Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Р. Гилсон, Д. К. Ниммо, Пфаффианизация уравнений Дэви–Стюартсона,
ТМФ, 2001, том 128, номер 1, 43–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:29:49

ПФАФФИАНИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ДЭВИ–СТЮАРТСОНА

Билинейный метод теории солитонов используется для получения пфаффианового аналога уравнений Дэви–Стюартсона. Решения этой новой системы уравнений даются пфаффианами.

1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство солитонных уравнений можно записать в билинейной форме, при этом решения часто даются определителями со структурами вронскиана или граммиана [1]–[3]. Билинейная форма уравнений, как правило, возникает из тождеств между различными определителями, известных как соотношения Плюккера. Однако не все солитонные уравнения имеют решения в виде определителей – некоторые уравнения имеют решения в виде пфаффианов (см., например, [4]). Пфаффиан является, по существу, квадратным корнем из кососимметричного определителя, и его свойства тем самым связаны со свойствами определителей. Например, подобно определителям, они удовлетворяют билинейным тождествам. Однако простейшее билинейное тождество для пфаффиана содержит четыре члена, а не три, как в случае тождества для определителей. Использование структурного подобия между тождествами для пфаффианов и определителей позволяет получить новые интегрируемые системы. Для этого, начав с известного солитонного уравнения с решениями в виде определителей, мы заменим определитель пфаффианом некоторой подходящей структуры и построим новую солитонную систему, решениями которой будут эти пфаффианы. Мы называем эту процедуру *пфаффианизацией*; ее использовали Охта и Хирота [5], которые рассматривали иерархию Кадомцева–Петвиашвили (КП) и ее решения в виде определителей и породили иерархию связанных КП-уравнений и их решения в виде пфаффианов.

В данной работе мы применяем процесс пфаффианизации к уравнениям Дэви–Стюартсона I и к их решениям в виде граммианов, что дает систему уравнений, называемую нами *пфаффианизированными уравнениями Дэви–Стюартсона*. Решения этих систем в билинейной форме даются пфаффианами типа граммианов [5]. В разделе 2 мы напоминаем граммиановы решения уравнений Дэви–Стюартсона. В разделах 3 и 4 рассматриваются пфаффианы граммианового типа и исследуются билинейные уравнения, которым

*Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow, UK. E-mail: crg@maths.gla.ac.uk

удовлетворяют эти пфаффианы. В разделе 5 мы превращаем билинейные уравнения в нелинейные уравнения, напоминающие систему Дэви–Стюартсона, и кратко исследуем простой случай – однодромионное решение этой системы.

2. ГРАММИАНОВЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДЭВИ–СТЮАРТСОНА I

Начнем с краткого напоминания граммиановой формы решений уравнений Дэви–Стюартсона I (ДСI). Уравнения DSI для двух переменных u и v можно записать в виде

$$\begin{aligned} iu_t + (\partial_x^2 + \partial_y^2)u + vu &= 0, \\ \partial_{xy}v &= 2(\partial_x^2 + \partial_y^2)|u|^2. \end{aligned}$$

Вводя новые переменные F и G согласно

$$u = \frac{G}{F}, \quad v = 2(\partial_x^2 + \partial_y^2) \ln F,$$

можно записать уравнения в билинейной форме

$$(iD_t + D_x^2 + D_y^2)G \cdot F = 0, \quad D_x D_y F \cdot F = 2|G|^2, \quad (1)$$

где D обозначает обычную производную Хироты. Дромионные и солитонные решения можно записать в терминах определителей граммианов [6] как $F = |\mathcal{F}| = |I + H\Phi|$, где H – эрмитова матрица, $\Phi = [(M + N) \times (M + N)]$ -матрица с блочной структурой:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^x \varphi_i \bar{\varphi}_j dx & 0 \\ 0 & \int_y^\infty \psi_k \bar{\psi}_l dy \end{pmatrix},$$

φ_i – функции от x и t , а ψ_k – функции от y и t , $i, j = 1, \dots, M$, $k, l = 1, \dots, N$, и черта обозначает комплексное сопряжение. Функции φ_i и ψ_k являются произвольными решениями зависящих от времени уравнений Шредингера

$$\begin{aligned} i\varphi_t + \varphi_{xx} &= 0, \\ i\psi_t - \psi_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Иная, но по существу эквивалентная форма решения получается, если взять $F = |\mathcal{F}| = |C + \Phi|$, где C – эрмитова матрица, а матрица Φ определена выше. Функцию G из билинейных уравнений (1) можно выбрать в виде ограниченного определителя

$$G = \begin{vmatrix} \mathcal{F} & l \\ \overline{m}^T & 0 \end{vmatrix},$$

где $l = (\varphi_1, \dots, \varphi_M; 0, \dots, 0)^T$ и $m = (0, \dots, 0; \psi_1, \dots, \psi_N)^T$ – векторы-столбцы.

Производные от F , как и производные от G , дают ограниченные определители, например

$$F_x = - \begin{vmatrix} \mathcal{F} & l \\ l^T & 0 \end{vmatrix}, \quad F_y = \begin{vmatrix} \mathcal{F} & m \\ \overline{m}^T & 0 \end{vmatrix}$$

и

$$G_x = \begin{vmatrix} \mathcal{F} & l_x \\ \overline{m}^T & 0 \end{vmatrix}, \quad G_y = \begin{vmatrix} \mathcal{F} & l \\ \overline{m}_y^T & 0 \end{vmatrix}.$$

Для этих определителей существуют билинейные тождества, известные как соотношения Плюккера. В граммиановом случае они получаются из тождества Якоби. Простейшее такое тождество имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mathcal{F} & m & l \\ \overline{m} & 0 & 0 \\ \overline{l} & 0 & 0 \end{vmatrix} |\mathcal{F}| - \begin{vmatrix} \mathcal{F} & l \\ \overline{l}^T & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{F} & m \\ \overline{m}^T & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathcal{F} & m \\ \overline{l}^T & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathcal{F} & l \\ \overline{m}^T & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Оно в действительности является вторым билинейным уравнением в (1).

3. ПФАФФИАНЫ ГРАММИАНОВА ТИПА

В предыдущем разделе мы кратко напомнили один вид решений уравнений ДСИ. Теперь мы рассмотрим пфаффианы общего вида и так называемые пфаффианы граммианова типа. Это пфаффианы, элементы которых напоминают элементы граммиана; их свойства при этом напоминают свойства граммианов.

Рассмотрим треугольный массив величин $A = (a_{ij})$, где $1 \leq i < j \leq n$. Пфаффиан массива A , $\text{pf } A$, определяется следующим образом. При четных n

$$\text{pf } A = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \cdot a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4} \cdots a_{i_{n-1} i_n}, \quad (2)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

удовлетворяющим $i_1 < i_2, i_3 < i_4, \dots, i_{n-1} < i_n$ и $i_1 < i_3 < \cdots < i_{n-1}$, а $\text{sgn } \sigma = \pm 1$ обозначает четность перестановки σ . Например, имеем $\text{pf } A = a_{12}$ при $n = 2$ и

$$\text{pf } A = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ & a_{23} & a_{24} \\ & & a_{34} \end{vmatrix} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$$

при $n = 4$. Здесь a_{ij} выбирается кососимметрической, $a_{ji} = -a_{ij}$.

Можно использовать более компактные обозначения. Рассмотрим множество индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и кососимметрическое спаривание $(\cdot, \cdot)$; тогда, если m четно,

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) := \begin{vmatrix} (\alpha_1, \alpha_2) & (\alpha_1, \alpha_3) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ & (\alpha_2, \alpha_3) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & (\alpha_{m-1}, \alpha_m) \end{vmatrix}.$$

Например, можно записать $\text{pf } A = (1, 2, \dots, n)$, где $(i, j) := a_{ij}$. Из определения пфаффиана (2) ясно, что перемена индексов α_i и α_j изменяет четность перестановки σ в сумме. Поэтому при $1 \leq i \leq j \leq m$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_m) = -(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_m),$$

т.е. для любого m выражение $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ кососимметрично и поэтому равно нулю, если два индекса равны между собой. Обозначения с использованием индексов полезны, в частности, при определении пфаффианов треугольных массивов, имеющих блочную структуру. Например, пфаффиан

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ & & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ & & & b_{12} & b_{13} \\ & & & & b_{23} \end{vmatrix}$$

можно записать как $(1, 2, 3, 1', 2', 3')$, где $(i, j) := a_{ij}$, $(i', j') := b_{ij}$ и $(i, j') := c_{ij}$.

Для того чтобы воспроизвести двухкомпонентную структуру граммиана Дэви–Стюартсона, рассмотрим двухкомпонентные пфаффианы. Это пфаффианы с двумя наборами индексов $(0, 1, 2, 3, \dots, M)$ и $(0', 1', 2', \dots, N')$, где элементы имеют вид

$$\begin{aligned} (i, j) &= C_{i,j} + \int^x (f_i g_j - g_i f_j) dx = C_{i,j} + \Phi_{i,j}, \\ (i', j') &= C_{i',j'} + \int^y (f'_i g'_j - g'_i f'_j) dy = C_{i',j'} + \Psi_{i',j'}, \\ (i, j') &= C_{i,j'}, \end{aligned}$$

а $C_{i,j}$, $C_{i,j'}$ и $C_{i',j'}$ – константы. Функции f , g , f' и g' удовлетворяют линейным уравнениям

$$\begin{aligned} i f_t + f_{xx} &= 0, & i g_t - g_{xx} &= 0, \\ i f'_t - f'_{yy} &= 0, & i g'_t + g'_{yy} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Кроме пфаффианов с этими индексами, нам также потребуются ограниченные пфаффианы, элементы которых имеют индексы $(\alpha_n, \beta_n, \alpha'_n, \beta'_n)$. Эти элементы равны

$$(i, \alpha_n) = \frac{\partial^n f_i}{\partial x^n}, \quad (i, \beta_n) = \frac{\partial^n g_i}{\partial x^n}, \quad (i, \alpha'_n) = \frac{\partial^n f'_i}{\partial y^n}, \quad (i, \beta'_n) = \frac{\partial^n g'_i}{\partial y^n}$$

и

$$\begin{aligned} (\alpha_m, \beta_n) &= (\alpha_m, \alpha_n) = (\beta_m, \beta_n) = 0, \\ (\alpha'_m, \beta'_n) &= (\alpha'_m, \alpha'_n) = (\beta'_m, \beta'_n) = 0, \\ (i', \alpha_n) &= (i', \beta_n) = (i, \alpha'_n) = (i, \beta'_n) = 0. \end{aligned}$$

Дифференцирование элемента пфаффиана, вообще говоря, дает ограниченный пфаффиан:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(i, j) &= f_i g_j - g_i f_j = -(i, j, \alpha_0, \beta_0), \\ \frac{\partial}{\partial y}(i', j') &= f'_i g'_j - g'_i f'_j = -(i', j', \alpha'_0, \beta'_0),\end{aligned}$$

однако

$$\frac{\partial}{\partial x}(i, j') = \frac{\partial}{\partial y}(i, j') = \frac{\partial}{\partial x}(i', j') = \frac{\partial}{\partial y}(i', j') = 0.$$

Исходя из этих уравнений можно показать, что дифференцирование пфаффиана дает ограниченный пфаффиан. Пусть

$$F = (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N'), \quad M + N \text{ чётно.}$$

Тогда можно показать, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F &= -(0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \alpha_0, \beta_0), \\ \frac{\partial}{\partial y}F &= -(0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \alpha'_0, \beta'_0)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F &= -(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta_1) - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_1, \beta_0), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}F &= -(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \beta'_1) - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_1, \beta'_0), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F &= (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \alpha_0, \beta_0, \alpha'_0, \beta'_0).\end{aligned}$$

t -Производную элемента массива в пфаффиане можно получить, используя линейные уравнения (3):

$$\begin{aligned}\partial_t(i, j) &= \int (f_{it}g_j - g_i f_{jt} + f_i g_{jt} - g_{it}f_j) dx = \\ &= i \int (f_{ixx}g_j - g_i f_{jxx} - f_i g_{jxx} + g_{ixx}f_j) dx = \\ &= i[f_{ix}g_j - g_i f_{jx} - f_i g_{jx} + g_{ix}f_j] = -i[(i, j, \alpha_1, \beta_0) - (i, j, \alpha_0, \beta_1)].\end{aligned}$$

Аналогичное вычисление для (i', j') дает

$$\partial_t(i', j') = i[(i', j', \alpha'_1, \beta'_0) - (i', j', \alpha'_0, \beta'_1)],$$

а также $\partial_t(i, j') = 0$. Поэтому можно показать, что t -производная пфаффиана F равна

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F &= i[(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta_1) - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_1, \beta_0) - \\ &\quad - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \beta'_1) + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_1, \beta'_0)].\end{aligned}$$

4. БИЛИНЕЙНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ПФАФФИАНОВ

Имеются квадратичные тождества для пфаффианов, подобные тождеству Якоби для определителей. Простейшее такое тождество имеет вид

$$\begin{aligned} & (p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha, \beta, \gamma, \delta)(p_1, p_2, \dots, p_n) - \\ & - (p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha, \beta)(p_1, p_2, \dots, p_n, \gamma, \delta) + \\ & + (p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha, \gamma)(p_1, p_2, \dots, p_n, \beta, \delta) - \\ & - (p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha, \delta)(p_1, p_2, \dots, p_n, \beta, \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что это тождество включает четыре члена, а не три, как в простейшем тождестве Якоби для определителей.

Теперь мы можем перейти к рассмотрению пфаффианизации уравнений Дэви–Стюарта. На этом примере нам предстоит исследовать соотношения Плюккера пфаффианов типа и преобразовать их в систему билинейных уравнений, связывающих пфаффианы и их производные. Мы будем строить уравнения, начиная с простого тождества и вводя новые поля по мере необходимости.

Рассмотрим поля

$$\begin{aligned} F &= (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N'), \\ G &= (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0), \\ \tilde{G} &= (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \beta_0, \alpha'_0), \\ H &= (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_0), \\ \tilde{H} &= (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \beta_0, \beta'_0). \end{aligned}$$

Здесь F и G аналогичны соответствующим F и G для случая граммиана. Тождество

$$\begin{aligned} & (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta_0, \alpha'_0, \beta'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N') - \\ & - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \beta'_0) + \\ & + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta_0, \beta'_0) - \\ & - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta_0, \alpha'_0) = 0 \end{aligned}$$

приводит к билинейному уравнению

$$\frac{1}{2} D_{xy} F \cdot F - G\tilde{G} + H\tilde{H} = 0. \quad (5)$$

В приложении показано, как наложить условия на поля таким образом, чтобы превратить $\tilde{G}$ и $\tilde{H}$ в комплексно-сопряженные G и H , соответственно. Эти условия обеспечивают также вещественность F .

Как и в случае с F , можно вычислить производные G и H через ограниченные пфаффианы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}G &= (0, 1, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \alpha_1, \beta'_0), \\ \frac{\partial}{\partial y}G &= (0, 1, 2, \dots, M, 0', 1', \dots, N', \alpha_0, \beta'_1), \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}G &= (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_2, \beta'_0) + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta'_0), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}G &= (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \beta'_2) - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_0, \beta'_0, \beta'_1).\end{aligned}$$

Нам понадобится также t -производная от G , которая имеет вид

$$\begin{aligned}\partial_t G &= i[(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0, \alpha_0, \beta_1) - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0, \alpha_1, \beta_0) - \\ &\quad - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0, \alpha'_0, \beta'_1) + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0, \alpha'_1, \beta'_0) + \\ &\quad + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_2, \beta'_0) + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_2)] = \\ &= i[-(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta'_0) + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_0, \beta'_0, \beta'_1) + \\ &\quad + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_2, \beta'_0) + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_2)].\end{aligned}$$

Комбинируя два следующих соотношения Плюккера:

$$\begin{aligned}(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N') - \\ - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha_1)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta_0, \beta'_0) + \\ + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_1, \beta'_0) - \\ - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_1, \beta_0) = 0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_0, \beta'_0, \beta'_1)(0, \dots, M, 0', \dots, N') - \\ - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta'_0, \beta'_1) + \\ + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \beta'_1) - \\ - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta'_1)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \beta'_0) = 0,\end{aligned}$$

приходим ко второму билинейному уравнению

$$[i D_t + D_x^2 + D_y^2]G \cdot F = 2(J\tilde{H} - LH), \quad (6)$$

где введены два новых поля

$$J = (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha_1), \quad L = (0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta'_0, \beta'_1).$$

Используя два тождества, подобные выписанным выше, и дополнительно вводя два поля

$$\tilde{J} = -(0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta_0, \beta_1), \quad \tilde{L} = -(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \alpha'_1),$$

можно вывести билинейное уравнение

$$[-i D_t + D_x^2 + D_y^2] \tilde{G} \cdot F = 2(\tilde{J}H - \tilde{L}\tilde{H}). \quad (7)$$

Введенные поля удовлетворяют и другим квадратичным соотношениям, некоторые из которых дают тождества первого порядка. Например, соотношение Плюккера

$$\begin{aligned} & (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta_0, \alpha'_0, \alpha'_1)(0, \dots, M, 0', \dots, N') - \\ & - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \beta_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha'_0, \alpha'_1) + \\ & + (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_0)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta_0, \alpha'_1) - \\ & - (0, \dots, M, 0', \dots, N', \alpha_0, \alpha'_1)(0, \dots, M, 0', \dots, N', \beta_0, \alpha'_0) = 0 \end{aligned}$$

дает тождество первого порядка

$$D_x F \cdot \tilde{L} = D_y \tilde{G} \cdot H. \quad (8)$$

Подобные же соотношения Плюккера дают еще три уравнения первого порядка:

$$D_x F \cdot L = D_y G \cdot \tilde{H}, \quad (9)$$

$$D_y F \cdot \tilde{J} = -D_x \tilde{G} \cdot \tilde{H}, \quad (10)$$

$$D_y F \cdot J = -D_x G \cdot H. \quad (11)$$

Имеются еще два включающих эти же поля уравнения второго порядка, которые выводятся из четырех других соотношений Плюккера вида (4):

$$[i D_t - D_x^2 + D_y^2] \tilde{H} \cdot F = -2(\tilde{J}G + \tilde{G}L), \quad (12)$$

$$[-i D_t - D_x^2 + D_y^2] H \cdot F = -2(J\tilde{G} + G\tilde{L}). \quad (13)$$

Девять уравнений (5)–(13) на девять неизвестных составляют билинейную форму пфаф-фианизированной системы Дэви–Стюартсона.

5. УРАВНЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ФОРМЕ

Для того чтобы связать $\tilde{G}$, $\tilde{H}$, $\tilde{J}$ и $\tilde{L}$ с комплексно-сопряженными величинами G , H , J и L , наложим некоторые условия на функции f , g , f' и g' и на постоянные $C_{i,j}$, $C_{i,j'}$ и $C_{i',j'}$ (см. приложение). Один из возможных наборов условий имеет вид

$$\begin{aligned} g_i &= \bar{f}_{M-i}, & g'_i &= \bar{f}'_{N-i}, \\ C_{i,j} &= -\bar{C}_{M-i, M-j}, & C_{i,j'} &= \bar{C}_{M-i, N-j'}, & C_{i',j'} &= -\bar{C}_{N-i', N-j'}. \end{aligned}$$

Используя эти условия, получаем отождествления

$$\tilde{G} = \bar{G}, \quad \tilde{H} = \bar{H}, \quad \tilde{J} = \bar{J}, \quad \tilde{L} = \bar{L}.$$

Определяя новые переменные

$$U = \frac{G}{F}, \quad \bar{U} = \frac{\tilde{G}}{F}, \quad W = 2 \ln F, \quad R = \frac{H}{F}, \quad \bar{R} = \frac{\tilde{H}}{F}$$

Рис. 1. Вещественная часть U .

и

$$P = \frac{J}{F}, \quad \bar{P} = \frac{\tilde{J}}{F}, \quad Q = \frac{L}{F}, \quad \bar{Q} = \frac{\tilde{L}}{F},$$

запишем нашу систему в виде

$$\begin{aligned} i U_t + U_{xx} + U_{yy} + U[+W_{xx} + W_{yy}] &= 2(P\bar{R} - QR), \\ -i R_t - R_{xx} + R_{yy} + R[-W_{xx} + W_{yy}] &= -2(\bar{U}P + U\bar{Q}), \\ W_{xy} &= 2U\bar{U} - 2R\bar{R}, \\ Q_x &= \bar{R}_y U - \bar{R}U_y, \\ P_y &= U_x R - UR_x. \end{aligned}$$

Случай $N = M = 1$. Исследуем подробно случай, когда $N = M = 1$. Он отвечает однодромионному решению системы. Имеем

$$\begin{aligned} F &= (0, 1, 0', 1'), \\ G &= (0, 1, 0', 1', \alpha_0, \beta'_0), \quad \bar{G} = (0, 1, 0', 1', \beta_0, \alpha'_0) = \tilde{G}, \\ H &= (0, 1, 0', 1', \alpha_0, \alpha'_0), \quad \bar{H} = (0, 1, 0', 1', \beta_0, \beta'_0) = \tilde{H}, \\ J &= (0, 1, 0', 1', \alpha_0, \alpha_1), \quad \bar{J} = -(0, 1, 0', 1', \beta_0, \beta_1) = \tilde{J}, \\ L &= (0, 1, 0', 1', \beta'_0, \beta'_1), \quad \bar{L} = -(0, 1, 0', 1', \alpha'_0, \alpha'_1) = \tilde{L}. \end{aligned}$$

Взяв в этом случае экспоненциальные решения уравнений (3), имеем

$$\begin{aligned} f_i &= e^{p_i x + i p_i^2 t}, & g_0 &= \bar{f}_1, & g_1 &= \bar{f}_0, \\ f'_i &= e^{q_i y - i q_i^2 t}, & g'_0 &= \bar{f}'_1, & g'_1 &= \bar{f}'_0. \end{aligned}$$

Рис. 2. Вещественная часть R . Рис. 3. Вещественная часть Q .

Поэтому F принимает вид

$$\begin{aligned}
 F = & \left(C_{0,1} + \frac{e^{2(\operatorname{Re} p_0)[x-2(\operatorname{Im} p_0)t]}}{2 \operatorname{Re} p_0} - \frac{e^{2(\operatorname{Re} p_1)[x-2(\operatorname{Im} p_1)t]}}{2 \operatorname{Re} p_1} \right) \times \\
 & \times \left(C_{0',1'} + \frac{e^{2(\operatorname{Re} q_0)[y+2(\operatorname{Im} q_0)t]}}{2 \operatorname{Re} q_0} - \frac{e^{2(\operatorname{Re} q_1)[y+2(\operatorname{Im} q_1)t]}}{2 \operatorname{Re} q_1} \right) - \\
 & - (C_{0,0'} \bar{C}_{0,0'} - C_{0,1'} \bar{C}_{0,1'}).
 \end{aligned}$$

Рис. 4. Вещественная часть P . Рис. 5. Вещественная часть функции $W_{xx} + W_{yy}$.

Чтобы обеспечить отсутствие сингулярностей в нашем решении, надо наложить дополнительные условия на постоянную C и на значения p_0 , p_1 , q_0 и q_1 . В рассматриваемом случае можно взять

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} p_0 &> 0, & \operatorname{Re} p_1 &< 0, & \operatorname{Im} p_0 &= \operatorname{Im} p_1, \\ \operatorname{Re} q_0 &> 0, & \operatorname{Re} q_1 &< 0, & \operatorname{Im} q_0 &= \operatorname{Im} q_1, \\ C_{0,1} &> 0, & C_{0',1'} &> 0, & |C_{0,0'}| &< |C_{0,1'}|. \end{aligned}$$

В общем случае мультидромионных или солитонных решений соответствующее условие

является более сложным. Оно подробно исследовано в работе [7].

Поля U и R образуют “горбы”, а поля Q и P – линейные солитоны. Поле W является неограниченным, но производные от W образуют линейные солитоны. На рис. 1–5 выбрано $t = 0$ и

$$p_0 = 1 + 0.5i, \quad p_1 = -1 + 0.5i, \quad q_0 = 0.5 + i, \quad q_1 = -0.5 + i.$$

Например, скорость “горбов” в поле U равна $(\text{Im } p_0, -\text{Im } q_0)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали класс пфаффианов и тождества, которым они удовлетворяют. Это привело нас к новой системе – пфаффианованной системе Дэви–Стюартсона. Эта система содержит большее число полей, чем уравнения Дэви–Стюартсона I. В действительности систему Дэви–Стюартсона I можно рассматривать как редукцию этой большей системы. Мы выписали мультидромионные решения и исследовали более подробно однодромионный случай. Расширенный вариант данной статьи, включающий подробности асимптотического анализа, будет опубликован отдельно [7].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вещественность. Чтобы обеспечить вещественность функции F , следует наложить определенные условия на функции f , g , f' и g' , а также на постоянные $C_{i,j}$. Условие на постоянные соответствует условию эрмитовости H в граммиановой формулировке уравнений Дэви–Стюартсона [6]. В данном случае, в пфаффианованной форме, один из способов обеспечения вещественности состоит в том, чтобы положить $g_i = \bar{f}_{M-i}$ и $g'_i = \bar{f}'_{M-i}$, а также $\bar{C}_{M-i,M-j} = -C_{i,j}$, $\bar{C}_{N-i',N-j'} = -C_{i',j'}$ и $\bar{C}_{M-i,N-j'} = C_{i,j'}$. Это можно показать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j} &= \int^x (f_i g_j - g_i f_j) dx = \int^x (f_i \bar{f}_{M-j} - \bar{f}_{M-i} f_j) dx, \\ \Phi_{M-i,M-j} &= \int^x (f_{M-i} g_{M-j} - g_{M-i} f_{M-j}) dx = \\ &= \int^x (f_{M-i} \bar{f}_j - \bar{f}_i f_{M-j}) dx = -\bar{\Phi}_{i,j}, \\ \Psi_{i',j'} &= \int^y (f'_{i'} g'_{j'} - g'_{i'} f'_{j'}) dy = \int^y (f'_i \bar{f}'_{N-j} - \bar{f}'_{N-i} f'_j) dy, \\ \Psi_{N-i',N-j'} &= \int^y (f'_{N-i'} g'_{N-j'} - g'_{N-i'} f'_{N-j'}) dy = \\ &= \int^y (f'_{N-i} \bar{f}'_j - \bar{f}'_i f'_{N-j}) dy = -\bar{\Psi}_{i',j'}. \end{aligned}$$

Теперь можно применить выписанные выше условия к комплексному сопряжению функции F :

$$\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{C}_{i,j} + \bar{\Phi}_{i,j} & \bar{C}_{i,j'} \\ \bar{C}_{i',j'} + \bar{\Psi}_{i',j'} & \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -C_{M-i, M-j} - \Phi_{M-i, M-j} & C_{M-i, N-j'} \\ & -C_{N-i', N-j'} - \Psi_{N-i', N-j'} \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} C_{i, j} + \Phi_{i, j} & C_{i, j'} \\ C_{i', j'} + \Psi_{i', j'} \end{vmatrix} = F.
\end{aligned}$$

Комплексные сопряжения. Следует изучить также комплексные сопряжения. Взяв комплексное сопряжение от величины

$$G = (0, 1, \dots, N, 0', 1', \dots, N', \alpha_0, \beta'_0) = \begin{vmatrix} C_{i, j} + \Phi_{i, j} & C_{i, j'} & f_i & \underline{0} \\ & C_{i', j'} + \Psi_{i', j'} & \underline{0} & g'_i \\ & & & 0 \end{vmatrix},$$

получаем

$$\begin{aligned}
\bar{G} &= \begin{vmatrix} \overline{C_{i, j} + \Phi_{i, j}} & \overline{C_{i, j'}} & \bar{f}_i & \underline{0} \\ & \overline{C_{i', j'} + \Psi_{i', j'}} & \underline{0} & \bar{g}'_i \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -C_{M-i, M-j} - \Phi_{M-i, M-j} & C_{M-i, N-j'} & g_{M-i} & \underline{0} \\ & -C_{N-i', N-j'} - \Psi_{N-i', N-j'} & \underline{0} & f'_{N-i} \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} C_{i, j} + \Phi_{i, j} & C_{i, j'} & g_i & \underline{0} \\ & C_{i', j'} + \Psi_{i', j'} & \underline{0} & f'_i \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \tilde{G}.
\end{aligned}$$

Для H , J и L аналогично получаем

$$\begin{aligned}
\bar{H} &= \begin{vmatrix} C_{i, j} + \Phi_{i, j} & C_{i, j'} & g_i & \underline{0} \\ & C_{i', j'} + \Psi_{i', j'} & \underline{0} & g'_i \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \tilde{H}, \\
\bar{J} &= - \begin{vmatrix} C_{i, j} + \Phi_{i, j} & C_{i, j'} & g_i & \frac{\partial g_i}{\partial x} \\ & C_{i', j'} + \Psi_{i', j'} & \underline{0} & \underline{0} \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \tilde{J}, \\
\bar{L} &= - \begin{vmatrix} C_{i, j} + \Phi_{i, j} & C_{i, j'} & \underline{0} & \underline{0} \\ & C_{i', j'} + \Psi_{i', j'} & g'_i & \frac{\partial g'_i}{\partial y} \\ & & & 0 \end{vmatrix} = \tilde{L}.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *J. Satsuma.* J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 46. P. 30.
- [2] *N. C. Freeman, J. J. C. Nimmo.* Phys. Lett. A. 1983. V. 95. P. 1.
- [3] *A. Nakamura.* J. Phys. Soc. Japan. 1989. V. 58. P. 412.
- [4] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1989. V. 58. P. 2285.
- [5] *R. Hirota, Y. Ohta.* J. Phys. Soc. Japan. 1991. V. 60. P. 798.
- [6] *C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo.* Proc. R. Soc. London. A. 1991. V. 435. P. 339.
- [7] *C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, A.-L. Mason, M. Shenken.* The Davey-Stewartson equations and their extension to a Pfaffian system (in preparation).