Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Йонссон, Диффузия петель, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 1, 56–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:40:47

© 2001 г.

Т. Йонссон*

ДИФФУЗИЯ ПЕТЕЛЬ

Изучается решеточная модель, описывающая диффузию петель в двумерном пространстве; модель тесно связана с моделью Изинга. Эволюция во времени задается трансфер-матрицей модели случайных поверхностей на трехмерной решетке. Индексы трансфер-матрицы принимают значения в пространстве петель, а сама матрица инвариантна относительно группы движений этого пространства. Собственные значения трансфер-матрицы выражаются через статсумму и корреляционные функции модели Изинга.

1. ВВЕДЕНИЕ

Существует тесная связь между диффузией частиц, описываемой, например, уравнением теплопроводности, и квантовой механикой точечных частиц. Аналогично проблема квантования протяженных объектов типа струн может рассматриваться как проблема подходящим образом определенной диффузии в пространстве петель. Временная история точечной частицы есть случайный путь; точно так же временная история струны может рассматриваться как случайная поверхность. Этот подход к квантованию протяженных объектов и аналогия с теорией случайных путей подробно описаны в книге [1].

В данной работе рассматривается решеточная модель, описывающая диффузию петель в двумерном пространстве. Модель оказывается точно решаемой в том смысле, что решения уравнения эволюции в дискретном времени могут быть описаны в терминах корреляционных функций двумерной модели Изинга. Каждая петлевая конфигурация может рассматриваться как временное сечение некоторой поверхности, погруженной в трехмерную решетку; тем самым модель доставляет одновременно пример точно решаемой трехмерной статистической механической модели. Эта модель была первоначально предложена в статье [2] и изучалась затем в работах [3] и [4]. Более подробные обоснования и ссылки можно найти в этих работах.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 определяется сама решеточная модель и вводится ядро уравнения теплопроводности для петель на решетке. Затем

*The Niels Bohr Institute and NORDITA, Copenhagen, Denmark; University of Iceland, Reykjavik, Iceland. E-mail: thjons@raunvis.hi.is

определяется спектр соответствующей трансфер-матрицы и показывается, каким образом он позволяет определить эволюцию во времени. Последний раздел содержит комментарий относительно связи между рассматриваемой моделью и моделью случайных поверхностей.

2. ЯДРО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПЕТЕЛЬ

Пусть T_2 – подрешетка в $\mathbb{Z}^2$ размером $M \times M$ с периодическими граничными условиями. Некоторый набор P звеньев в T_2 называется *петлей*, если каждый узел в P принадлежит четному числу звеньев из P . Обозначим через Π множество всех петель. Заметим, что петли из Π совпадают с границами фаз, которые возникают в двумерной модели Изинга для спинов, находящихся в узлах решетки, дуальной к T_2 .

Обозначим через $|P|$ число звеньев в $P \in \Pi$. Заметим, что если $P_1, P_2 \in \Pi$, то симметричная разность

$$(P_1 \cup P_2) \setminus (P_1 \cap P_2) \equiv P_1 \triangle P_2 \in \Pi,$$

т.е. снова является петлей в Π . Легко проверить, что

$$|P_1 \triangle P_2| = |P_1| + |P_2| - 2|P_1 \cap P_2|,$$

а $d(P_1, P_2) = |P_1 \triangle P_2|$ есть метрика на множестве Π .

Определим симметричную матрицу, индексы которой принимают значения в пространстве петель Π :

$$K_\beta(P_1, P_2) = e^{-2\beta(|P_1 \triangle P_2| - M^2)}, \quad (1)$$

дополнительное слагаемое с M^2 в показателе экспоненты введено для удобства в дальнейшем. Эта матрица рассматривается как дискретное ядро уравнения теплопроводности, описывающего диффузию петель на решетке. Назовем K_β *трансфер-матрицей*. Уравнение диффузии, которое мы будем решать, имеет вид

$$\rho_{t+1}(P) = \sum_Q K_\beta(P, Q) \rho_t(Q). \quad (2)$$

Отметим математическую аналогию выражения (1) с функцией перехода $e^{-\beta|x-y|}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, для случайных блужданий в пространстве $\mathbb{R}^d$. Именно эта аналогия позволяет считать, что трансфер-матрица K_β описывает диффузию петель.

3. СПЕКТР

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство всех вещественнозначных функций на Π . В этом разделе мы решим задачу на собственные значения

$$\sum_{Q \in \Pi} K_\beta(P, Q) \psi_i(Q) = \Lambda_i(\beta) \psi_i(P), \quad \psi_i \in \mathcal{H}.$$

Мы покажем, что от β зависят только собственные значения, но не собственные функции. Все собственные значения можно выразить через статсумму, внутреннюю энергию и спиновые корреляционные функции двумерной модели Изинга. Собственные функции найдены в явном виде; их можно нормировать таким образом, что они принимают значения 1 и -1 .

Прежде всего, заметим, что

$$\sum_Q K_\beta(P, Q) = \sum_Q e^{-2\beta(|Q| - M^2)} = \Lambda_0(\beta), \quad (3)$$

где на первом шаге сделан сдвиг переменной суммирования от Q к $P \triangle Q$ (допустимый, поскольку отображение $P \mapsto P \triangle Q$ биективно), а $\Lambda_0(\beta)$ — статсумма двумерной модели Изинга на периодической решетке $M \times M$.

Из формулы (3) следует, что функция, являющаяся константой, есть собственная функция матрицы K_β , а $\Lambda_0(\beta)$ — соответствующее собственное значение. Так как все матричные элементы матрицы K_β положительны и все компоненты собственного вектора, отвечающего Λ_0 , одного знака, то из теоремы Перрона–Фробениуса следует, что Λ_0 является простым и наибольшим собственным значением матрицы K_β . Это позволяет сделать вывод [3], что удельная свободная энергия на один узел в настоящей модели совпадает с удельной свободной энергией в двумерной модели Изинга. Однако корреляции в двух моделях различны, и мы перейдем к вычислению следующего собственного значения матрицы K_β .

Введем обозначение

$$\langle P|Q \rangle \equiv 2M^2 - 2|P \triangle Q|,$$

соответственно $K_\beta(P, Q) = e^{\beta \langle P|Q \rangle}$. Удобно рассматривать $\langle P|Q \rangle$ как “внутреннее произведение” петель P и Q , хотя множество петель, разумеется, не является линейным пространством. Назовем $\langle P|Q \rangle$ *инвариантным произведением* на множестве Π . Эта терминология поясняется ниже.

Пусть P — петля; обозначим через $\bar{P}$ ее дополнение, т.е. петлю, которая состоит из тех звеньев T_2 , которые не содержатся в P . Обозначим через 0 пустую петлю, а через U петлю, которая содержит все звенья решетки; тогда $\bar{0} = U$ и $\bar{\bar{P}} = P \triangle U$. Инвариантное произведение явно симметрично по своим аргументам и обладает следующими свойствами:

$$\langle P|P \rangle = 2M^2, \quad \langle P|0 \rangle = 2M^2 - 2|P|, \quad \langle P|\bar{Q} \rangle = -\langle P|Q \rangle.$$

Теперь легко построить конечномерное пространство всех петель с внутренним произведением, взяв в качестве последнего инвариантное произведение; при этом петли лежат на сфере радиуса $\sqrt{2}M$.

Инвариантное произведение инвариантно относительно неабелевой группы $\mathcal{G}$ движений пространства петель, порождаемой следующими операциями:

а) трансляциями петель

$$T_a: P \mapsto P + a, \quad a \in T_2;$$

б) “обобщенными антиподальными отображениями”

$$A_Q: P \mapsto P \triangle Q, \quad Q \in \Pi;$$

в) отражениями и вращениями в T_2 .

Эта группа неабелева, так как трансляции, вообще говоря, не коммутируют с антиподальными отображениями. Инвариантность означает, что $\langle gP | gQ \rangle = \langle P | Q \rangle$ для любого $g \in \mathcal{G}$. Как объяснялось выше, множество петель можно считать сферой, при этом пустую петлю можно считать северным полюсом, а полную петлю U – южным полюсом. Размер петли возрастает с севера на юг. В этой картине отображение $P \mapsto \bar{P}$ есть обычное антиподальное отображение и все отображения A_Q обладают свойством $A_Q^2 = I$, где I – тождественное отображение.

Действие группы $\mathcal{G}$ на функциях из $\mathcal{H}$ определяется естественным образом:

$$g\psi(P) = \psi(g^{-1}P).$$

Пусть O_n – линейный оператор в $\mathcal{H}$ с матричными элементами

$$O_n(P, Q) = \langle P | Q \rangle^n.$$

Тогда оператор O_n инвариантен относительно действия группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{H}$, т.е.

$$gO_ng^{-1} = O_n,$$

и все операторы O_n взаимно коммутативны. Чтобы доказать коммутативность, обозначим через $(O_n O_m)(P, Q)$ матричные элементы оператора $O_n O_m$. Используя свойства инвариантного произведения, последовательно имеем

$$\begin{aligned} (O_n O_m)(P, Q) &= \sum_{Q'} \langle P | Q' \rangle^n \langle Q' | Q \rangle^m = \sum_{Q'} \langle 0 | Q' \triangle Q \rangle^m \langle Q' \triangle P | 0 \rangle^n = \\ &= \sum_{Q'} \langle P | Q' \triangle Q \triangle P \rangle^m \langle Q' \triangle P \triangle Q | Q \rangle^n = (O_m O_n)(P, Q). \end{aligned}$$

Так как операторы O_n симметричны, они имеют общие собственные векторы; то же самое относится и к трансфер-матрице

$$K_\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} O_n.$$

Это доказывает, что собственные векторы матрицы K_β не зависят от β .

В силу инвариантности трансфер-матрицы относительно группы $\mathcal{G}$ естественно искать собственные векторы, зависящие от P только через скалярные произведения. Определим

$$\psi_Q(P) = \langle P | Q \rangle.$$

Утверждается, что

$$K_\beta \psi_Q = \Lambda_1(\beta) \psi_Q \quad (4)$$

для любого $Q \in \Pi$, где

$$\Lambda_1(\beta) = \frac{1}{2M^2} \sum_P e^{\beta \langle P|0 \rangle} \langle P|0 \rangle, \quad (5)$$

и, следовательно, отношение $\Lambda_1 \Lambda_0^{-1}$ собственных значений есть удельная отрицательная внутренняя энергия на одно звено в модели Изинга на T_2 [3].

Для доказательства формул (4) и (5) введем на Π функцию η_ℓ , где ℓ – звено решетки T_2 , определяемую следующим образом:

$$\eta_\ell(P) = \begin{cases} -1, & \ell \in P, \\ 1, & \ell \notin P. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\langle P|Q \rangle = \sum_\ell \eta_\ell(P \triangle Q), \quad (6)$$

где суммирование идет по всем звеньям решетки T_2 . Далее, если $\ell \notin Q$, то $\ell \in P \triangle Q$ тогда и только тогда, когда $\ell \in P$. Аналогично, если $\ell \in Q$, то $\ell \in P \triangle Q$ тогда и только тогда, когда $\ell \notin P$. Но это означает, что

$$\eta_\ell(P \triangle Q) = \eta_\ell(P) \eta_\ell(Q).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_P e^{\beta \langle 0|P \rangle} \eta_\ell(P \triangle Q) = \sum_P e^{\beta \langle 0|P \rangle} \eta_\ell(P) \eta_\ell(Q) = \frac{1}{2M^2} \sum_P e^{\beta \langle 0|P \rangle} \langle 0|P \rangle \eta_\ell(Q).$$

Последнее равенство следует из наблюдения, что сумма

$$\sum_P e^{\beta \langle 0|P \rangle} \eta_\ell(P)$$

не зависит от ℓ в силу равенства (6) и трансляционной и вращательной инвариантности инвариантного произведения. Для доказательства равенств (4) и (5) достаточно убедиться, что

$$\sum_P K_\beta(P', P) \langle P|Q \rangle = \Lambda_1 \langle P'|Q \rangle$$

только для $P' = 0$ в силу инвариантности матрицы K_β относительно группы $\mathcal{G}$.

Вышеприведенная конструкция допускает прямое обобщение на все собственные функции и собственные значения матрицы K_β . Пусть $\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$ – набор звеньев в Π ; определим функцию

$$E_{\mathcal{L}}(P) = \prod_{i=1}^n \eta_{\ell_i}(P).$$

Это собственная функция матрицы K_β с собственным значением

$$\Lambda_n(\ell_1, \dots, \ell_n) = \sum_P e^{\beta \langle 0|P \rangle} \prod_{i=1}^n \eta_{\ell_i}(P),$$

которое инвариантно относительно перестановок всех ℓ_i и одновременных вращений решетки или трансляций звеньев.

Пусть ℓ – звено решетки T_2 ; обозначим через σ_ℓ^1 и σ_ℓ^2 две спиновые переменные Изинга на узлах дуальной решетки, прилегающие к звену ℓ . Тогда $\eta_\ell(P) = \sigma_\ell^1(P) \sigma_\ell^2(P)$, где $\sigma_\ell^i(P)$ – значение, принимаемое переменной σ_ℓ^i в спиновой конфигурации, соответствующей петле P . Средние для модели Изинга на T_2 определяются формулой

$$\langle (\cdot) \rangle = \Lambda_0^{-1} \sum_P e^{\beta \langle P|0 \rangle} (\cdot),$$

следовательно,

$$\Lambda_n(\ell_1, \dots, \ell_n) = \Lambda_0 \left\langle \prod_{i=1}^n \sigma_{\ell_i}^1 \sigma_{\ell_i}^2 \right\rangle.$$

Корреляционные неравенства

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \sigma_{\ell_i}^1 \sigma_{\ell_i}^2 \right\rangle \geq \left\langle \prod_{i=1}^k \sigma_{\ell_i}^1 \sigma_{\ell_i}^2 \right\rangle \left\langle \prod_{i=k+1}^n \sigma_{\ell_i}^1 \sigma_{\ell_i}^2 \right\rangle$$

тогда означают, что

$$\Lambda_n(\ell_1, \dots, \ell_n) \Lambda_0 \geq \Lambda_k(\ell_1, \dots, \ell_k) \Lambda_{n-k}(\ell_{k+1}, \dots, \ell_n).$$

Мы ожидаем, что

$$\Lambda_n(\ell_1, \dots, \ell_n) < \Lambda_1 \quad (7)$$

для любого $n > 1$, но пока не располагаем общим доказательством этого неравенства. Его можно проверить в специальных случаях, используя явный вид парной спиновой корреляционной функции [5] и кластерные свойства корреляций.

4. ПОЛНОТА

Для начала заметим, что функции η_ℓ взаимно ортогональны относительно естественного скалярного произведения на $\mathcal{H}$, которое мы обозначим через $(\cdot, \cdot)$. Это следует из того, что функция $\eta_{\ell_1} \eta_{\ell_2}$ при $\ell_1 \neq \ell_2$ есть собственная функция матрицы K_β с собственным значением $\Lambda_2(\ell_1, \ell_2) \neq \Lambda_0$ и, следовательно, ортогональна функции, являющейся константой, т.е.

$$(1, \eta_{\ell_1} \eta_{\ell_2}) = \sum_P \eta_{\ell_1}(P) \eta_{\ell_2}(P) = 0.$$

Поэтому

$$(\eta_{\ell_1}, \eta_{\ell_2}) = \delta_{\ell_1 \ell_2} 2^{M^2},$$

поскольку полное число петель в пространстве Π равно 2^{M^2} .

Если неравенство (7) справедливо, кратность собственного значения Λ_1 равна 2^{M^2} . Это следует из того, что функции $E_{\mathcal{L}}$ натягивают пространство $\mathcal{H}$.

Действительно, пусть ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 – четыре разных звена, содержащие один и тот же узел. Такой набор звеньев мы будем называть *звездой*. В этом случае

$$\eta_{\ell_1}(P)\eta_{\ell_2}(P)\eta_{\ell_3}(P)\eta_{\ell_4}(P) = 1$$

для любой петли P , так как P содержит 0, 2 или 4 из звеньев $\ell_1, \dots, \ell_4$. Отсюда вытекает, что если $\mathcal{L}$ содержит звезду, то эту звезду можно устранить, не изменяя функцию $E_{\mathcal{L}}$. Чтобы доказать свойство полноты, достаточно указать 2^{M^2} взаимно ортогональных функций вида $E_{\mathcal{L}}$. Примем соглашение, что $E_{\emptyset} = 1$.

Будем говорить, что два набора звеньев $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ *эквивалентны*, если симметричная разность $\mathcal{L} \triangle \mathcal{L}'$ является звездой или симметричной разностью двух или более звезд. Тем самым на множестве всех наборов звеньев определяется отношение эквивалентности. Пусть $\mathcal{L}$ – набор звеньев; обозначим через $[\mathcal{L}]$ класс эквивалентности $\mathcal{L}$. Легко видеть, что полное число элементов в каждом классе эквивалентности равно 2^{M^2} , а число различных классов эквивалентности также равно 2^{M^2} , так как полное число наборов звеньев из T_2 равно 4^{M^2} . Если выбрать по одному набору $\mathcal{L}_i$ из каждого класса эквивалентности $[\mathcal{L}_i]$, $i = 1, \dots, 2^{M^2}$, то

$$(E_{\mathcal{L}_i}, E_{\mathcal{L}_j}) = \sum_P \prod_{\ell \in \mathcal{L}_{ij}} \eta_{\ell}(P),$$

где $\mathcal{L}_{ij}$ – максимальное подмножество из $\mathcal{L}_i \triangle \mathcal{L}_j$, не содержащее звезд. Следовательно, при $i \neq j$ получаем

$$(E_{\mathcal{L}_i}, E_{\mathcal{L}_j}) = (1, E_{\mathcal{L}_{ij}}) = 0,$$

так как $\mathcal{L}_{ij}$ не пусто при $i \neq j$. Тем самым доказано, что $\{E_{\mathcal{L}_i}\}$ есть семейство взаимно ортогональных функций.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Решение уравнения (2) с начальным условием $\rho_0(Q) = \delta_Q$, где δ_Q – δ -функция на $\mathcal{H}$, имеет вид

$$\rho_t(P, Q) = (\delta_P, K_{\beta}^t \delta_Q).$$

С точностью до нормировочного множителя Λ_0^t функцию $\rho_t(P, Q)$ можно интерпретировать как вероятность обнаружить петлю P в момент времени t при условии, что в

момент времени 0 мы имели петлю Q . Разлагая δ -функции и пользуясь результатами предыдущего раздела, приходим к представлению

$$\rho_t(P, Q) = 2^{-M^2} \sum_{i=1}^{2^{M^2}} E_{\mathcal{L}_i}(P \triangle Q) \Lambda_{\mathcal{L}_i}^t,$$

где $\Lambda_{\mathcal{L}_i}$ – собственное значение матрицы K_β , соответствующее собственной функции $E_{\mathcal{L}_i}$. Следовательно, нормированная вероятность иметь петлю P после N шагов по времени от начальной петли Q сходится к 2^{-M^2} при $t \rightarrow \infty$ для любой Q , причем первая поправка имеет порядок $(\Lambda_1/\Lambda_0)^t$. Таким образом, при больших временах в пространстве петель возникает однородное распределение независимо от начального условия, что и следовало ожидать для несмещенных случайных блужданий. Такая эволюция сильно отличается от эволюции в кинетической модели Изинга с динамикой Глаубера [6], где распределение при больших временах является распределением Гиббса.

Поясним теперь, как рассмотренная здесь модель возникает при изучении гонимых решетчатых поверхностей в пространстве трех измерений [7], [8]. Пусть T_3 – подрешетка в $\mathbb{Z}^3$ размером $M \times M \times N$ с периодическими граничными условиями. отождествим третье координатное направление решетки протяженности N с направлением времени. Набор $\mathcal{M}$ подмножеств плакетов из T_3 называется поверхностью, если любое звено плакета из $\mathcal{M}$ принадлежит четному числу плакетов из $\mathcal{M}$, при этом поверхность не обязательно связна. Легко видеть, что множество всех поверхностей совпадает с конфигурационным пространством модели Изинга на периодической решетке T_3 . Эти поверхности находятся во взаимно однозначном соответствии с границами фаз.

Будем называть звено ℓ поверхности $\mathcal{M}$ ребром, если ℓ принадлежит ровно двум плакетам из $\mathcal{M}$, встречающимся под прямым углом. Действие $S(\mathcal{M})$ для поверхности $\mathcal{M}$ определяется как полное число ребер в $\mathcal{M}$. Статсумма модели случайных поверхностей определяется выражением

$$Z(\beta) = \sum_{\mathcal{M} \in \mathcal{M}} e^{-\beta S(\mathcal{M})}.$$

Определим промежуточную плоскость в $\mathbb{R}^3$ как плоскость, проходящую между двумя плоскостями, для которых одна из координат принимает целочисленное значение, и параллельную им. Если рассесть поверхность $\mathcal{M}$ промежуточной плоскостью, то получится набор звеньев, образующих петлю в смысле раздела 2.

Пусть P – петля; обозначим через $k(P)$ число вершин в P порядка 2, для которых прилегающие звенья встречаются под прямым углом. Пусть T_β – оператор в $\mathcal{H}$, матричные элементы которого имеют вид

$$T_\beta(P_1, P_2) = e^{-\beta(k(P_1)+k(P_2))} K_\beta(P_1, P_2).$$

Тогда статсумму случайных поверхностей можно представить в виде [2]

$$Z_N(\beta) = \text{Tr } T_\beta^N,$$

что отвечает рассечению этих поверхностей промежуточными плоскостями, ортогональными направлению времени. Этот след можно вычислить, если пренебречь членом пересечения $|P_1 \cap P_2|$ в показателе экспоненты в выражении для K_β или если заменить $k(P_1) + k(P_2)$ на $k(P_1 \triangle P_2)$ [2]. В этом приближении модель становится собранием не-взаимодействующих двумерных моделей.

Если опустить в действии члены кривизны, то получится рассмотренная в настоящей работе модель случайных поверхностей, описывающая диффузию петель. Пренебрежение членами кривизны эквивалентно пренебрежению членами действия, связанного с ребрами временного направления.

Итак, нами точно решена трехмерная решеточная модель, описывающая диффузию петель в трехмерном пространстве. Как модель поверхности, она неизотропна, но может рассматриваться как собрание двумерных моделей Изинга с взаимодействием, которое является достаточно простым, чтобы модель можно было решить.

Благодарности. Автор благодарит организаторов конференции NEEDS 2000 и, в частности, профессора Й. Нутку.

Список литературы

- [1] *J. Ambjørn, B. Durhuus, T. Jonsson.* Quantum Geometry: A Statistical Field Theory Approach. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [2] *G. K. Savvidy, K. G. Savvidy.* Phys. Lett. B. 1994. V. 337. P. 333.
- [3] *T. Jonsson, G. K. Savvidy.* Phys. Lett. B. 1999. V. 449. P. 253.
- [4] *T. Jonsson, G. K. Savvidy.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 575. P. 661.
- [5] *B. M. McCoy, T. T. Wu.* The Two-Dimensional Ising Model. Boston, MA: Harvard Univ. Press, 1973.
- [6] *K. Kawasaki.* Kinetics of Ising models. In: Phase Transitions and Critical Phenomena. V. 2. Eds. C. Domb and M. S. Green. London: Academic Press, 1972. P. 443.
- [7] *G. K. Savvidy, F. J. Wegner.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 413. P. 605.
- [8] *G. K. Savvidy, K. G. Savvidy.* Phys. Lett. B. 1994. V. 324. P. 72.