Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Джао Дзыюнь, r -Матрица и алгебро-геометрическое решение системы АКС, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 3, 488–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:15:34

© 2001 г.

Джао Дзыюнь*

r -МАТРИЦА И АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ АКНС

Развит подход к конечномерным интегрируемым системам с нелинейными эволюционными уравнениями в рамках r -матрицы и алгебро-геометрического решения. Метод иллюстрируется хорошо известным уравнением АКНС. Представлена r -матрица АКНС-потока со связями и получено алгебро-геометрическое решение уравнения АКНС.

1. ВВЕДЕНИЕ

В идеале цель исследования солитонных уравнений, или нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ), состоит в получении их явных решений. Уравнения Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура (АКНС) являются очень важной иерархией НЭУ в теории солитонов [1]. Она может привести к уравнениям Кортевега–де Фриза (КдФ), модифицированному КдФ, синус-Гордон, $\sinh$ -Гордон, нелинейному уравнению Шредингера и т.п. Все эти уравнения решаются методом обратной задачи рассеяния [2] и обыкновенно имеют N -солитонные решения [3]. Одним из направлений исследований в этой области является периодическая задача с граничными условиями, связанная с этими специальными НЭУ. Такую задачу первоначально исследовали Лакс [4] и Дубровин, Кричевер и Новиков [5]. Они использовали блоховские собственные функции и некоторые средства анализа на римановых поверхностях и успешно получили алгебро-геометрические решения (или конечнозонные решения) некоторых хорошо известных нелинейных уравнений, таких как уравнения КдФ и Тоды. Однако алгебро-геометрические решения уравнений АКНС с тех пор не были получены. В настоящей работе мы решаем эту задачу в рамках r -матрицы и условия, связывающего конечномерные интегрируемые системы с НЭУ.

Приведем некоторые используемые обозначения: $dp \wedge dq$ обозначает стандартную симплектическую структуру в евклидовом пространстве $R^{2N} = \{(p, q): p = (p_1, \dots, p_N), q = (q_1, \dots, q_N)\}$, $N > 1$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в R^N ; $[\cdot, \cdot]$ – обычный коммутатор; $\otimes$ – тензорное произведение двух матриц; I – единичная матрица 2×2 , а $C^\infty(R)$ – множество всех C^∞ -функций на вещественном поле R . Скобка

*Т-7, Theoretical Division, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos NM, USA; Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China; Fachbereich 17, Mathematik, Universitaet-Gh Kassel, D-34109 Kassel, Germany. E-mail: zhijun@uni-kassel.de

Пуассона двух функций Гамильтона F и G на $(R^{2N}, dp \wedge dq)$ определена как

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial q}, \frac{\partial G}{\partial p} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial F}{\partial p}, \frac{\partial G}{\partial q} \right\rangle;$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_N$ суть N произвольным образом заданные различные константы, λ и μ — два различных спектральных параметра, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ и

$$\Gamma_j = \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{(p_j q_k - p_k q_j)^2}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

2. АКНС-ПОТОК СО СВЯЗЬЮ

Рассмотрим бесследовую матрицу 2×2

$$L = L(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \begin{pmatrix} p_j q_j & -q_j^2 \\ p_j^2 & -p_j q_j \end{pmatrix}, \quad (1)$$

которая называется матрицей Лакса. Имеем

$$\frac{1}{2} \lambda^2 \text{Tr } L^2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda \langle p, q \rangle + \langle p, q \rangle^2 + 2H + \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j^2 E_j}{\lambda - \lambda_j}, \quad (2)$$

где

$$H = \langle \Lambda p, q \rangle - \frac{1}{2} \langle q, q \rangle \langle p, p \rangle, \\ E_j = 2p_j q_j - \Gamma_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Конечномерная гамильтонова система, порожденная функцией Гамильтона H , имеет вид

$$(H): \begin{cases} q_x = \frac{\partial H}{\partial p} = -\langle q, q \rangle p + \Lambda q, \\ p_x = -\frac{\partial H}{\partial q} = \langle p, p \rangle q - \Lambda p. \end{cases} \quad (3)$$

Легко видеть, что система (H) является хорошо известной спектральной задачей Захарова–Шабата (ЗШ) – АКНС [6]

$$y_x = \begin{pmatrix} \lambda & u \\ v & -\lambda \end{pmatrix} y \quad (4)$$

со связями

$$u = -\langle q, q \rangle, \quad v = \langle p, p \rangle,$$

$\lambda = \lambda_j$ и $y = (q_j, p_j)^T$. Поэтому мы называем гамильтонову систему (H) вида (3) *АКНС-поток с условием* (уАКНС); она совпадает с нелинеаризованной АКНС-системой при использовании метода делинеаризации, основанного на парах Лакса [7].

3. r -МАТРИЦА И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Пусть $L_1(\lambda) = L(\lambda) \otimes I$ и $L_2(\mu) = I \otimes L(\mu)$. Тогда выполнена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Матрица Лакса $L(\lambda)$, определенная уравнением (1), удовлетворяет фундаментальным соотношениям со скобками Пуассона*

$$\{L(\lambda) \otimes L(\mu)\} = [r_{12}(\lambda, \mu), L_1(\lambda)] - [r_{21}(\mu, \lambda), L_2(\mu)], \quad (5)$$

где $r_{12}(\lambda, \mu)$ и $r_{21}(\mu, \lambda)$ – стандартные r -матрицы

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{2}{\mu - \lambda} P, \quad r_{21}(\mu, \lambda) = P r_{12}(\mu, \lambda) P, \quad (6)$$

причем

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фундаментальная скобка Пуассона $\{L(\lambda) \otimes L(\mu)\}$ есть (4×4) -матрица [8] с элементами

$$\{L(\lambda) \otimes L(\mu)\}_{kl, mn} = \{L(\lambda)_{km}, L(\mu)_{ln}\}.$$

Прямое вычисление приводит к (5). Матрицы (6) являются r -матрицами, поскольку они удовлетворяют уравнению Янга–Бакстера

$$[r_{ij}, r_{ik}] + [r_{ij}, r_{jk}] + [r_{kj}, r_{ik}] = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В действительности, поскольку r -матричное соотношение (5) включает только коммутатор, r -матрицу $r_{12}(\lambda, \mu)$ можно также выбрать в виде

$$r_{12}(\lambda, \mu) = \frac{2}{\mu - \lambda} P + I \otimes \tilde{S}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где элементы a, b, c и d могут быть произвольными функциями $a(\lambda, \mu, p, q), b(\lambda, \mu, p, q), c(\lambda, \mu, p, q)$ и $d(\lambda, \mu, p, q)$, принадлежащими пространству $C^\infty(R)$ и зависящими от спектральных параметров λ и μ и динамических переменных p и q . Таким образом, при данной матрице Лакса связанная с ней r -матрица определяется не единственным образом. Мы берем простейший случай: $a = b = c = d = 0$, т.е. уАКНС-поток имеет стандартную r -матрицу (6), которая, очевидно, нединамическая.

Немедленным следствием уравнения (5) является соотношение

$$\{L^2(\lambda) \otimes L^2(\mu)\} = [\bar{r}_{12}(\lambda, \mu), L_1(\lambda)] - [\bar{r}_{21}(\mu, \lambda), L_2(\mu)], \quad (7)$$

где

$$\bar{r}_{ij}(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 L_1^{1-k}(\lambda) L_2^{1-l}(\mu) \cdot r_{ij}(\lambda, \mu) \cdot L_1^k(\lambda) L_2^l(\mu), \quad ij = 12, 21.$$

Таким образом, уравнение (7) приводит к равенствам

$$4\{\mathrm{Tr} L^2(\lambda), \mathrm{Tr} L^2(\mu)\} = \mathrm{Tr}\{L^2(\lambda) \otimes L^2(\mu)\} = \mathrm{Tr}\{L_1^2(\lambda) \otimes L_2^2(\mu)\} = 0,$$

гарантирующим инволютивность полученных в (2) интегралов движения. Как следствие имеем

$$\{E_i, E_j\} = \{H, E_j\} = \{F_s, E_j\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$F_s = \sum_{j=1}^N \lambda_j^s E_j = 2\langle \Lambda^s p, q \rangle - \sum_{j+k=s-1} (\langle \Lambda^j p, p \rangle \langle \Lambda^k q, q \rangle - \langle \Lambda^j p, q \rangle \langle \Lambda^k q, p \rangle). \quad (8)$$

Кроме того, $E_1, E_2, \dots, E_N$ функционально независимы на некоторой области в R^{2N} ; отсюда получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Определенный в (3) уАКНС-поток полностью интегрируем в смысле Лиувилля.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интегрируемость уАКНС-потока доказана здесь в рамках r -матрицы и матрицы Лакса, а не пары Лакса.

4. ИЕРАРХИЯ АКНС И ЕЕ ИНВОЛЮТИВНОЕ РЕШЕНИЕ

В данном разделе рассматривается АКНС-иерархия НЭУ. Мы связываем спектральную задачу ЗШ [6] и АКНС-иерархию [2] с конечномерными гамильтоновыми системами (H) и (F_s) , $s = 0, 1, \dots$. Начнем со спектральной задачи ЗШ (4), где λ – собственное значение, $y = (y_1, y_2)^T$ – соответствующая векторная собственная функция, а u и v – два потенциала, которые или затухают на бесконечности, или имеют периодические граничные условия. Тогда АКНС-иерархия связанных с задачей (4) НЭУ выводится следующим образом:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_s} = JG_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где $\{G_s = J^{-1}KG_{s-1}\}_{s=0}^\infty$ – последовательность Ленарда при $G_{-1} = (0, 0)^T$ и $G_0 = (v, u)^T$, а два симметричных оператора K и J имеют вид

$$K = \begin{pmatrix} 2u\partial^{-1}u & \partial - 2u\partial^{-1}v \\ \partial - 2v\partial^{-1}u & -2v\partial^{-1}v \end{pmatrix}, \quad J = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

($\partial = \partial/\partial x$ и $\partial\partial^{-1} = \partial^{-1}\partial = 1$). Показательным представителем иерархии (9) является уравнение при $s = 2$:

$$u_t = -\frac{1}{2}u_{xx} + u^2v, \quad v_t = \frac{1}{2}v_{xx} - v^2u, \quad t = t_2. \quad (11)$$

Рассмотрим функции Гамильтона F_s , определенные в (8). Из скобки Пуассона $\{F_s, H\} = 0$, $s = 0, 1, \dots$, следует, что все канонические гамильтоновы системы (F_s) и (H) полностью интегрируемы по Лиувиллю. Поэтому их гамильтоновы потоки коммутируют между собой.

Пусть $(p(x, t_s), q(x, t_s))^T$ – решение согласованных канонических гамильтоновых уравнений (H) и (F_s) , называемое *инволютивным решением* [9]. Тогда имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Функции*

$$u = -\langle q(x, t_s), q(x, t_s) \rangle, \quad v = \langle p(x, t_s), p(x, t_s) \rangle, \quad s = 0, 1, \dots,$$

удовлетворяют АКНС-уравнениям высших порядков (9). В частности, уравнению (11) удовлетворяет решение

$$u = -\langle q(x, t_2), q(x, t_2) \rangle, \quad v = \langle p(x, t_2), p(x, t_2) \rangle, \quad (12)$$

где $(p(x, t_2), q(x, t_2))^T$ – инволютивное решение согласованных гамильтоновых систем (H) и (F_2) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание (3), равенства $q_{t_s} = \partial F_s / \partial p$ и $p_{t_s} = -\partial F_s / \partial q$, а также основное равенство

$$K \begin{pmatrix} \langle p(x, t_s), p(x, t_s) \rangle \\ -\langle q(x, t_s), q(x, t_s) \rangle \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \langle \Lambda p(x, t_s), p(x, t_s) \rangle \\ -\langle \Lambda q(x, t_s), q(x, t_s) \rangle \end{pmatrix},$$

где операторы K и J определены в (10), можно проверить, что АКНС-уравнения высших порядков (9) выполнены для

$$u = -\langle q(x, t_s), q(x, t_s) \rangle, \quad v = \langle p(x, t_s), p(x, t_s) \rangle, \quad s = 0, 1, \dots$$

5. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В следующей процедуре мы получим явное выражение для решения (12), т.е. выведем алгебро-геометрическое решение АКНС-уравнения (11). Для этого перепишем матрицу Лакса (1) в виде

$$L = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & -A(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$A(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_j} p_j q_j, \quad B(\lambda) = - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_j} q_j^2, \quad C(\lambda) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda - \lambda_j} p_j^2.$$

Можно подставить $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ в виде отношений

$$B(\lambda) \equiv - \frac{\langle q, q \rangle Q_B(\lambda)}{K(\lambda)}, \quad C(\lambda) \equiv \frac{\langle p, p \rangle Q_C(\lambda)}{K(\lambda)},$$

где

$$\begin{aligned} \langle q, q \rangle Q_B(\lambda) &= \sum_{j=1}^N q_j^2 \prod_{k=1, k \neq j}^N (\lambda - \lambda_k), \\ \langle p, p \rangle Q_C(\lambda) &= \sum_{j=1}^N p_j^2 \prod_{k=1, k \neq j}^N (\lambda - \lambda_k), \quad K(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j). \end{aligned}$$

Соответствующим образом выбирая $N-1$ различных вещественных нулей $\mu_1^B, \dots, \mu_{N-1}^B$ и $\mu_1^C, \dots, \mu_{N-1}^C$ величин $Q_B(\lambda)$ и $Q_C(\lambda)$, получаем

$$Q_B(\lambda) = \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j^B), \quad Q_C(\lambda) = \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j^C),$$

$$\frac{\langle \Lambda q, q \rangle}{\langle q, q \rangle} = A_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^B, \quad (13)$$

$$\frac{\langle \Lambda p, p \rangle}{\langle p, p \rangle} = A_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^C, \quad (14)$$

$$\frac{\langle \Lambda^2 q, q \rangle}{\langle q, q \rangle} = A_1 \frac{\langle \Lambda q, q \rangle}{\langle q, q \rangle} - A_2 + \sum_{k,j=1, j < k}^{N-1} \mu_j^B \mu_k^B, \quad (15)$$

$$\frac{\langle \Lambda^2 p, p \rangle}{\langle p, p \rangle} = A_1 \frac{\langle \Lambda p, p \rangle}{\langle p, p \rangle} - A_2 + \sum_{k,j=1, j < k}^{N-1} \mu_j^C \mu_k^C, \quad (16)$$

где

$$A_1 = \sum_{j=1}^N \lambda_j, \quad A_2 = \sum_{k,j=1, j < k}^N \lambda_j \lambda_k.$$

Очевидно, уравнения (13)–(16) эквивалентны уравнениям

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^B = A_1 - \frac{\langle \Lambda q, q \rangle}{\langle q, q \rangle},$$

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^C = A_1 - \frac{\langle \Lambda p, p \rangle}{\langle p, p \rangle}, \quad (17)$$

$$\left(A_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^B \right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_k^B)^2 = 2A_2 - A_1^2 + 2 \frac{\langle \Lambda^2 q, q \rangle}{\langle q, q \rangle},$$

$$\left(A_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^C \right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_k^C)^2 = 2A_2 - A_1^2 + 2 \frac{\langle \Lambda^2 p, p \rangle}{\langle p, p \rangle}.$$

С одной стороны, $u_x = -2\langle q, q_x \rangle = -2\langle q, \partial H / \partial p \rangle = -2\langle \Lambda q, q \rangle - 2uc_0(t)$, где функция $c_0(t)$ зависит только от t . Из уравнения (13), таким образом, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln u = 2A_1 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^B - 2c_0(t).$$

С другой стороны, $u_{t_2} = -2\langle q, q_{t_2} \rangle = -2\langle q, \partial F_2 / \partial p \rangle = -2\langle \Lambda^2 q, q \rangle$. С учетом (17) это дает равенство

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \ln u = \left(A_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^B \right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_k^B)^2 - 2A_2 + A_1^2.$$

Отсюда имеем

$$u(x, t) = u(x_0, t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \left[\left(A_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^B \right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_k^B)^2 - 2A_2 + A_1^2 \right] dt + \right. \\ \left. + \int_{x_0}^x \left[2A_1 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^B - 2c_0(t) \right] dx \right), \quad t = t_2, \quad (18)$$

где x_0 и t_0 – два фиксированных начальных значения. Аналогичным образом $v(x, t)$ имеет представление

$$v(x, t) = v(x_0, t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t \left[\left(A_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^C \right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1} (\mu_k^C)^2 - 2A_2 + A_1^2 \right] dt - \right. \\ \left. - \int_{x_0}^x \left[2A_1 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k^C - 2c_0(t) \right] dx \right), \quad t = t_2. \quad (19)$$

Поскольку уравнения (18) и (19) задают решение нелинейного солитонного уравнения (11), то для получения их явного вида нам нужно вычислить только четыре ключевых выражения $\sum_{k=1}^{N-1} (\mu_k^J)^k$, $J = B, C$, $k = 1, 2$. Будем следовать подходу для случая решетчатого уравнения Тоды [10], [11]. Для двух наборов координат Дарбу μ_j^J , $J = B, C$, $j = 1, \dots, N-1$, имеем ключевые равенства

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\mu_j^J)^k = C_k(\Gamma) - \sum_{s=1}^2 \operatorname{Res}_{\lambda=\infty_s} \lambda^k d \ln \Theta(A(P) - \phi - K_J), \quad J = B, C, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

где $C_k(\Gamma)$ – константа [10], [12], определяемая только компактной римановой поверхностью Γ рода $N-1$, $\mu^2 = P(\lambda)K(\lambda)$,

$$P(\lambda) = K(\lambda) + \sum_{j=1}^N E_j \prod_{k=1, k \neq j}^N (\lambda - \lambda_k), \\ \infty_1 = (0, \sqrt{P(z^{-1})K(z^{-1})}|_{z=0}), \\ \infty_2 = (0, -\sqrt{P(z^{-1})K(z^{-1})}|_{z=0}),$$

$A(P) = \int_{P_0}^P \omega$ является отображением Абеля, в котором P_0 – произвольная фиксированная точка на Γ , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{N-1})^T$,

$$\omega_j = \sum_{l=1}^{N-1} r_{j,l} \tilde{\omega}_l = \sum_{l=1}^{N-1} r_{j,l} \frac{\prod_{k=1, k \neq l}^N (\lambda - \lambda_k)}{2\sqrt{K(\lambda)P(\lambda)}} d\lambda$$

есть нормированная голоморфная дифференциальная форма, а $r_{j,l}$ – нормировочный множитель. Далее, j -я компонента $\phi_j(x, t)$ $(N-1)$ -мерного вектора ϕ равна

$$\sum_{l=1}^{N-1} r_{j,l} \left(Q_l^0 + \frac{\lambda_l x}{2} + \frac{\lambda_l^2 t}{2} + C_l(t) + \tilde{C}_l(x) \right)$$

при произвольной постоянной Q_l^0 и произвольных функциях $C_l(t), \tilde{C}_l(x) \in C^\infty(R)$. Векторы K_B и K_C из $\mathbb{C}^{N-1}$ являются двумя векторами римановых констант, связанных с соответствующими координатами Дарбу μ_j^B и μ_j^C . Риманова тета-функция $\Theta(\xi)$ [13] определена на римановой поверхности Γ .

Вычисляя вычет в точках ∞_s , $s = 1, 2$, при $k = 1, 2$ находим

$$\sum_{j=1}^{N-1} \mu_j^J = C_1(\Gamma) - \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\Theta_1^J}{\Theta_2^J},$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\mu_j^J)^2 = C_2(\Gamma) + \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\Theta_1^J}{\Theta_2^J} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Theta_1^J \Theta_2^J,$$

где

$$\Theta_s^J = \Theta(\phi + K_J + \eta_s), \quad J = B, C,$$

и

$$\eta_{s,j} = \int_{\infty_s}^{P_0} \omega_j, \quad s = 1, 2,$$

есть j -я компонента $(N-1)$ -мерного вектора η_s .

Подставляя приведенные выше равенства в (18) и (19) и сортируя их, получаем явные решения солитонного уравнения (11):

$$u(x, t) = u(x_0, t_0) e^{a(t-t_0)+2(b-c_0)(x-x_0)} \frac{\Theta_1^B}{\Theta_2^B} \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\Theta_2^B}{\Theta_1^B} \right)^2 \Big|_{x=x_0} \times$$

$$\times \frac{\Theta_1^B}{\Theta_2^B} \exp \left(\int_{t_0}^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Theta_1^B \Theta_2^B + \left(b + \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\Theta_1^B}{\Theta_2^B} \right)^2 \right] dt \right), \quad (20)$$

$$v(x, t) = v(x_0, t_0) e^{-a(t-t_0)-2(b-c_0)(x-x_0)} \frac{\Theta_2^C}{\Theta_1^C} \Big|_{t=t_0} \left(\frac{\Theta_1^C}{\Theta_2^C} \right)^2 \Big|_{x=x_0} \times$$

$$\times \frac{\Theta_2^C}{\Theta_1^C} \exp \left(\int_{t_0}^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Theta_2^C \Theta_1^C + \left(b + \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\Theta_2^C}{\Theta_1^C} \right)^2 \right] dt \right), \quad (21)$$

где $a = A_1^2 - C_2(\Gamma) - 2A_2$ и $b = A_1 - C_1(\Gamma)$ — две постоянные, $c_0 = c_0(t) \in C^\infty(R)$ является заданной функцией t , а x_0 и t_0 — начальные значения. В результате приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. *Уравнения АКНС (11) имеют пару явных решений (20) и (21), заданных видом римановой тета-функции и называемых алгебро-геометрическим решением.*

Аналогичный процесс вычисления может привести также к алгебро-геометрическому решению АКНС-уравнений высших порядков (9), но мы не рассматриваем здесь этот более сложный случай.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мотивация данных исследований исходит из наших работ по конечномерным интегрируемым системам, описанным в [10]. Действительно, на примере уравнений АKNС мы показали, что процедура алгебро-геометрического решения успешно распространяется с конечномерных интегрируемых систем на интегрируемые НЭУ, или солитонные уравнения. Эту процедуру можно применить и к другим НЭУ. Жу [12] привел алгебро-геометрическое решение уравнения Жюльяна–Миодека. Вслед за тем Жанг [14] и Ду [15] также получили алгебро-геометрические решения некоторых солитонных уравнений, используя этот метод. Разумеется, существуют и другие методы решения солитонных уравнений. Недавно Дайфт, Итс и Жу [16] с использованием асимптотического метода Римана–Гильберта получили Θ -функциональные решения некоторых НЭУ, таких как КдФ, мКдФ и нелинейное уравнение Шредингера. Все эти методы до сих пор находятся в состоянии развития.

Благодарности. Автор искренне благодарит Fachbereich 17 в Университете-ГН Kassel и в особенности профессора Страмппа и профессора Фарнхорна за их любезное приглашение и гостеприимство.

Работа была поддержана со стороны Research Program Лос-Аламосской Национальной Лаборатории (США), немецкого фонда Александра Гумбольдта, китайского национального фундаментального исследовательского проекта “Нелинейная наука”, Специального гранта за выдающуюся китайскую Ph.D. диссертацию и Doctoral Program Foundation Министерства образования Китая.

Список литературы

- [1] *M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur.* Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 125.
- [2] *M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur.* Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249.
- [3] *М. Абловитц, Х. Сигур.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987.
- [4] *P. D. Lax.* Commun. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. P. 141.
- [5] *Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков.* ДАН СССР. 1976. Т. 229. С. 15.
- [6] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1972. Т. 61. № 1. С. 118.
- [7] *C. W. Cao.* Sci. China A (Chinese Edition). 1989. V. 32. P. 701; Sci. Sin. A (English Edition). 1990. V. 33. P. 528.
- [8] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [9] *C. W. Cao.* Acta Math. Sin. New Series. 1991. V. 7. P. 216.
- [10] *Z. J. Qiao.* Generalized Lax algebra, r -matrix, and algebraic-geometric solution for the integrable system. Doctoral dissertation. Fudan University, China, 1997.
- [11] *Z. J. Qiao.* Chin. Sci. Bull. 1999. V. 44. P. 114.
- [12] *R. G. Zhou.* The finite-dimensional integrable systems related to the soliton equations. Doctoral dissertation. Fudan University, China, 1997.
- [13] *Д. Мамфорд.* Лекции о θ -функциях. М.: Мир, 1984.
- [14] *J. S. Zhang.* The generating functional method for finite-dimensional integrable systems. Doctoral dissertation. Zhengzhou University, China, 1998.
- [15] *D. L. Du.* Integrability of the nonlinearized eigenvalue problems under the Lie–Poisson structure. Doctoral dissertation. Zhengzhou University, China, 1998.
- [16] *P. A. Deift, A. R. Its, X. Zhou.* Ann. Math. 1997. V. 146. P. 149.