подмногообразием, размерность которого меньше, чем размерность многообразия всех решений. Это порождает редукцию симметрий исходных уравнений, сопровождающуюся потерей всех других решений. Но в разложении группы не происходит редукции симметрии, поскольку при этом рассматриваются орбиты неинвариантных решений, а эти орбиты являются инвариантными подмногообразиями многообразия всех решений, имеющими ту же размерность, что и исходное многообразие решений. Классическая редукция симметрии налагает дополнительные условия в виде новых уравнений в частных производных, совместных с исходным уравнением, и, таким образом, упрощает нахождение инвариантных решений по сравнению с нахождением общего решения. Аналогичное упрощение без сужения на инвариантные решения дается групповым расслоением. При этом роль дополнительных условий играет автоморфная система.

Предлагаемый нами подход состоит в систематическом использовании коммутаторной алгебры операторов инвариантного дифференцирования. Таким образом, мы обходимся без обычной процедуры нахождения разрешающих уравнений путем трудоемких выводов условий интегрируемости автоморфной системы. Коммутаторная алгебра операторов инвариантного дифференцирования и тождества Якоби оказываются эквива-

лентными полному набору разрешающих уравнений и дают коммутаторное представление резольвентной системы, аналогичное представлению Лакса. Использование коммутаторной алгебры операторов инвариантного дифференцирования значительно упрощает теорию группового расслоения как в концептуальном, так и в вычислительном аспектах. Для решения резольвентной системы мы предлагаем метод редуцирования симметрии, использующий две симметрии уравнения CMA_2 , наследуемые резольвентной системой и не использованные при расслоении. Поскольку редукция симметрии разрешающих уравнений не обязательно означает редукцию симметрии решений CMA_2 , то решение редуцированной резольвентной системы может дать неинвариантные решения исходного уравнения.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУППЫ УНИМОДУЛЯРНЫХ БИГОЛОМОРФИЗМОВ

Эллиптическое уравнение CMA_2 имеет вид

$$u_{1\bar{1}}u_{2\bar{2}} - u_{1\bar{2}}u_{2\bar{1}} = 1, \quad (1)$$

где u — неизвестная вещественная функция двух комплексных переменных ζ^1, ζ^2 и комплексно сопряженных к ним $\bar{\zeta}^1$ и $\bar{\zeta}^2$, нижний индекс означает дифференцирование по соответствующему аргументу, ∂_i обозначает частную производную по ζ^i , черта обозначает комплексное сопряжение.

При симметричном анализе CMA_2 неизвестная функция u и ее частные производные трактуются как новые независимые переменные, служащие локальными координатами в пространствах продолжений. Порядок продолжения K указывает максимальный порядок частных производных функции u , используемых как независимые переменные.

Полная группа Ли точечных преобразований симметрии уравнения (1) была определена Бойером и Винтерницем [4]. Если ограничиться вещественными генераторами, то элементы алгебры Ли имеют вид

$$\begin{aligned} X_U &= \frac{1}{2} (U_2 \partial_1 - U_1 \partial_2 + U_{\bar{2}} \partial_{\bar{1}} - U_{\bar{1}} \partial_{\bar{2}}), \\ \tilde{X}_V &= \frac{i}{2} (V_2 \partial_1 - V_1 \partial_2 - V_{\bar{2}} \partial_{\bar{1}} + V_{\bar{1}} \partial_{\bar{2}}), \\ X_\Omega &= \Omega \partial_u, \\ D_1 &= i (\zeta^1 \partial_1 + \zeta^2 \partial_2 - \bar{\zeta}^1 \partial_{\bar{1}} - \bar{\zeta}^2 \partial_{\bar{2}}), \\ D_2 &= \zeta^1 \partial_1 + \zeta^2 \partial_2 + \bar{\zeta}^1 \partial_{\bar{1}} + \bar{\zeta}^2 \partial_{\bar{2}} + 2u \partial_u, \end{aligned} \quad (2)$$

где U, V и Ω — вещественные функции двух комплексных переменных и их сопряженных, удовлетворяющие системе линейных уравнений

$$U_{1\bar{1}} = 0, \quad U_{2\bar{2}} = 0, \quad U_{1\bar{2}} = 0, \quad U_{2\bar{1}} = 0,$$

решение которой таково, что U, V и Ω являются вещественными частями произвольных биголоморфных функций.

Для группового расслоения мы используем бесконечную группу всех унимодулярных биголоморфизмов, точнее *группу всех голоморфных преобразований двух комплексных переменных с единичным якобианом* и генераторами, определяемыми уравнениями (2).

Дифференциальные инварианты, т.е. инварианты группы симметрии в пространстве продолжения, зависят от производных неизвестных функций. Наивысший порядок этих производных называется *порядком дифференциального инварианта*. Найдем все функционально независимые дифференциальные инварианты генераторов (2) до определенного порядка K , необходимые для группового расслоения.

В случаях нулевого порядка ($K = 0$) и первого продолжения ($K = 1$) существует только один независимый инвариант u . В случае второго продолжения ($K = 2$) имеются два инварианта второго порядка

$$\begin{aligned}\mu &= u_{1\bar{1}}u_{2\bar{2}} - u_{1\bar{2}}u_{2\bar{1}}, \\ \lambda &= u_1u_{\bar{2}}u_{2\bar{1}} + u_2u_{\bar{1}}u_{1\bar{2}} - u_1u_{\bar{1}}u_{2\bar{2}} - u_2u_{\bar{2}}u_{1\bar{1}},\end{aligned}$$

являющиеся левой частью уравнения CMA_2 и его лагранжианом [5]. Мы имеем только две независимые инвариантные переменные на многообразии решений CMA_2 .

Поскольку число независимых переменных в разрешающих уравнениях должно быть тем же самым, что и в исходных уравнениях [2], требуется по крайней мере пять независимых дифференциальных инвариантов и, следовательно, необходимо третье продолжение.

В случае третьего продолжения ($K = 3$) имеются десять функционально независимых дифференциальных инвариантов третьего порядка:

$$\begin{aligned}l &= u_{\bar{2}}(u_1\varphi_2 - u_2\varphi_1) - u_{\bar{1}}(u_1\psi_2 - u_2\psi_1), \\ L &= u_{\bar{2}}(\bar{\varphi}\varphi_2 - \bar{\psi}\varphi_1) - u_{\bar{1}}(\bar{\varphi}\psi_2 - \bar{\psi}\psi_1), \\ m &= u_{2\bar{2}}\varphi_1 - u_{1\bar{2}}\varphi_2 - u_{2\bar{1}}\psi_1 + u_{1\bar{1}}\psi_2, \\ M &= \bar{\varphi}(u_{1\bar{1}}u_{2\bar{2}} - u_{2\bar{1}}u_{1\bar{2}} - u_{1\bar{2}}u_{2\bar{2}} + u_{2\bar{2}}u_{1\bar{1}}) - \\ &\quad - \bar{\psi}(u_{1\bar{1}}u_{1\bar{2}} - u_{2\bar{1}}u_{1\bar{1}} - u_{1\bar{2}}u_{1\bar{2}} + u_{2\bar{2}}u_{1\bar{1}}), \\ \nu &= \psi(u_1\varphi_2 - u_2\varphi_1) - \varphi(u_1\psi_2 - u_2\psi_1)\end{aligned}\tag{3}$$

и комплексно-сопряженные к ним. Здесь φ и ψ определяются формулами

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} u_1u_{2\bar{1}} - u_2u_{1\bar{1}}, \quad \psi \stackrel{\text{def}}{=} u_1u_{2\bar{2}} - u_2u_{1\bar{2}}\tag{4}$$

и являются важными, хотя и неинвариантными величинами. Заметим, что дифференциальные инварианты второго порядка выражаются через φ и ψ следующим образом:

$$\mu = \bar{\mu} = \frac{1}{2}(\psi_{\bar{1}} - \varphi_{\bar{2}}), \quad \lambda = \bar{\lambda} = u_{\bar{2}}\varphi - u_{\bar{1}}\psi.$$

При $K = 3$ мы имеем 13 функционально независимых дифференциальных инвариантов, достаточных для группового расслоения:

$$u, \quad \lambda, \quad \mu, \quad l, \quad \bar{l}, \quad L, \quad \bar{L}, \quad M, \quad \bar{M}, \quad m, \quad \bar{m}, \quad \nu, \quad \bar{\nu}.\tag{5}$$

4. ОПЕРАТОРЫ ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И БАЗИС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Операторы инвариантного дифференцирования коммутируют с продолженным генератором однопараметрической подгруппы группы симметрии, использованной для расслоения [2]. Эти операторы являются линейными комбинациями операторов полных производных D_i , $i = 1, 2, \bar{1}, \bar{2}$, с функциональными коэффициентами, зависящими от локальных координат пространства продолжения. В случае СМА₂ имеем четыре таких оператора:

$$\delta = u_1 D_2 - u_2 D_1, \quad \Delta = \bar{\varphi} D_2 - \bar{\psi} D_1$$

и комплексно-сопряженные к ним. При действии на любой дифференциальный инвариант операторов инвариантного дифференцирования получаем дифференциальный инвариант на один порядок выше. Величины φ и ψ , определенные в (4), являются компонентами оператора инвариантного дифференцирования $\bar{\Delta}$. Хотя эти величины и не являются дифференциальными инвариантами, они играют важную роль в построении дифференциальных инвариантов. Отметим результаты действия операторов инвариантного дифференцирования на функцию u и ее первые производные:

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= \lambda, & \delta(u) &= 0, \\ \varphi &= \delta(u_{\bar{1}}), & \psi &= \delta(u_{\bar{2}}), & \Delta(\ln u_{\bar{k}}) &= -\mu, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (6)$$

В частности, δ переводит функцию u в нуль. Инвариант μ в левой части уравнения СМА₂ является базисным инвариантом.

Восемь дифференциальных инвариантов третьего порядка получаются действием операторов инвариантного дифференцирования на инварианты второго порядка λ и μ :

$$l = \delta(\lambda), \quad (7)$$

$$L = \Delta(\lambda) + \mu\lambda, \quad (8)$$

$$m = \delta(\mu), \quad M = \Delta(\mu)$$

и комплексно-сопряженные к ним. Оставшиеся инварианты третьего порядка ν и $\bar{\nu}$ являются базисными и не могут порождаться действием операторов инвариантного дифференцирования на инварианты второго порядка. Тем не менее инвариант ν можно выразить через оператор δ и неинвариантные величины φ и ψ так же, как в соотношениях (3):

$$\nu = \psi\delta(\varphi) - \varphi\delta(\psi).$$

Все эти инварианты получены непосредственным решением условий инвариантности для третьего продолжения.

Операторы инвариантного дифференцирования образуют алгебру векторных полей, определенную коммутационными соотношениями

$$[\delta, \bar{\delta}] = \bar{\Delta} - \Delta, \quad [\Delta, \bar{\Delta}] = \frac{1}{\lambda}(L\bar{\Delta} - \bar{L}\Delta) + \left(\frac{\mu l}{\lambda} - m\right)\bar{\delta} - \left(\frac{\mu \bar{l}}{\lambda} - \bar{m}\right)\delta, \quad (9)$$

$$[\delta, \Delta] = \frac{1}{\lambda}(l\Delta - (L + \lambda\mu)\delta), \quad [\delta, \bar{\Delta}] = \mu\delta - \frac{\nu}{\lambda}\bar{\delta} + \frac{l}{\lambda}\bar{\Delta} \quad (10)$$

и комплексно-сопряженными уравнений (10).

Таким образом, базис дифференциальных инвариантов состоит из u , μ , ν и $\bar{\nu}$. Полный набор дифференциальных инвариантов *произвольного порядка* для CMA_2 можно построить, повторяя действие операторов инвариантного дифференцирования на базисные инварианты и взяв полученные в результате такого действия произвольные гладкие функции.

5. АВТОМОРФНАЯ СИСТЕМА И РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

На многообразии решений уравнения CMA_2 пять дифференциальных инвариантов (5) являются константами:

$$\mu = 1, \quad M = 0, \quad m = 0, \quad \bar{M} = 0, \quad \bar{m} = 0, \quad (11)$$

и мы имеем лишь восемь инвариантов

$$u, \quad \lambda, \quad l, \quad \bar{l}, \quad L, \quad \bar{L}, \quad \nu, \quad \bar{\nu}.$$

Для расслоения группы мы выбираем четыре инварианта: u , инвариант второго порядка λ и простейшую пару инвариантов третьего порядка $l, \bar{l}$, рассматриваемых в качестве независимых переменных, количество которых то же, что и в исходном уравнении (1) [2]. Остальные четыре инварианта $L, \bar{L}, \nu$ и $\bar{\nu}$ суть гладкие функции $F, \bar{F}, G$ и $\bar{G}$ этих независимых переменных. Тем самым мы фиксируем общий вид *автоморфной системы* для уравнения CMA_2 :

$$L = F(u, \lambda, l, \bar{l}), \quad \nu = G(u, \lambda, l, \bar{l}) \quad (12)$$

и комплексно-сопряженные к ним уравнения. Неизвестные комплексные функции F и G удовлетворяют уравнениям в частных производных, являющимся результатом условий интегрируемости уравнений в частных производных (12) и уравнения CMA_2 . Вид системы уравнений (12), как набора уравнений в частных производных, следует из явных выражений для дифференциальных инвариантов, полученных ранее. Уравнения для неизвестных функций F и G называются разрешающими уравнениями. Наша главная цель в этом разделе – вывести эти уравнения.

Использование коммутаторной алгебры операторов инвариантного дифференцирования позволяет получить разрешающие уравнения и представить их в компактной форме. Сначала упростим коммутаторную алгебру операторов инвариантного дифференцирования, введя новую пару таких операторов Y и Z и комплексно-сопряженных к ним с помощью соотношений

$$\delta = \lambda Y, \quad \Delta = \lambda Z, \quad \bar{\delta} = \lambda \bar{Y}, \quad \bar{\Delta} = \lambda \bar{Z}. \quad (13)$$

Для Y и Z коммутационные соотношения (9) и (10) имеют более простой вид:

$$\begin{aligned} [Y, Z] &= -\frac{2}{\lambda} Y, & [Y, \bar{Z}] &= \frac{1}{\lambda^2} (\bar{F} Y - G \bar{Y}), \\ [Y, \bar{Y}] &= \frac{1}{\lambda^2} (\bar{l} Y - l \bar{Y}) + \frac{1}{\lambda} (\bar{Z} - Z), & [Z, \bar{Z}] &= \frac{1}{\lambda^2} (l \bar{Y} - \bar{l} Y) + \frac{1}{\lambda} (\bar{Z} - Z), \end{aligned} \quad (14)$$

где были использованы соотношения (11), учитывающие CMA_2 , и общий вид автоморфной системы (12). Действие новых операторов инвариантного дифференцирования на дифференциальные инварианты определяется равенствами (6)–(8) в сочетании с определениями (13):

$$Y(u) = 0, \quad Y(\lambda) = \frac{l}{\lambda}, \quad Z(u) = 1, \quad Z(\lambda) = \frac{\Phi}{\lambda}, \quad (15)$$

где $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} F - \lambda$.

Теперь введем вспомогательные комплексные переменные

$$\vartheta = Z(l), \quad \sigma = Y(l), \quad \rho = Z(\bar{l}), \quad \tau = Y(\bar{l}) \quad (16)$$

и комплексно-сопряженные к ним. Все они являются функциями независимых переменных u, λ, l и $\bar{l}$. Эти вспомогательные переменные служат дополнительными неизвестными в разрешающих уравнениях. Формулы (15) и (16) определяют явные выражения для новых операторов инвариантного дифференцирования

$$Y = \sigma \partial_l + \tau \partial_{\bar{l}} + \frac{l}{\lambda} \partial_\lambda, \quad Z = \vartheta \partial_l + \rho \partial_{\bar{l}} + \frac{\Phi}{\lambda} \partial_\lambda + \partial_u, \quad (17)$$

которые суть проекции новых операторов инвариантного дифференцирования на пространство дифференциальных инвариантов.

Применим коммутационные соотношения (14) для $Y, Z, \bar{Y}$ и $\bar{Z}$ к дифференциальным инвариантам u, λ, l и $\bar{l}$, рассматриваемым как независимые переменные. (Применение этих соотношений к u дает в результате только тождества.) Полученные 12 разрешающих уравнений имеют вид

$$\bar{\tau} = \tau + \frac{1}{\lambda}(F - \bar{F}), \quad (18)$$

$$Y(\vartheta) - Z(\sigma) + \frac{2}{\lambda}\sigma = 0, \quad (19)$$

$$Y(\rho) - Z(\tau) + \frac{2}{\lambda}\tau = 0, \quad (20)$$

$$Z(\bar{\tau}) - \bar{Y}(\vartheta) + \frac{1}{\lambda^2}(F\bar{\tau} - \bar{G}\sigma) = 0, \quad (21)$$

$$\bar{Z}(\sigma) - Y(\bar{\rho}) + \frac{1}{\lambda^2}(\bar{F}\sigma - G\bar{\tau}) = 0, \quad (22)$$

$$\bar{Y}(\sigma) - Y(\bar{\tau}) + \frac{1}{\lambda^2}(\bar{l}\sigma - l\bar{\tau}) + \frac{1}{\lambda}(\bar{\rho} - \vartheta) = 0, \quad (23)$$

$$Z(\bar{\rho}) - \bar{Z}(\vartheta) - \frac{1}{\lambda}(\bar{\rho} - \vartheta) + \frac{1}{\lambda^2}(\bar{l}\sigma - l\bar{\tau}) = 0, \quad (24)$$

$$Y(F) = \vartheta - \frac{l}{\lambda}, \quad (25)$$

$$Y(\bar{F}) = \bar{\rho} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}(l\bar{F} - \bar{l}G), \quad (26)$$

$$Z(\bar{F}) = -\tau + \frac{1}{\lambda}\bar{F} + \frac{1}{\lambda^2}(|G|^2 + 2|F|^2 + 3|l|^2), \quad (27)$$

$$Y(\bar{G}) = \rho - \frac{\bar{l}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}(\bar{l}F - l\bar{G}), \quad (28)$$

$$Z(G) = -\sigma + \frac{1}{\lambda}G + \frac{3}{\lambda^2}(l^2 + FG), \quad (29)$$

и комплексно-сопряженные к ним. Уравнения (27)–(29) нельзя получить таким способом¹⁾. Причина особого статуса этих трех уравнений станет ясна из доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Коммутаторная алгебра (14) операторов инвариантного дифференцирования Y , Z , $\bar{Y}$ и $\bar{Z}$ вместе с тождествами Якоби для этих коммутаторов эквивалентна резольвентной системе и, следовательно, дает коммутаторное представление этой системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем выражения (17) для операторов Y , Z и комплексно-сопряженных к ним в коммутационных соотношениях (14), чтобы получить разрешающие уравнения (18)–(26). Чтобы найти остальные три уравнения, используем лишь два независимых тождества Якоби:

$$[[Y, Z], \bar{Y}] + [[Z, \bar{Y}], Y] + [[\bar{Y}, Y], Z] = 0,$$

из которого следует разрешающее уравнение (28), и

$$[[Y, Z], \bar{Z}] + [[Z, \bar{Z}], Y] + [[\bar{Z}, Y], Z] = 0,$$

из которого следуют разрешающие уравнения (27) и (29).

Таким образом, мы имеем коммутаторное представление резольвентной системы, подобное представлению Лакса, которое включает тождества Якоби для коммутаторов. Этот факт может рассматриваться как некоторое обобщение метода обратной задачи рассеяния, пригодное для резольвентных систем.

6. РЕДУКЦИЯ СИММЕТРИИ РЕЗОЛЬВЕНТНОЙ СИСТЕМЫ И РЕДУЦИРОВАННЫЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Для редукции симметрии резольвентной системы (18)–(29) используем две ее коммутирующие симметрии

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 &= i(2l\partial_l + 4G\partial_G + 4\sigma\partial_\sigma + 2\vartheta\partial_\vartheta - 2\rho\partial_\rho - 2\bar{l}\partial_{\bar{l}} - 4\bar{G}\partial_{\bar{G}} - 4\bar{\sigma}\partial_{\bar{\sigma}} - 2\bar{\vartheta}\partial_{\bar{\vartheta}} + 2\bar{\rho}\partial_{\bar{\rho}}), \\ \hat{D}_2 &= 2(u\partial_u + \lambda\partial_\lambda + l\partial_l + \bar{l}\partial_{\bar{l}} + F\partial_F + G\partial_G + \bar{F}\partial_{\bar{F}} + \bar{G}\partial_{\bar{G}}), \end{aligned}$$

унаследованные от симметрий D_1 и D_2 исходного уравнения (1). Сначала мы применим $\hat{D}_1$, чтобы свести четыре независимые переменные u , λ , l и $\bar{l}$ к трем новым независимым

¹⁾Арифметика $4 \times 3 = 12$ здесь не годится, так как не все из 12 уравнений, полученных таким путем, являются независимыми.

переменным u , λ и ω , где $\omega = \bar{l}\bar{l}$, с соответствующей редукцией неизвестных в резольвентной системе

$$\begin{aligned} F &= F(u, \lambda, \omega), & G &= l^2 g(u, \lambda, \omega), & \sigma &= l^2 s(u, \lambda, \omega), \\ \tau &= \tau(u, \lambda, \omega), & \vartheta &= lO(u, \lambda, \omega), & \rho &= \bar{l}r(u, \lambda, \omega) \end{aligned}$$

вместе с комплексно-сопряженными уравнениями. Затем применим $\hat{D}_2$ для редукции резольвентной системы, что сведет множество независимых переменных к двум независимым переменным $v = u/\lambda$ и $w = \omega/u^2 = \bar{l}\bar{l}/u^2$ с соответствующей редукцией неизвестных в резольвентной системе

$$\begin{aligned} F &= \lambda f(v, w), & G &= \frac{l^2}{\lambda} h(v, w), & \sigma &= \frac{l^2}{\omega} S(v, w), \\ \tau &= \tau(v, w), & \vartheta &= \frac{l}{\lambda} Q(v, w), & \rho &= \frac{\bar{l}}{\lambda} R(v, w) \end{aligned}$$

вместе с комплексно-сопряженными уравнениями. Тогда редуцированная резольвентная система превращается в систему уравнений в частных производных с двумя неизвестными v и w :

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \tau + f - \bar{f}, \\ (\tau + S)vwQ_w - v^3w(vQ_v + Q) - [v(Q + R) - 2]wS_w + \\ &\quad + v(vf - v - 1)S_v + v(R + 2)S = 0, \\ vw(S + \tau)R_w - v^4wR_v + v(\tau - v^2w)R - \\ &\quad - [v(Q + R) - 2]w\tau_w + v(vf - v - 1)\tau_v + 2v\tau = 0, \\ [v(Q + R) - 2]w\bar{\tau}_w - v(vf - v - 1)\bar{\tau}_v + \\ &\quad + v(f - Q)\bar{\tau} - vw(\bar{S} + \bar{\tau})Q_w + v^4wQ_v - v^3w\bar{h}S = 0, \\ [v(\bar{Q} + \bar{R}) - 2]wS_w - v(v\bar{f} - v - 1)S_v + \\ &\quad + v(\bar{f} - \bar{Q})S - vw(S + \tau)\bar{R}_w + v^4w\bar{R}_v + v^3w(\bar{R} - h\bar{\tau}) = 0, \\ (\bar{S} + \bar{\tau})wS_w - v^3wS_v + (\bar{\tau} - \bar{S})S - \\ &\quad - (S + \tau)w\bar{\tau}_w + v^3w\bar{\tau}_v + v^2w(S - \bar{\tau} + \bar{R} - Q) = 0, \\ [v(Q + R) - 2]w\bar{R}_w - v(vf - v - 1)\bar{R}_v - [v(\bar{Q} + \bar{R}) - 2]wQ_w + \\ &\quad + v(v\bar{f} - v - 1)Q_v + v(\bar{f}Q - f\bar{R} + S - \bar{\tau}) = 0, \\ (S + \tau)f_w - v^3f_v + v^2f = v^2(Q - 1), \\ (S + \tau)\bar{f}_w - v^3\bar{f}_v = v^2(\bar{R} + 1) - v^4wh, \\ [v(Q + R) - 2]w\bar{f}_w - v(vf - v - 1)\bar{f}_v = v[(f + 2)\bar{f} - \tau] + v^5w^2h\bar{h} + 3v^3w, \\ (S + \tau)w\bar{h}_w - v^3w\bar{h}_v + 2(\tau - v^2w)\bar{h} = R - f - 1, \\ [v(Q + R) - 2]wh_w - v(vf - v - 1)h_v = 2v(2f - Q)h - \frac{1}{vw}S + 3v \end{aligned}$$

и комплексно-сопряженные к ним уравнения.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили общий подход к отысканию неинвариантных решений уравнения CMA_2 , основанный на методе группового расслоения. Наше главное достижение в развитии метода группового расслоения состоит в определении центральной роли, которую играет коммутаторная алгебра операторов инвариантного дифференцирования, в частности коммутаторное представление полных резольвентных систем.

Для группового расслоения уравнения CMA_2 мы получили автоморфную и резольвентную системы. Показано, что операторы инвариантного дифференцирования и их коммутаторная алгебра дают простой способ получения разрешающих уравнений, а именно коммутаторная алгебра вместе с ее тождествами Якоби эквивалентна полной резольвентной системе. Следовательно, мы имеем коммутаторное представление резольвентной системы, подобное представлению Лакса.

В настоящей работе мы не пытались найти неинвариантные решения, оставив эту задачу для будущих публикаций. Мы, однако, предполагаем, что редукция симметрии резольвентной системы является возможным средством для получения ее частных решений. Мы вывели такую редуцированную резольвентную систему, которую решать проще, чем исходные разрешающие уравнения.

Благодарности. Авторы благодарят Павла Винтерница за интересные беседы о теории групповых расслоений.

Список литературы

- [1] *S. Lie.* Gesammelte Abhandlungen. V. 1–6. Leipzig: B. G. Teubner, 1922–1937.
- [2] *Л. В. Овсянников.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [3] *E. Vessiot.* Acta Math. 1904. V. 28. P. 307.
- [4] *C. P. Boyer, P. Winternitz.* J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 1081.
- [5] *Y. Nutku.* Phys. Lett. A. 2000. V. 268. P. 293.