Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Абадоглу, М. Бруски, Ф. Калоджеро, Алфавит динамики магнитных монополей, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 1, 4–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:17:20

© 2001 г. Е. Абадоглу*, М. Бруски†, Ф. Калоджеро†

АЗБУКА ДИНАМИКИ МАГНИТНЫХ МОНОПОЛЕЙ

Приводится явное решение ньютоновских уравнений движения (сила равна массе, умноженной на ускорение) для точечного массивного магнитного монополя, движущегося в кулоновском поле неподвижного точечного электрического заряда, или, что эквивалентно, уравнений движения точечной массивной заряженной частицы, движущейся в магнитном поле неподвижного магнитного монополя.

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение точечного магнитного монополя в кулоновском поле неподвижного точечного электрического заряда описывается уравнениями движения Ньютона–Лоренца

$$\ddot{\vec{r}} = k r^{-3} \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}, \quad (1.1)$$

где $\vec{r} \equiv \vec{r}(t)$ – трехмерный вектор, описывающий положение движущейся частицы в момент времени t , точки над величинами обозначают дифференцирование по времени, символ $\wedge$ означает стандартное векторное произведение в трехмерном пространстве, а $r^{-3}\vec{r}$ – кулоновское поле неподвижного “единичного” электрического заряда, расположенного в начале координат. Тем самым правая часть уравнения (1.1) представляет собой силу Лоренца, действующую на движущийся монополю. Константа k , включающая в себя величины электрического и магнитного зарядов и массы движущейся частицы, имеет размерность (длина)²(время)⁻¹ и может быть положена единицей при подходящем выборе системы отсчета (см. ниже). Точно такое же уравнение описывает движение точечной электрически заряженной частицы в магнитном поле неподвижного точечного монополя: поскольку до сих пор для монополей не нашлось места в списке реально обнаруженных элементарных частиц, эта вторая постановка задачи представляется несколько более реалистичной, ибо она, по крайней мере, описывает движение заряженной частицы в окрестности одного из двух полюсов магнита (вдали от второго полюса). Именно такая экспериментальная постановка задачи показалась интересной Пуанкаре, и он предложил полное и красивое решение этой задачи более ста лет

*Feza Gursey Institute, Kandilli, Istanbul, Turkey. E-mail: abadoglu@hotmail.com

†Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza,” Roma, Italy; Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma. E-mail: bruschi@roma1.infn.it, francesco.calogero@roma1.infn.it

назад [1]. К сожалению, это решение не так широко известно, как оно того заслуживает будучи единственным известным примером настоящего трехмерного движения (т.е. не в одной плоскости), которое может быть описано в терминах *элементарных* функций; напомним, что ньютоновское движение в поле центральных сил всегда происходит в плоскости. Однако поскольку сила Лоренца поперечна направлению движения, плоское движение не характерно для решений уравнения (1.1) (см. ниже). Более того, среди всех задач о ньютоновском движении (точечного массивного) монополя в центральном электрическом поле только случай кулоновского потенциала (см. (1.1)) допускает явное решение через элементарные функции. Ниже будет показано, что это свойство связано с замечательным фактом существования нетривиального неавтономного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка, все решения которого выражаются в терминах элементарных функций [2], [3].

Проблема, которая вновь поднимается и исследуется в данной работе, уже несколько раз исследовалась в литературе (хотя указание на ее связь с явно решаемым ОДУ третьего порядка представляется новым); направления исследований в основном связывались с различными обобщениями данной задачи на случай, когда движущаяся частица и/или неподвижный источник поля несут как электрический, так и магнитный заряды (и тогда могут возникать дополнительные силы – см., например, недавнюю работу Сивардьере [4] и приведенную там литературу, а также работу Швингера и др. [5] и статью Гольдхабера и Трувера [6]). В настоящей работе ограничимся простейшим случаем, при котором движущаяся частица имеет магнитный заряд, а неподвижный источник силы генерирует электрическое поле (или наоборот), но сначала в разделе 2 исследуем случай центрального (не обязательно кулоновского) поля, а кулоновский случай будет рассмотрен отдельно в разделе 3.

2. ДВИЖЕНИЕ МАГНИТНОГО МОНОПОЛЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Движение магнитного монополя в центральном электрическом поле описывается уравнением Ньютона–Лоренца

$$\ddot{\vec{r}} = g(r)\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}, \quad (2.1)$$

которое превращается в уравнение (1.1) в кулоновском случае, когда $g(r) = kr^{-3}$. Очевидно, это уравнение имеет решение

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0)[1 + \alpha t]$$

(α – произвольная константа), описывающее частицу, движущуюся в точности по радиусу и потому движущуюся свободно, так как сила Лоренца не действует в этом случае. В дальнейшем этот случай тривиального движения исключается из рассмотрения.

Из уравнения (2.1) немедленно следует закон сохранения

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = 0,$$

откуда получаем, что квадрат скорости $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = |\dot{\vec{r}}|^2$ является интегралом движения

$$|\dot{\vec{r}}| = v. \quad (2.2)$$

Очевидный физический смысл этого закона сохранения состоит в том, что сила Лоренца действует в направлении, поперечном направлению движения.

Кроме того, из уравнения (2.1) получим

$$\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} = 0,$$

и потому

$$\frac{d^2[r^2(t)]}{dt^2} = \frac{2d[\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)]}{dt} = 2[\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)] = 2|\dot{\vec{r}}(t)|^2$$

(см. (2.2)). Таким образом, после интегрирования получим формулу

$$\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = b + v^2 t. \quad (2.3)$$

Поскольку нетрудно заметить, что

$$\frac{d[r^2(t)]}{dt} = 2\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t),$$

то используя (2.3) и повторно проинтегрировав, получим

$$r^2(t) = a^2 + 2bt + v^2 t^2, \quad (2.4)$$

где

$$a = r(0), \quad (2.5)$$

$$b = r(0)\dot{r}(0) = \vec{r}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0). \quad (2.6)$$

Качественный характер движения очевидно следует из (2.4): движущаяся частица приходит из бесконечности, достигает *минимального* расстояния от начала координат и затем уходит снова в бесконечность; вдали от источника частица движется почти по радиусу и соответственно свободно, поскольку сила Лоренца становится при этом мала из-за квазипараллельности $\vec{r}(t)$ и $\dot{\vec{r}}(t)$. Заметим, что это наблюдение не зависит от формы потенциала (центрального) электрического поля, которое даже может расти на бесконечности.

За начало отсчета по времени ($t = 0$) удобно взять момент времени $t_c = -b/v^2$ (см. (2.4)), когда движущаяся частица находится на минимальном расстоянии от центра координат. При этом

$$b = 0, \quad (2.7)$$

а уравнение (2.4) принимает вид

$$r(t) = (a + v^2 t^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

В этом уравнении константа a имеет физический смысл “минимального расстояния”. Таким образом, обе константы в выражении (2.8) для временной зависимости расстояния движущейся частицы от источника поля имеют явный физический смысл.

Из формул (2.2), (2.3) и (2.4) следует, что

$$(\vec{r} \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2 = a^2 v^2 - b^2$$

(независимо от (2.7)!). Величина в левой части этого уравнения является вторым интегралом движения (в дополнение к (2.2)). Физический смысл этого интеграла – это квадрат модуля углового момента движущейся частицы,

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}, \quad (2.9)$$

поскольку из этого определения следует, что

$$L^2 = (\vec{r} \cdot \vec{r})(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})^2.$$

При условии (2.7) получим

$$L^2 = a^2 v^2, \quad (2.10)$$

и это равенство также допускает очевидную физическую интерпретацию. В момент времени, когда движущаяся частица достигает точки, максимально приближенной к началу координат (момент времени $t = 0$), ее вектор скорости *ортогонален* ее радиус-вектору (см. (2.6) и (2.7)), и тем самым модуль углового момента (второй интеграл движения) равен простому произведению наименьшего расстояния a и скорости v (также являющейся постоянной величиной).

Независимость L^2 от времени может быть доказана непосредственно. Для этого продифференцируем уравнение (2.9) по времени и получим

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}}, \quad (2.11)$$

а потому с помощью уравнения (2.1) получим, что

$$\dot{\vec{L}} = g(r) [\vec{r}(\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}}) - \ddot{\vec{r}} r^2],$$

где использовано известное тождество для трех векторов (в трехмерном пространстве)

$$\vec{r}_1 \wedge (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3) = (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3) \vec{r}_2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) \vec{r}_3. \quad (2.12)$$

Тогда из соотношения (2.9) (которое отражает тот факт, что вектор $\vec{L}$ ортогонален как $\vec{r}$, так и $\dot{\vec{r}}$) следует формула

$$\vec{L} \cdot \dot{\vec{L}} = 0,$$

которая явно показывает, что производная по времени от $L^2(t)$ равна нулю и, следовательно, L^2 является интегралом движения.

До сих пор исследовались лишь несколько простых свойств движения, задаваемого уравнением (2.1), которое однако не столь уж и просто ввиду своей явной трехмерности, обусловленной поперечностью силы Лоренца. Тем не менее имеет место еще одно замечательное упрощение, которое возникает, если продифференцировать уравнение (2.1) по времени. После этого получим

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{g'(r)}{g(r)} \dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} + g(r) \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}},$$

и из уравнения (2.1) и тождества (2.12) следует, что

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{g'(r)}{g(r)} \dot{r} \ddot{\vec{r}} + [g(r)]^2 [\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{r} r^2], \quad (2.13)$$

откуда, подставив (2.8) с учетом (2.3) и (2.7), имеем

$$\ddot{\vec{r}} = f(t) \ddot{\vec{r}} + h(t) [\vec{r} v^2 t - \dot{r} r^2], \quad (2.14)$$

где

$$f(t) = \frac{v^2 t (a^2 + v^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} g'[(a^2 + v^2 t^2)^{\frac{1}{2}}]}{g[(a^2 + v^2 t^2)^{\frac{1}{2}}]}, \quad (2.15)$$

$$h(t) = g^2[(a^2 + v^2 t^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Из уравнения (2.14) следует, что каждая из трех компонент радиус-вектора $\vec{r}(t)$ или, что эквивалентно, каждая величина (например, $\chi(t)$), пропорциональная какой-либо компоненте вектора $\vec{r}(t)$, удовлетворяет *линейному* неавтономному ОДУ третьего порядка, которое может быть представлено в удобном виде как

$$\chi'''(\tau) + \alpha(\tau) \chi''(\tau) + \beta(\tau) [(1 + \tau^2) \chi'(\tau) - \tau \chi(\tau)] = 0, \quad (2.16)$$

где введены обозначения

$$\tau = t \frac{v}{a}, \quad (2.17)$$

$$\alpha(\tau) = -\frac{a}{v} f(t), \quad \beta(\tau) = \frac{a^4}{v^2} h(t). \quad (2.18)$$

Здесь и ниже штрихи обозначают дифференцирование по переменной τ .

В частности, если $g(r)$ (см. (2.1)) имеет степенную зависимость,

$$g(r) = k r^p, \quad (2.19)$$

то (см. (2.15) и (2.18))

$$\alpha(\tau) = -p \frac{\tau}{1 + \tau^2}, \quad \beta(\tau) = \lambda (1 + \tau^2)^p,$$

где

$$\lambda = k \frac{a^{p+2}}{v}. \quad (2.20)$$

Заметим, что масштабированные время τ (см. (2.17)) и константа связи λ становятся безразмерными.

Теперь можно фиксировать произвол в трех независимых решениях $\chi_0(\tau)$, $\chi_1(\tau)$ и $\chi_2(\tau)$ ОДУ третьего порядка (2.16) с помощью задания начальных условий

$$\begin{aligned} \chi_0(0) &= 1, & \chi_0'(0) &= 0, & \chi_0''(0) &= 0, \\ \chi_1(0) &= 0, & \chi_1'(0) &= 1, & \chi_1''(0) &= 0, \\ \chi_2(0) &= 0, & \chi_2'(0) &= 0, & \chi_2''(0) &= 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Если известны три указанных решения, то решение задачи (2.1) с заданными начальными данными дается явной формулой

$$\vec{r}(t) = \chi_0(\tau)\vec{r}(0) + \frac{a}{v}\chi_1(\tau)\dot{\vec{r}}(0) + \left(\frac{a}{v}\right)^2 \chi_2(\tau)g[r(0)]\vec{r}(0) \wedge \dot{\vec{r}}(0), \quad (2.22)$$

что легко проверить с использованием формул (2.1), (2.17) и (2.21).

В разделе 3 будет показано, что в специальном случае $p = -3$, который отвечает виду (2.19) и (2.1) “физическому” случаю реального кулоновского потенциала (см. (1.1)), линейное ОДУ третьего порядка (2.16) может быть явно решено в терминах элементарных функций. Но прежде отметим еще один замечательный факт, имеющий место для произвольной функции $g(r)$ (см. (2.1)). Рассмотрим скалярную величину

$$\Delta(t) = [\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \ddot{\vec{r}}(t), \quad (2.23)$$

которая имеет ясный геометрический смысл: с точностью до множителя $1/6$ и, возможно, знака эта величина есть объем тетраэдра, ребрами которого являются векторы $\vec{r}(t)$, $\dot{\vec{r}}(t)$ и $\ddot{\vec{r}}(t)$. Из определения (2.23) явно следует

$$\dot{\Delta}(t) = [\vec{r}(t) \wedge \dot{\vec{r}}(t)] \cdot \dddot{\vec{r}}(t),$$

а потому из (2.13) и (2.23) получим

$$\dot{\Delta}(t) = \frac{g'[r(t)]}{g[r(t)]}\dot{r}(t)\Delta(t).$$

Поделив это выражение на $\Delta(t)$ с последующим интегрированием, получим следующую формулу:

$$\Delta(t) = cg[r(t)], \quad (2.24)$$

где константа задается выражением

$$c = \frac{\Delta(0)}{g[r(0)]}.$$

С другой стороны, из определения (2.23) для величины $\Delta(t)$ и формул (2.1) и (2.9) следует, что

$$\Delta(t) = g[r(t)]|\vec{L}(t)|^2.$$

Сравнивая эту формулу с (2.24), можно опять заключить, что абсолютная величина углового момента $\vec{L}$ (см. (2.9)) есть интеграл движения,

$$|\vec{L}(t)|^2 = |\vec{L}(0)|^2 = (av)^2.$$

3. РЕШЕНИЕ В КУЛОНОВСКОМ СЛУЧАЕ

Исследуем движение точечного (массивного) монополя в кулоновском электрическом поле неподвижного электрического заряда (расположенного в начале координат) или, что эквивалентно, движение точечной (массивной) электрически заряженной

частицы в магнитном поле неподвижного магнитного монополя. Уравнение Ньютона–Лоренца указанной системы имеет вид (1.1), где k – это константа (пропорциональная электрическому и магнитному зарядам и обратно пропорциональная массе движущейся частицы), имеющая размерность (длина)² (время)^{−1}.

Как показано в разделе 2, уравнения (2.1) и, следовательно, (1.1) приводят к двум законам сохранения

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = |\dot{\vec{r}}(0)| = v, \quad (3.1)$$

$$r^2(t) = a^2 + 2bt + v^2 t^2, \quad (3.2)$$

где константы v , a^2 и b определяются формулами (3.1), (2.5) и (2.6). Как и в разделе 2, будем предполагать (с существенным упрощением обозначений и без потери общности), что в момент времени $t = 0$ частица находится на минимальном расстоянии от центра сил; в этот же момент времени вектор скорости ортогонален радиус-вектору. Тем самым $b = 0$ (см. (2.7)), и вместо (3.2) получим

$$r^2(t) = a^2 + v^2 t^2. \quad (3.3)$$

Преимущество этого представления состоит в том, что обе константы в нем имеют ясный физический смысл: v – это постоянная величина модуля скорости движущейся вдоль своей траектории частицы, а a – минимальное расстояние от этой траектории до начала координат. (Как и в разделе 2, тривиальное радиальное свободное движение исключается, т.е. по предположению $a > 0$. Также исключен тривиальный случай неподвижной частицы, т.е. предполагается, что $v > 0$.)

Развивая эти (вполне общие) предположения, удобно выбрать расстояние a в качестве масштаба расстояния, а величину (см. (2.17))

$$T = \frac{a}{v}, \quad (3.4)$$

имеющую размерность времени, положить единицей его измерения. Таким образом, можно ввести безразмерные величины τ , $\vec{\rho}$ и λ :

$$t = T\tau, \quad \vec{r}(t) = a\vec{\rho}(\tau), \quad k = \frac{a^2}{T}\lambda = av\lambda \quad (3.5)$$

(см. (2.17) и (2.20)). Эти величины выбраны таким образом, чтобы совместно анализировать семейства траекторий частиц, имеющих одинаковые скорость v и минимальное расстояние a до начала координат. В дальнейшем точки над величинами будут обозначать дифференцирование по безразмерному времени τ . Уравнения движения (1.1) теперь примут вид

$$\ddot{\vec{\rho}} = \lambda \rho^{-3} \vec{\rho} \wedge \dot{\vec{\rho}}, \quad (3.6)$$

в то время как (см. (3.1) и (3.4))

$$|\dot{\vec{\rho}}(\tau)| = 1 \quad (3.7)$$

и (см. (3.3))

$$\rho^2(\tau) = 1 + \tau^2. \quad (3.8)$$

Удобно также ввести “безразмерный угловой момент” $\vec{\Lambda}$ движущейся частицы:

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{L}}{av} = \vec{\rho} \wedge \dot{\vec{\rho}} \quad (3.9)$$

(см. (2.11), (3.4) и (3.5)). Заметим, что согласно результатам раздела 2 абсолютная величина этого безразмерного вектора есть константа, равная единице в выбранной системе единиц,

$$\Lambda^2 = 1 \quad (3.10)$$

(см. (2.10) и (3.9)).

С другой стороны, сам угловой момент не сохраняется в отличие от случая частицы, движущейся в поле центральных сил. (Сила Лоренца в правой части (3.6), равно как и в (2.1), не является центральной.) Однако в случае кулоновских сил, рассматриваемом в этом разделе, существует сохраняющийся трехмерный вектор

$$\vec{J} = \vec{\Lambda} + \lambda \hat{\rho}, \quad (3.11a)$$

$$\dot{\vec{J}} = 0. \quad (3.11b)$$

Здесь и ниже

$$\hat{\rho} \equiv \frac{\vec{\rho}}{\rho} \quad (3.12)$$

есть единичный вектор в направлении $\vec{\rho}$. Разумеется, вектор $\vec{J}$, равно как и $\vec{\Lambda}$, λ и $\hat{\rho}$, безразмерен.

Приведем доказательство формулы (3.11b):

$$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{\Lambda}} + \lambda[\rho^{-1}\dot{\vec{\rho}} - \rho^{-2}\dot{\rho}\vec{\rho}], \quad (3.13)$$

$$\dot{\vec{\Lambda}} = \dot{\vec{\rho}} \wedge \ddot{\vec{\rho}}, \quad (3.14a)$$

$$\dot{\vec{\Lambda}} = \lambda\rho^{-3}\vec{\rho} \wedge (\vec{\rho} \wedge \dot{\vec{\rho}}), \quad (3.14b)$$

$$\dot{\vec{\Lambda}} = -\lambda\rho^{-1}\dot{\vec{\rho}} + \lambda\rho^{-3}(\vec{\rho} \cdot \dot{\vec{\rho}})\vec{\rho}, \quad (3.14в)$$

$$\dot{\vec{\Lambda}} = -\lambda[\rho^{-1}\dot{\vec{\rho}} - \rho^{-2}\dot{\rho}\vec{\rho}], \quad (3.14г)$$

где (3.14a) следует из (3.9) после дифференцирования по τ ; формулу (3.14б) можно получить из (3.14a) с помощью уравнений движения (3.6); (3.14в) получается из (3.14б) с учетом векторного тождества (2.12); (3.14г) следует из (3.14в) и соотношения $\rho\dot{\vec{\rho}} = \vec{\rho} \cdot \dot{\vec{\rho}}$ (которое, естественно, может быть получено в результате дифференцирования величины $\rho^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho}$ по времени). Тогда из формул (3.14г) и (3.13) следует искомое соотношение (3.11b).

То, что вектор $\vec{J}$ есть сохраняющаяся величина для уравнения (3.6), было показано еще Пуанкаре более ста лет назад [1]; вектор $\vec{J}$ называется вектором Пуанкаре.

Поскольку векторы $\vec{\Lambda}$ и $\hat{\rho}$ ортогональны (см. (3.9) и (3.12)), из определения (3.11a) вектора Пуанкаре следует, что

$$J^2 = \Lambda^2 + \lambda^2, \quad (3.15)$$

равно как и

$$\hat{\rho} \cdot \vec{J} = \lambda.$$

Угол θ между единичным вектором $\hat{\rho} \equiv \hat{\rho}(\tau)$ (или, что эквивалентно, трехмерным вектором $\vec{\rho} \equiv \vec{\rho}(\tau)$) и постоянным вектором $\vec{J}$ также сохраняется и дается равенством

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{J}. \quad (3.16)$$

Таким образом, движение происходит на *фиксированном круговом полукупесе* с (постоянным) половинным углом θ , заданным соотношением (3.16), с вершиной в начале координат и с осью, совпадающей с направлением (постоянного) трехмерного вектора $\vec{J}$. Тем самым, если выбрать $\rho \equiv \rho(\tau)$, θ и $\varphi \equiv \varphi(\tau)$ в качестве сферических координат движущейся частицы в координатной системе, начало которой совпадает с положением неподвижной частицы, а азимутальная ось совпадает с направлением вектора $\vec{J}$, то получим

$$\vec{\rho}(\tau) \equiv \rho(\tau)(\sin \theta \cos \varphi(\tau), \sin \theta \sin \varphi(\tau), \cos \theta). \quad (3.17)$$

Теперь осталось только найти $\varphi(\tau)$, чтобы получить полную информацию о движении частицы, т.е. о векторе $\vec{\rho}(\tau)$, потому что $\rho(\tau)$ задается уравнением (3.8), а угол θ остается постоянным в процессе движения. Равенство (3.16) вместе с формулами (3.15) и (3.10) дает соотношение

$$\cos \theta = \lambda(1 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.18a)$$

и, таким образом,

$$\sin \theta = (1 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.18б)$$

$$\operatorname{ctg} \theta = \lambda. \quad (3.18в)$$

Теперь можно легко вычислить $\varphi(\tau)$. Действительно, из соотношения (3.17) получим

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\rho}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) + \rho \dot{\varphi}(-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{\rho}} \cdot \dot{\vec{\rho}} = (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) \sin^2 \theta + \dot{\rho}^2 \cos^2 \theta.$$

С использованием (3.7) получим

$$1 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta,$$

откуда с привлечением (3.8) и (3.18б) легко получить, что

$$1 = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} + \dot{\varphi}^2 \frac{1 + \tau^2}{1 + \lambda^2},$$

что и дает соотношение

$$\dot{\varphi}(\tau) = \frac{(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + \tau^2}. \quad (3.19)$$

Интегрируя (3.19), получим

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \tau, \quad (3.20)$$

где $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Если использовать выражение (3.17), то формулы (3.8), (3.18) и (3.20) дают полную информацию о движении частицы, которое описывается явно и в терминах элементарных функций.

Те же результаты могут быть получены, если заметить, что в случае $p = -3$ (когда уравнение (2.1) с функцией $g(r)$ (2.19) совпадает с (1.1)) линейное ОДУ третьего порядка (2.16) полностью решается в терминах элементарных функций. В этом случае это уравнение, записанное для каждой компоненты ψ трехмерного вектора $\vec{\rho}$ в отдельности, имеет вид

$$(1 + \tau^2)^3 \psi''' + 3\tau(1 + \tau^2)^2 \psi'' + \lambda^2(1 + \tau^2) \psi' - \lambda^2 \tau \psi = 0. \quad (3.21)$$

Три независимых решения этого уравнения даются формулами

$$\psi_s(\tau) = (1 + i\tau)^{\frac{1+s\gamma}{2}} (1 - i\tau)^{\frac{1-s\gamma}{2}} = (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} e^{is\gamma \arctg \tau}, \quad s = 0, \pm 1, \quad (3.22)$$

где

$$\gamma = (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

Действительно, из (3.22) легко получить, что

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\psi}_s(\tau)}{\psi_s(\tau)} &= (is\gamma + \tau)(1 + \tau^2)^{-1}, \\ \frac{\ddot{\psi}_s(\tau)}{\psi_s(\tau)} &= (1 - s^2\gamma^2)(1 + \tau^2)^{-2}, \\ \frac{\psi_s''(\tau)}{\psi_s(\tau)} &= (1 - s^2\gamma^2)(is\gamma - 3\tau)(1 + \tau^2)^{-3}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (3.21), получим

$$s\gamma[s^2\gamma^2 - (1 + \lambda^2)] = 0,$$

и из формулы (3.23) следует, что

$$s(s^2 - 1) = 0.$$

Таким образом, анзац (3.22) удовлетворяет уравнению (3.21) при $s = 0$, $s = +1$ и $s = -1$.

Внимательный читатель легко получит конечное решение поставленной задачи, используя выражения (2.21) и (2.22) и сравнивая их с вышеприведенными решениями (3.22).

В заключение представим окончательный результат для траекторий в терминах исходных переменных (начало отсчета по времени по-прежнему совпадает с моментом, когда частица максимально приближается к началу координат). Результаты легче всего представить (и проанализировать) в сферических координатах в системе отсчета, описанной выше, в которой начало координат совпадает с неподвижной частицей, а азиму-

тальная ось z параллельна вектору Пуанкаре $\vec{J}$ (см. ((3.11), (3.9) и (3.12)):

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= r(t)(\sin \theta \cos \phi(t), \sin \theta \sin \phi(t), \cos \theta), \\ r(t) &= a \left[1 + \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \theta &= \operatorname{arccctg} \lambda, \\ \phi(t) &= \phi_0 + (1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{T},\end{aligned}$$

где T и λ даются соответственно формулами (3.4) и (3.5). Из вышеприведенных формул следует, что в асимптотическом режиме (в отдаленном прошлом и будущем) все траектории становятся прямыми линиями, а именно при $t \rightarrow \pm\infty$ получим

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_{\pm} t + \vec{r}_{\pm}^{(0)} + O(t^{-1}). \quad (3.24)$$

Также легко видеть, что из этих формул следует

$$b_{\pm} = r_{\pm}^{(0)} \equiv |\vec{r}_{\pm}^{(0)}| = a, \quad (3.25)$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v}_{+} \cdot \vec{v}_{-}}{v^2} = -1 + 2(1 + \lambda^2)^{-1} \sin^2 \frac{(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \pi}{2}, \quad (3.26)$$

$$\Delta \phi \equiv \phi(\infty) - \phi(-\infty) = \pi(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.27)$$

где, разумеется, асимптотические скорости имеют одинаковые абсолютные значения, $v_{\pm} \equiv |\vec{v}_{\pm}| = v$, величины $b_{\pm}$ (см. (3.25)) суть прицельные параметры (расстояния от начала координат до асимптот; см. (3.24)), величина α , которая определяется по модулю 2π первым равенством в формуле (3.26), представляет собой угол рассеяния, а величина $\Delta \phi$ (см. (3.27)) задает полное вращение траектории в направлении угла ϕ .

Благодарности. Авторы благодарны М. Атье, К. Бернардини, Н. Мантону и Ф. Рерлиху за помощь в освещении истории исследуемой задачи, а также рецензенту и М. Деминову, заметившим нетривиальную ошибку в знаке в промежуточной версии данной работы.

Список литературы

- [1] *H. Poincaré.* Compt. Rendus Acad. Sci. 1986. V. 123. P. 530–533.
- [2] *M. Bruschi, F. Calogero.* J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7. P. 303–386.
- [3] *F. Calogero.* Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatments. Lect. Notes Phys. Monograph. V. 66. Berlin: Springer, 2001.
- [4] *J. Sivardièrre.* Eur. J. Phys. 2000. V. 21. P. 183–190.
- [5] *J. Schwinger, K. A. Milton, Wu-yang Tsai, L. L. DeRaad Jr., D. C. Clark.* Ann. Phys. 1976. V. 101. P. 451–495.
- [6] *A. S. Goldhaber, W. P. Trower.* Am. J. Phys. 1990. V. 58. P. 429–439.