Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Тюрин, Пространство эрмитовых троек и квантование Аштекара–Айшема,
ТМФ, 2004, том 139, номер 1, 145–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:38:08

© 2004 г.

Н. А. Тюрин*

ПРОСТРАНСТВО ЭРМИТОВЫХ ТРОЕК И КВАНТОВАНИЕ АШТЕКАРА–АЙШЕМА

Представлено обобщение конструкции Аштекара–Айшема квантования калибровочных теорий на случай, когда вместо эрмитовых связностей в качестве конфигурационных переменных используется пространство эрмитовых троек.

Ключевые слова: эрмитова связность, конструкция Аштекара–Айшема, пространство эрмитовых троек.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является продолжением работ [1], [2], в которых исследовались свойства пространства эрмитовых троек над почти комплексными гладкими четырехмерными многообразиями. В предыдущих работах мы попытались на техническом уровне развить идею о том, что пространство эрмитовых троек может рассматриваться как аналог пространства эрмитовых связностей. Достаточно полное развитие теорий Янга–Миллса (для описания электромагнетизма и хромодинамики) и их квантование и малая результативность этих подходов в применении к классической гравитации порождают новые идеи, одну из которых мы и приводим ниже. Описание гравитации как калибровочной теории с группой диффеоморфизмов подлежащего многообразия в качестве калибровочной группы является широко принятой концепцией. Однако используемые при этом стандартные переменные, восходящие к классикам (такие как метрика или соответствующая связность Леви-Чивита), не подходят для дальнейшего квантования (так как в этом случае невозможной является ренормализация; см., например, обзор [3]). В то же время иной подход, основанный на эрмитовых связностях, был забыт на 50 лет (см. небольшой, но необычайно информативный обзор [4]).

С другой стороны, математические аспекты квантовой гравитации в случаях размерностей $1+1$ и $2+1$ указывают на то, что в данных конструкциях существенную роль играет комплексная геометрия. Многие эффекты, известные в случае римановых поверхностей, возможны потому, что любая риманова метрика на поверхности однозначно определяет согласованную кэлерову структуру, т.е. мы попадаем в область действия

---

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: ntyurin@thsun1.jinr.ru

теории алгебраических кривых, которая на сегодняшний день является одним из наиболее развитых и совершенных разделов современной математики. Естественно возникает желание исправить то, что в размерности 4 мы теряем это свойство, т.е. привести дополнительно согласованную почти комплексную структуру и рассматривать в качестве динамической переменной пару (метрика, согласованная комплексная структура). Ниже мы покажем, что следы этой идеи могут быть найдены во многих подходах к квантовой гравитации; в то же время такое привнесение имеет смысл и в евклидовом случае, и в лоренцевом, а в ультрагиперболическом мы снова получаем то же почти взаимно однозначное соответствие, что и в случае римановой поверхности.

В работе [2] был представлен пример того, как эрмитовы тройки связаны с решениями уравнения Зайберга–Виттена (если угодно, эта связь может пониматься как отдаленный аналог AdS/CFT-соответствия). Основная цель настоящей работы – представить обобщение конструкции квантования Аштекара–Айшема (изначально введенное для пространств эрмитовых связностей) на случай эрмитовых троек.

2. ПРОСТРАНСТВО ЭРМИТОВЫХ ТРОЕК

В этом разделе мы коротко напомним основные определения (подробнее см. [1], [2]).

Пусть X – гладкое четырехмерное ориентированное компактное многообразие. Пространство эрмитовых троек $\mathcal{M}_X$ составлено из пар (g, J) , где g – риманова метрика, J – некоторая согласованная с ней почти комплексная структура, т.е. оператор

$$J: TX \rightarrow TX \mid J^2 = -\text{id}.$$

Условия согласованности в полном объеме обсуждаются в работе [1]. Все пространство эрмитовых троек разбивается на несвязные компоненты введением дискретного параметра

$$k(g, J) = K_J \in H^2(X, \mathbb{Z}),$$

где K_J – канонический класс почти комплексной структуры J . Структура связной компоненты обсуждается в [1]. Грубо говоря, дискретный параметр $k(g, J)$ является аналогом первого класса Черна векторного расслоения. Далее, оправдывая свое название, пространство $\mathcal{M}_X$ на самом деле состоит из троек – каждая пара (g, J) однозначно определяет третий элемент, а именно некоторую положительную 2-форму ω (см. [1]). Ее дифференциал в наших приложениях будет играть роль, похожую на роль кривизны эрмитовой связности.

Компонента единицы группы диффеоморфизмов X , $\text{Diff}^0 X$, действует на пространстве $\mathcal{M}_X$, сохраняя дискретный параметр.

На языке такой калибровочной теории, выбирая подходящие калибровочно-инвариантные уравнения, мы можем реализовать известные конструкции. Например, теория многообразий модулей поляризованных алгебраических поверхностей описывается такими калибровочно-инвариантными уравнениями для динамической переменной $(g, J, \omega) \in \mathcal{M}_X$:

- 1) структура J интегрируема (т.е. тензор Нийенхейса тривиален);

- 2) форма ω замкнута (т.е. является кэлеровой формой);
- 3) когомологический класс $[\omega]$ целочисленный (т.е. соответствующая кэлерова метрика имеет хodgeв тип).

Как мы знаем из теории алгебраических поверхностей, во многих случаях пространство классов эквивалентности решений нашей системы по действию калибровочной группы является конечномерным многообразием, как и в классических калибровочных теориях. Другие возможные Diff-инвариантные уравнения обсуждаются в работе [2].

Понятие эрмитовой тройки легко обобщается на случай, когда на первый взгляд никакой комплексности быть не может. Пусть M – трехмерное гладкое ориентированное компактное многообразие. Определим пространство эрмитовых троек для M , используя стандартную надстройку, применяющуюся в компактификации Калуды–Клейна. Рассмотрим прямое произведение

$$X = M \times S^1,$$

которое уже четырехмерно (и всегда почти комплексно) и выделим в пространстве $\mathcal{M}_X$ компоненту, инвариантную относительно фазовых вращений S^1 . Полученное пространство $\mathcal{M}_M$ назовем пространством эрмитовых троек многообразия M . Заметим, что в нем всегда имеется компонента, соответствующая тривиальному значению дискретного параметра.

Пространство $\mathcal{M}_M$ может быть с тем же успехом описано в терминах многообразия M : элементы его представлены парами (g, v) , где g – риманова метрика на M , а v – векторное поле единичной длины (следовательно, не имеющее нулей). Третьим элементом снова будет невырожденная 2-форма ω_v^2 , определяемая так: векторному полю v соответствует относительно метрики g некоторая невырожденная 1-форма ω_v^1 , применяя к которой оператор Ходжа, получаем форму ω_v^2 . Снова имеют смысл понятия, использованные в качестве Diff-инвариантных уравнений: очевидно, что на форму ω можно наложить условие замкнутости, а на индуцируемое двумерное распределение

$$F \subset TM \mid F = \langle v \rangle_g^\perp$$

– условие интегрируемости. Нетрудно видеть, что подобные приведенным выше калибровочно-инвариантные уравнения приводят к теории линейных расслоений над алгебраическими кривыми. С другой стороны, в этом случае уравнения становятся зависимыми, а наоборот, их отрицание соответствует многообразию модулей контактных структур на M .

Заметим, что получаемая картина очень похожа на ту, с которой часто начинаются конструкции квантовой гравитации (см., например, подробный обзор [3]). Именно, в пространстве с лоренцевой глобально гиперболической структурой рассматривается поверхность Коши Σ с римановой метрикой и парой векторных полей – касательного и нормального (обычно предполагается, что такая поверхность существует, см. также [5]). Компактифицируя по Калуде–Клейну малую нормальную окрестность Σ , получаем в точности эрмитову тройку на

$$X = \Sigma \times S^1,$$

где нормальный вектор индуцирует фазовые вращения. При этом лоренцева структура заменяется евклидовой (еще один известный прием, называемый обычно поворотом Вика, см. [6]). Однако евклидовой структуры не достаточно для восстановления глобально гиперболической лоренцевой структуры вблизи воображаемой поверхности Коши — необходима также фиксация дополнительных структур, наиболее важной из которых является согласованная комплексная структура.

Таким образом, введение в качестве динамических переменных эрмитовых троек кажется вполне оправданным, тем более что в работах [1], [2] такой подход принес технические результаты в рамках калибровочной теории Зайберга–Виттена. Эти результаты можно расценить как проявление предполагаемой нами аналогии между пространством эрмитовых связностей и пространством эрмитовых троек на классическом уровне. В настоящей работе общим фоном хотелось бы наметить подобную аналогию на квантовом уровне — в терминах квантования Аштекара–Айшема.

3. КОНСТРУКЦИЯ АШТЕКАРА–АЙШЕМА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА СВЯЗНОСТЕЙ

В этом разделе мы следуем работе [7], придерживаясь принятых там обозначений. Читателю, знакомому с этим материалом, рекомендуется переходить непосредственно к следующему разделу.

Пусть Σ — вещественное компактное ориентированное трехмерное многообразие. Рассмотрим главное $SU(2)$ -расслоение $P \rightarrow \Sigma$, которое необходимым образом будет топологически тривиальным. Как обычно, обозначим символом $\mathcal{A}$ пространство эрмитовых связностей на P , на котором действует стандартная калибровочная группа $\mathcal{G}$. Пространство классов эквивалентности $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ находится в центре нашего внимания. Напомним, что, в то время как пространство $\mathcal{A}$ является просто аффинным пространством над векторным пространством $\Omega^1(\text{ad } P)$, факторпространство $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ не обладает никакой линейной структурой, будучи топологически устроено достаточно сложным образом.

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \Sigma$ и рассмотрим пространство отмеченных петель. Это значит, что мы рассматриваем непрерывные кусочно-аналитические параметризованные пути вида

$$p: [0; s_1] \cup \dots \cup [s_{n-1}; 1] \rightarrow \Sigma$$

такие, что $p(0) = p(1) = x_0$. Множество таких отображений обладает групповой структурой: для любых двух таких путей p_1, p_2 имеем

$$p_2 \circ p_1 = \begin{cases} p_1(2s) & \text{при } s \in [0; \frac{1}{2}], \\ p_2(2s - 1) & \text{при } s \in [\frac{1}{2}; 1]; \end{cases}$$

с другой стороны,

$$p^{-1}(s) = p(1 - s).$$

Пространство всех таких петель обозначается $\mathcal{L}_{x_0}$.

Для любой связности $A \in \mathcal{A}$ обход вдоль петли $\alpha \in \mathcal{L}_{x_0}$ определяет некоторый элемент $H(\alpha, A) \in SU(2)$ – голономию данной связности вдоль данной петли. Используя это свойство, определим отношение эквивалентности на множестве $\mathcal{L}_{x_0}$: две петли $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{x_0}$ назовем эквивалентными, если для любой связности $A \in \mathcal{A}$ выполняется тождество

$$H(\alpha, A) = H(\beta, A).$$

Назовем класс петель, эквивалентных друг другу, *обручем*¹⁾ и обозначим это факторпространство как $\mathcal{H}\mathcal{G}$. Это множество наследует групповую структуру²⁾.

Далее строится C^* -алгебра Аштекара–Айшема. Каждый обруч $\tilde{\alpha} \in \mathcal{H}\mathcal{G}$ индуцирует вещественную ограниченную функцию $T_{\tilde{\alpha}}$ на факторпространстве $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, а именно

$$T_{\tilde{\alpha}}([A]) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} H(\alpha, A), \quad (1)$$

где связность A представляет класс $[A]$, а петля α – обруч $\tilde{\alpha}$ (нетрудно проверить, что выражение не зависит от выбора представителей). Согласно известному следовому соотношению для $SU(2)$ имеем

$$T_{\tilde{\alpha}} \cdot T_{\tilde{\beta}} = \frac{1}{2} (T_{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}} + T_{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}^{-1}}),$$

т.е. множество таких функций замкнуто относительно умножения. Поэтому корректно определена комплексная алгебра, состоящая из конечных линейных комбинаций функций $T_{\tilde{\alpha}_i}$, взвешенных на комплексные коэффициенты. Она обладает структурой C^* -алгебры и является подалгеброй в C^* -алгебре всех комплекснозначных ограниченных непрерывных функций на факторпространстве $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Обозначив эту подалгебру как $\mathcal{HA}$, рассмотрим ее пополнение $\overline{\mathcal{HA}}$ в объемлющей C^* -алгебре по супремум-норме. Получаемая C^* -алгебра $\overline{\mathcal{HA}}$ называется C^* -алгеброй Аштекара–Айшема. Именно она составляет основу возможного квантования.

А именно, применяя теперь теорию представлений Гельфанда, получаем следующие утверждения.

1. Пополнение $\overline{\mathcal{HA}}$ естественно изоморфно C^* -алгебре комплекснозначных непрерывных функций на некотором компактном хаусдорфовом пространстве, называемом *спектром Гельфанда* и обозначаемом $\operatorname{sp}(\overline{\mathcal{HA}})$.

2. Факторпространство $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ вкладывается как всюду плотное подмножество в это множество, поэтому мы можем понимать спектр Гельфанда как естественную компактификацию $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, обозначаемую $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$.

3. Любое непрерывное циклическое представление $\overline{\mathcal{HA}}$ ограниченными операторами на гильбертовом пространстве изоморфно естественному представлению функциями на $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ из $\overline{\mathcal{HA}}$ с поточечным умножением, интегрируемыми с квадратом относительно некоторой регулярной меры $d\mu$ (т.е. гильбертовым пространством каждого такого представления является пространство $L^2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$).

¹⁾Здесь в английском оригинале используется игра слов “loop – hoop”.

²⁾Этим объясняется его обозначение – берутся начальные буквы из “loop group”.

4. Каждое такое представление однозначно определяется некоторым непрерывным положительным функционалом $\langle \cdot \rangle$ на нашей C^* -алгебре. Такой функционал задает соответствующую функцию $\Gamma(\alpha)$ на пространстве петель $\mathcal{L}_{x_0}$ по следующему очевидному правилу:

$$\Gamma(\alpha) = \langle T_{\tilde{\alpha}} \rangle.$$

Из последнего условия видно, что функция $\Gamma(\alpha)$ на петлях должна удовлетворять специальным условиям, например

$$\sum_i a_i T_{\tilde{\alpha}_i} = 0 \implies \sum_i a_i \Gamma(\alpha_i) = 0$$

и условию положительности

$$\sum_{i,j} \tilde{a}_i a_j (\Gamma(\alpha_i \cdot \alpha_j) + \Gamma(\alpha_i \cdot \alpha_j^{-1})) \geq 0.$$

Этим определяется соответствие между регулярными мерами на компактификации $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ и специальными функциями на обобщенных узлах (которыми являются облучи). Более того, включая в рассмотрение группу диффеоморфизмов подлежащего многообразия и выделяя только те объекты, которые инвариантны относительно ее действия, получаем, что каждый инвариант обобщенного узла (функция на узлах, инвариантная относительно группы диффеоморфизмов) однозначно соответствует некоторой регулярной Diff-инвариантной мере на пространстве классов эквивалентности обобщенных эрмитовых связностей.

Безусловно, мы очень бегло напомнили только самые основы конструкции, которая в полной форме опирается даже не на обобщенные узлы, а на спиновые сети Пенроуза (современное состояние предмета изложено в обзоре [3], который мы рекомендуем для глубокого ознакомления). Перед тем как перейти к модификации этой конструкции для эрмитовых троек, приведем несколько важных замечаний.

1. Главным достоинством представленной конструкции является ее независимость от подлежащих структур³⁾. Это позволяет использовать ее в самом широком контексте квантования калибровочных теорий (а не только, скажем, классической электродинамики, в которой уравнения Максвелла существенно зависят от подлежащей структуры, а именно от конформного класса метрики).

2. Конструкция дословно повторяется для $U(1)$ -расслоения над Σ (и даже более прозрачна в математическом смысле), причем вследствие абелевости этот случай допускает работу с топологически нетривиальными расслоениями. Мы используем этот случай ниже.

3. Естественная Diff-инвариантная мера в исходной конструкции Аштекара–Айшема вводится через так называемые цилиндрические функции (см. [7]). Определение таких функций требует рассмотрения наборов петель, что унифицируется понятием *спиновой сети* Пенроуза.

---

³⁾Трудно придумать в русском языке подходящий аналог емкому и точному выражению “background independence”.

4. ПОВТОРЕНИЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ЭРМИТОВЫХ ТРОЕК

В основе конструкции Аштекара–Айшема лежит очень простой факт: касательный вектор к связности является 1-формой со значениями в алгебре Ли, и это позволяет производить интегрирование вдоль любой петли (с математической точки зрения эта операция корректно определена в абелевом случае, иначе необходима фиксация дополнительных данных – тривиализации расслоения и т.п.). Похожий факт лежит в основе предлагаемого нами обобщения: в работе [2] было показано, что касательное пространство к пространству эрмитовых троек есть просто Ω^2 (лемма 2.1 в работе [2]). Таким образом, возможно интегрирование по *двумерным подмногообразиям*.

Итак, пусть X – компактное ориентированное гладкое четырехмерное многообразие и $K \in H^2(X, \mathbb{Z})$ – некоторый допустимый канонический класс над X . Рассмотрим компоненту $\mathcal{M}_X^K$ в пространстве всех эрмитовых троек. Пусть s – непрерывное кусочно-аналитическое отображение, составленное из аналитических отображений $s_1, \dots, s_n$ таких, что

$$s_i: [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow X,$$

причем

$$s_i(0; t) = s_i(1; t) \text{ и } s_i(t; 0) = s_i(t; 1) \quad \forall t.$$

Очевидно, что образ каждого такого отображения является некоторым букетом гладких двумерных торов в X . Групповая структура на множестве таких полиотображений определяется очевидным образом. Тогда имеем естественное спаривание:

$$H(s, (g, J)) = \exp\left(i \int_{\text{Im } s} \omega\right) \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где ω – форма, соответствующая паре (g, J) . Заметим, что значение такого функционала для эрмитовой тройки с замкнутой формой ω зависит только от гомологического типа $[\text{Im } s] \in H_2(X, \mathbb{Z})$; это соответствует тому, что значение функционала (1) в случае плоской связности A зависит только от гомотопического типа петли.

Назовем полиотображения s_1, s_2 эквивалентными, если для любой эрмитовой тройки $(g, J) \in \mathcal{M}_X^K$ имеет место равенство

$$H(s_1, (g, J)) = H(s_2, (g, J)).$$

Факторизуя по этому соотношению эквивалентности, получаем множество $\tilde{\mathcal{S}}$. Как и в классическом случае, это множество наделено групповой структурой (коммутативной).

Далее, нетрудно видеть дальнейшую параллель: каждый букет торов определяет функционал на пространстве эрмитовых связностей, задаваемый той же формулой (2), т.е.

$$T_{\tilde{s}}((g, J)) = H(s, (g, J)) \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

где s представляет класс $\tilde{s}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отличие формулы (3) от (1) на первый взгляд заключается в том, что переменная (g, J) не факторизуется по действию калибровочной группы (в данном случае таковой должна быть группа диффеоморфизмов X). Однако группа $\text{Diff } X$, рассматриваемая в качестве калибровочной, весьма специфична; сам термин “многообразие” можно понимать с двух точек зрения:

1) обычно этот объект понимается как множество точек, выделенное в некотором объемлющем пространстве некоторыми условиями (например, уравнениями);

2) однако по определению (гладкое) многообразие — это множество (гладко) эквивалентных атласов, а понятие карты в атласе в точности совпадает с понятием из п. 1.

С точки зрения калибровочной теории гладкое многообразие *по определению* есть класс эквивалентности. В этом смысле мы понимаем и пару (g, J) — как класс эквивалентности. Для конкретных вычислений используется, конечно, некоторая конкретная модель (атлас), и выбор такой модели мы понимаем как фиксацию калибровки. Поэтому формула (3) действительно является точным аналогом (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для эрмитовых троек над трехмерными многообразиями (см. раздел 2) отображение (3) также определено. В этом случае вместо полиотображений мы используем (как и в исходном случае) петли на M . Эрмитова тройка из $\mathcal{M}_M$ (см. раздел 2) определяется парой (g, v) , и для вычисления значения на петле γ не обязательно переходить к четырехмерной картинке с многообразием $M \times S^1$ (при этом каждая петля γ как раз дала бы тор $\gamma \times S^1$). Значение интегрирования из (2) по такому тору *в точности* совпадает с результатом интегрирования

$$\int_{\gamma} \omega_v^1 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, каждый элемент $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{S}}$ определяет функционал $T_{\tilde{s}}$ — ограниченную непрерывную комплекснозначную функцию. Отсюда, используя очевидное тождество

$$T_{\tilde{s}_1 \cdot \tilde{s}_2} = T_{\tilde{s}_1} \cdot T_{\tilde{s}_2},$$

имеем коммутативную алгебру

$$\mathcal{HS} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i T_{\tilde{s}_i} \mid a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

Следуя далее исходному образцу Аштекара–Айшема, строим пополнение $\mathcal{HS}$ по супремум-норме в объемлющей C^* -алгебре и получаем $\overline{\mathcal{HS}}$. Спектр Гельфанда этой C^* -алгебры представляет естественную компактификацию $\overline{\mathcal{M}_X^K}$, понимаемую как аналог обобщенного факторпространства $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Далее снова работает теория Гельфанда–Наймарка, приводящая к результатам, аналогичным представленным в предыдущем разделе. Diff-инвариантная мера на пополненном пространстве $\overline{\mathcal{M}_X^K}$ может быть построена таким же образом, как и в исходном случае, с помощью цилиндрических функций. А именно (ср. с [3], [7]), для набора полиотображений $\tilde{s}_{1,\dots,n} = \{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n\}$ имеем проекцию

$$N_{1,\dots,n}: \mathcal{HS} \rightarrow (U(1))^n,$$

определяемую посредством представления экспоненты из (2) как элемента $U(1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция F на $\mathcal{M}_X^K$ называется *цилиндрической относительно проекции* $N_{1,\dots,n}$, если существует функция f на прямом произведении $(U(1))^n$, интегрируемая с квадратом относительно прямого произведения мер Хаара, такая, что

$$F = N_{1,\dots,n}^* f.$$

Функция называется *цилиндрической*, если найдется набор $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_m$, относительно которого она цилиндрическая.

Заметим, что все цилиндрические функции по определению снабжены некоторой Diff-инвариантной мерой, индуцируемой прямыми произведениями мер Хаара на наборах $(U(1))^n$ (в точности как и для эрмитовых связностей, см. [7]). Переходя к пределу и повторяя дословно аргументы из [7], получаем инвариантную меру на $\overline{\mathcal{HS}}$. Таким образом, гильбертово пространство представления соответствующих квантовых операторов снова имеет вид $L^2(\overline{\mathcal{M}_X^K}, d\mu_{\text{inv}})$, где $d\mu_{\text{inv}}$ – построенная с помощью цилиндрических функций Diff-инвариантная мера.

В конце данного раздела хотелось бы привести еще два замечания.

Во-первых, естественно ожидать, что аналогично тому, как в исходном случае Diff-инвариантная мера соответствует некоторому инварианту специальных узлов в трехмерном многообразии, в обобщенном случае приведенная выше Diff-инвариантная мера будет соответствовать некоторому инварианту гладко вложенных торов. Однако двумерные многообразия в четырехмерном объемлющем многообразии в общем случае имеют нетривиальные пересечения, поэтому речь не может идти о “двумерных узлах”. Возможно, эта мера соответствует некоторым другим инвариантам, подобным когомологиям Флоера в симплектической геометрии.

Во-вторых, в отличие от исходного случая, мы можем предложить и другую Diff-инвариантную меру. Для ее определения воспользуемся отображением

$$\tilde{\tau}: \mathcal{M}_X^K \rightarrow \text{Gr}^+,$$

представленным композицией

$$\tilde{\tau} = \rho \circ \text{pr}_1,$$

где ρ – вещественное отображение периодов (см. пример 3.2 из работы [2]), а pr_1 – проекция на первую компоненту в эрмитовой тройке:

$$\text{pr}_1(g, J) = g.$$

Пространство Gr^+ изоморфно пространству Лобачевского, на котором имеется стандартная Diff-инвариантная метрика, индуцирующая соответствующую Diff-инвариантную меру $d\mu_{\text{Lob}}$. Нетрудно видеть, что мера

$$d\mu = \tilde{\tau}^* d\mu_{\text{Lob}}$$

является также инвариантной по действию группы $\text{Diff } X$, откуда получаем альтернативную меру. Естественно предполагать, что эта мера может быть продолжена на компактификацию $\overline{\mathcal{M}_X^K}$ и должна соответствовать некоторому инварианту гладких вложенных двумерных торов. Работа, посвященная проверке этой гипотезы, продолжается.

5. ОБОБЩЕННАЯ КОНСТРУКЦИЯ

В этом разделе мы покажем, что обобщение, представленное в предыдущем разделе, можно скомбинировать с исходной конструкцией в рамках компактификации Калуцы–Клейна. Прежде чем представить соответствующую конструкцию, приведем некоторые аргументы, лежащие в основе как уже представленного обобщения, так и следующей ниже комбинации.

Сама по себе конструкция квантования Аштекара–Айшема калибровочных теорий является математически корректной процедурой. Однако дальнейшее ее применение к гравитации уже может вызвать вопросы: представление метрических тензоров через тривиализованное представление эрмитовых связностей на тривиальном эрмитовом расслоении (см. обзор [4]) нарушает ту самую независимость от подлежащих структур, которая является столь важной чертой этого метода. Действительно, выбор тривиализации на эрмитовом расслоении предполагает, что фиксировано некоторое исходное поле, что в точности соответствует выбору исходной метрики в стандартных “пертурбативных” подходах к квантовой гравитации. Любая риманова метрика, конечно, определяет эрмитово спинорное расслоение и эрмитову связность на нем (подробно об этом см., например, обзор [8]), однако одной связности недостаточно для восстановления исходной метрики, и эрмитовы структуры на топологически идентичных расслоениях могут быть разными.

Предлагаемая ниже конструкция, скомбинированная из конструкций, приведенных в разделах 3 и 4, позволяет использовать метод Аштекара–Айшема для специальных лоренцевых метрик.

Итак, пусть M , как и в разделе 3, – некоторое гладкое ориентированное трехмерное многообразие. Пусть $\mathcal{M}_M$ – пространство эрмитовых троек, определенное в разделе 2. Тогда для каждого его элемента (g, v) имеется ассоциированное эрмитово линейное расслоение

$$L = \langle v \rangle^\perp \subset TM,$$

комплексное умножение на котором определено как послойное векторное умножение на $v(x)$ (напомним, что M трехмерно). Этим определено и соответствующее пространство $U(1)$ -связностей $\mathcal{A}_{(g,v)}(L)$. В результате получаем расслоение $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}_M$ со слоем $\mathcal{A}_{(g,v)}(L)$.

Имеется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Каждый элемент $\mathcal{P}$ задает специальную лоренцеву метрику на тотальном пространстве $U(1)$ -расслоения, ассоциированного с L .*

Действительно, обозначим через Y четырехмерное многообразие, получающееся как тотальное пространство $U(1)$ -расслоения (оно зависит от выбора эрмитовой структуры на L только метрически, т.е. его топологический и гладкий типы определены однозначно). В наборе $(A, (g, v)) \in \mathcal{P}$ первый элемент может быть представлен как чисто мнимая 1-форма на Y , ядро которой определяет горизонтальное распределение в каноническом расслоении

$$\pi: Y \rightarrow M,$$

и “риманова” составляющая в точке $y \in Y$ определяется на горизонтальной гиперплоскости H_y^{hor} римановой метрикой $g_{\pi(y)}$. Вертикальная составляющая индуцируется каноническими калибровочными преобразованиями (существенно зависящими от эрмитовой структуры, т.е. от (g, v)). Таким образом, лоренцева метрика задана формулой

$$ds^2 = -(\text{Sym}^2 A - \tilde{g}),$$

где $\tilde{g}$ – результат подъема g на Y посредством A .

Следовательно, мы можем представить $\mathcal{P}$ как некоторое подмножество в пространстве всех лоренцевых метрик над Y . Это подмножество мы будем обозначать тем же символом $\mathcal{P}$. Тогда приведенные выше конструкции позволяют обобщить конструкцию Аштекара–Айшема на множество таких специальных лоренцевых метрик.

Действительно, каждая петля γ в M определяет ограниченный функционал F_γ на $\mathcal{P}$, а именно

$$F_\gamma = T_\gamma((g, v)) \cdot \overline{T}_\gamma(A) \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

где $T_\gamma((g, v))$ определено в (2), а $T_\gamma(A)$ – в формуле (1) (модифицируемой для группы $U(1)$). Для любой петли γ функционал F_γ является непрерывным ограниченным функционалом, и мы можем снова использовать всю конструкцию Аштекара–Айшема с C^* -алгебрами и спектром Гельфанда–Наймарка, получая некоторое квантование выделенного нами подмножества специальных лоренцевых метрик на Y . При этом возникает ряд вопросов, касающихся достаточности такой специализации.

1. Общая лоренцева метрика из $\mathcal{P}$ обладает специальной симметрией: по построению она инвариантна относительно канонических фазовых вращений соответствующего $U(1)$ -расслоения. Первый вопрос: всякая ли лоренцева метрика с такой дополнительной симметрией представлена некоторым набором $(A, (g, v)) \in \mathcal{P}\Gamma$

2. Глобально гиперболические лоренцевы метрики представлены в $\mathcal{P}$, если расслоение L является топологически тривиальным: в этом случае в пространстве абелевых связностей выделены те связности, которые допускают ковариантно постоянные сечения, а сами эти сечения в Y доставляют набор поверхностей Коши. В то же время в общем случае это не так. Простейшим примером является трехмерная сфера S^3 со стандартной метрикой и векторным полем, индуцирующим фазовые вращения S^3 как расслоения Хопфа над S^2 со слоем $U(1)$. Ортогональное этому векторному полю эрмитово линейное расслоение топологически нетривиально (в качестве Y в этом случае мы получаем эллиптический пучок – поверхность типа K3). Однако это рассуждение не отвечает полностью на вопрос о существовании поверхностей Коши для произвольной лоренцевой метрики из $\mathcal{P}$. Таким образом, второй вопрос: является ли произвольная лоренцева метрика из $\mathcal{P}$ глобально гиперболической?

3. И, наконец, третий вопрос касается связи представленной конструкции с интегрируемыми системами. Поскольку этот вопрос наиболее важен для нас, обсудим его подробно.

Данная конструкция обладает специфической чертой: вместо цилиндрических функций (как в определении 1) можно ввести торические функции и “включить” пуассонову

геометрию. Действительно, для любого набора петель $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in M$ рассмотрим отображение

$$N_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} : \mathcal{P} \rightarrow T^{2n},$$

где

$$T^{2n} = (U(1) \times U(1)) \times \dots \times (U(1) \times U(1))$$

есть $2n$ -мерный тор со стандартной симплектической структурой, инвариантной относительно каждого $U(1)$ -действия и нормализованной по Лиувиллю. Тогда для любого набора $(A, (g, v)) \in \mathcal{P}$ имеем

$$N_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(A, (g, v)) = (T_{\gamma_1}(g, v) \times T_{\gamma_1}(A)) \times \dots \times (T_{\gamma_n}(g, v) \times T_{\gamma_n}(A)),$$

где отображения T_{γ_i} заданы в (1), (2). По аналогии с цилиндрическими функциями вводим понятие *торической* функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция F на $\mathcal{P}$ называется *торической*, если существует набор петель $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ и гладкая функция f на торе T^{2n} , интегрируемая с квадратом относительно стандартной меры Лиувилля, так что

$$F = N_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}^* f.$$

Заметим, что на этот раз введение таких специальных функций позволяет определить не только Diff-инвариантную меру на пространстве функций над $\mathcal{P}$, но и Diff-инвариантную *пуассонову структуру*. Действительно, для любой пары торических функций F_1, F_2 на $\mathcal{P}$ скобка Пуассона определена так: по определению F_i найдется набор петель $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ и пара функций f_1, f_2 на торе T^{2n} такие, что

$$F_i = N_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}^* f_i.$$

Тогда

$$\{F_1, F_2\}_q = N_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}^* \{f_1, f_2\}.$$

Конечно, данное замечание влечет целый ряд вопросов. Продолжается ли данная пуассонова структура на компактификацию $\overline{\mathcal{P}}$, задаваемую *комплексными* функционалами (4)? Если ответ на этот вопрос окажется положительным, то следующим естественно встает вопрос о том, является ли соответствующая система *интегрируемой*. Очевидно, что система на любом торе T^{2n} является системой с разделенными переменными, и легко построить полный набор первых интегралов (так как сам тор изначально разложен в прямое произведение). Однако с той же степенью очевидности мы можем сказать, что такие первые интегралы не реализуются функционалами вида (4): это означало бы, что на каком-то наборе петель или все абелевы связности дают тривиальную монодромия, или все эрмитовы тройки дают целочисленные интегралы. Такое возможно, только если мы редуцируем ситуацию до специальных связностей или “симплектических” эрмитовых троек, что существенно сужает класс лоренцевых метрик из $\mathcal{P}$.

Наконец, хотелось бы отметить, что пространство $\mathcal{P}$ само по себе обладает некоторой естественной почти симплектической структурой, которая определяется следующим образом. Касательное пространство к $\mathcal{P}$ в точке $(A, (g, v))$ имеет вид

$$\Omega_M^1(i\mathbb{R}) \oplus \Omega_M^2 \oplus \Omega_M^1,$$

где первое прямое слагаемое отвечает за деформацию абелевых связностей, а второе и третье отвечают за деформацию пары (g, v) на M (этот факт легко следует из леммы 2.1 работы [2] и определения многообразия Y). Тогда для пары касательных векторов $v_1, v_2 \in T\mathcal{P}$ таких, что

$$v_i = i \cdot \alpha_i + \beta_i + \gamma_i, \quad \alpha_i, \gamma_i \in \Omega_M^1, \quad \beta_i \in \Omega_M^2,$$

значение невырожденного кососимметрического спаривания дается формулой

$$\Omega_P(v_1, v_2) = \int_M \langle \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \rangle + \lambda \int_M (\gamma_1 - \gamma_2) \wedge \omega_v \in \mathbb{R},$$

где

$$\omega_v = *_g(g(v)) \in \Omega_M^2,$$

$*_g$ – оператор Ходжа, λ – некоторый вещественный параметр. Форма Ω_P , очевидно, невырожденна и положительна, поэтому задает почти симплектическую структуру. Если она окажется еще и замкнутой, то мы получим соответствующую пуассонову структуру на пространстве функций над специальными лоренцевыми метриками. Каково соотношение между этой пуассоновой структурой и получаемой посредством торических функций? Можно ли говорить об интегрируемости? Мы надеемся, что гипотезы, представленные выше в виде вопросов, окажутся верными (по меньшей мере, в специальных случаях) и будут представлены в последующих работах.

Благодарности. Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (грант № 03-01-00781), INTAS (грант № 00-00262) и HLP.

Список литературы

- [1] *Н. А. Тюрин.* Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 1. С. 198–224.
- [2] *Н. А. Тюрин.* Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 4. С. 1–20.
- [3] *T. Thiemann.* Introduction to modern canonical quantum general relativity. gr-qc/0110034.
- [4] *A. Ashtekar.* Quantum mechanics of geometry. gr-qc/9901023.
- [5] *S. Hawking, G. F. R. Ellis.* The Large Scale Structure of Space-time. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
- [6] *D. Fursaev.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 104. P. 33–62.
- [7] *A. Ashtekar, J. Lewandowski.* Representation theory of analytic holonomy C^* -algebras. In: Knots and Quantum Gravity. Ed. J. Baez. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994. P. 21–61.
- [8] *Н. А. Тюрин.* УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 83–138.