Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Лебле, Ковариантность пар Лакса и интегрируемость условия совместности, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 1, 65–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:45:59

© 2001 г. С. Б. Лебле*
**КОВАРИАНТНОСТЬ ПАР ЛАКСА
И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УСЛОВИЯ СОВМЕСТИСТИ**

Исследуется совместная ковариантность пар Лакса (ПЛ) по отношению к преобразованиям Дарбу (ПД). Рассмотрение основано на сравнении общих выражений для преобразованных коэффициентов пары Лакса и ее производной по Фреше. В работе используется компактный вид ПД в форме неабелевых полиномов Белла. Показано, что так называемая бинарная форма полиномов Белла представляет собой удобный базис для выделения инвариантных подпространств. В связи с этим обсуждаются некоторые неавтономные обобщения уравнений КдФ и Буссинеска. Для получения ограничений на коэффициенты полиномов Белла на минимальном операторном уровне рассматривается задача типа Захарова–Шабата. Рассмотрены подклассы дифференциальных операторов, допускающие симметрию ПД (ковариантность на уровне ПЛ) с точки зрения цепочек уравнений одеяния. Случаи классических ПД и бинарных комбинаций элементарных ПД рассматриваются с учетом возможных редукций с помощью связей Михайлова, генерируемых автоморфизмом. В качестве примеров рассматриваются уравнения Лиувилля–фон Неймана для матрицы плотности.

1. ВВЕДЕНИЕ

Если две линейные задачи одновременно ковариантны по отношению к преобразованию Дарбу (ПД), то такая пара генерирует преобразования Беклунда для соответствующего условия совместности. С точки зрения такой интегрируемости принцип совместной ковариантности [1] может рассматриваться как основание для схемы классификации дифференциальных операторов. В настоящей работе исследуются реализации этой схемы и ищутся ковариантная форма и подходящий базис с наиболее простыми трансформационными свойствами. Можно заметить, что доказательство теорем ковариантности для линейных операторов включает так называемое (обобщенное) преобразование Миуры, которое имеет вид (обобщенного) уравнения Риккати. В статье получен и исследован явный вид равенства как в общем, так и в стационарном случаях (см. также [2]). Данное равенство дает дополнительное нелинейное уравнение, которое автоматически решается в теории ПД и используется для генерации цепочки t -уравнений [3].

*Faculty of Applied Physics and Mathematics, Technical University of Gdan'sk, Gdan'sk-Wrzeszcz, Poland; Факультет теоретической физики, Калининградский государственный университет, Калининград, Россия. E-mail: leble@mifgate.pg.gda.pl

Показано, как при сравнении некоторых производных Фреше можно найти вид ковариантного оператора для коэффициентов самого оператора и его преобразования.

Очевидно, что выбор типа ПД определяет класс ковариантных операторов. “Классическое” обобщенное ПД для полиномов оператора дифференцирования приводит к преобразованиям, впервые полученным Матвеевым [4]; в данной работе используется вид ПД, приведенный в [2]. Можно решать задачу и в абстрактном виде, т.е. определить элементарное ПД (ЭПД) для любого операторного (идемпотентного) элемента дифференциального кольца или модуля [5]. Абстрактное дифференцирование естественным образом входит в схему [1]. Здесь исследуется соответствующая задача Захарова–Шабата (ЗШ), которая включает некоторые элементы, такие как “потенциалы” или “волновые функции” (ВФ). Полученные результаты позволяют применить теорию ПД для матриц произвольной размерности (включая бесконечномерный, или строго операторный случай). В работе [6] было показано, что последовательность из n таких преобразований в случае матриц $n \times n$ с обычным дифференцированием по параметру приводит к стандартным “одевающим” формулам задачи ЗШ [7].

С помощью ЭПД для прямой и сопряженной задач в [6], [8] были получены бинарные ПД (бПД) для матриц, а в [9] – для трех проекционных операторов, применимых к N -волновому взаимодействию, что давало переход от случая [5] к общему случаю [10]. Из симметричной формы найденных выражений для потенциалов и ВФ почти очевидно следуют редукционные ограничения [8] и порождающие их автоморфизмы [11] для произвольной задачи ЗШ. Одно из приложений операторной задачи (уравнения Лиувилля–фон Неймана) рассматривалось в [12].

В разделе 2 исследуется общий вид неабелевых операторных преобразований, построенных путем обобщения полиномов Белла (ПБ). Полученные формулы преобразований не содержат двойного суммирования, что удобно для дальнейшего рассмотрения как с точки зрения классификации, так и для переформулировки одевающей цепочки [13]–[15] и получения решений. В последней части раздела 2 приводятся несколько таких полиномов. Далее выписано уравнение для промежуточной функции (σ), которая появляется в ходе доказательства теоремы Дарбу. Это уравнение является обобщением уравнения Риккати (преобразования Миуры) для известной теории КдФ в обобщенной динамике; его можно назвать обобщенным уравнением Бюргерса.

Раздел 3 посвящен выводу алгоритма получения пар Лакса исходя из ковариантности относительно преобразования Дарбу. Приведена схема вывода для простейшего неабелева случая. Основная идея состоит в сравнении формального разложения преобразованного оператора пары Лакса в ряд Тэйлора (с использованием производной по Фреше) и выражения для его преобразования Дарбу. Сравнение приводит к дифференциальным уравнениям, решая которые можно получить явные выражения для коэффициентов пары Лакса.

В разделе 4 вводятся бинарные ПБ (бПБ) и исследуются их преобразования с помощью дифференциальных форм. Доказывается также инвариантность некоторых комбинаций таких ПБ по отношению к ПД.

В разделе 5 исходя из ковариантности обобщенного уравнения ЗШ строятся два ви-

да одевающей цепочки для стационарных спектральных задач с неабелевым спектральным параметром. Ищутся соотношения, не зависящие от матричного представления [16]. Рассмотрен ряд простых примеров при замыкании цепочки уравнений на уровне операторов.

В разделе 6 рассматриваются неабелевы пары Лакса с точки зрения ковариантности по отношению к бПД. Абелев случай бинарного преобразования (когда “матричные элементы” коммутируют) дает те же результаты, что и метод одевания, основанный на матричной задаче Римана–Гильберта [7].

В данной работе рассмотрение в основном касается цепочки одевающих уравнений. Уравнение $-iX_t = [X, h(X)]$, где $h(X)$ – аналитическая функция, изучалось в [17]. Дальнейшие обобщения на случай существенно неабелевых функций, например $h(X) = XA + AX$, $[A, X] \neq 0$ [12], рассматривались в работе [18], где был приведен избыточный список интегрируемых уравнений. Этот список частично соответствовал [19] и показывал, как можно решать задачи с помощью одевающих цепочек. В указанных работах также приводились примеры “саморассеивающихся решений” и обсуждались возможные приложения [20].

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ В ТЕРМИНАХ ПОЛИНОМОВ БЕЛЛА

Решение задачи о правом и левом делении для полиномиального линейного дифференциального оператора приводит к одной из формулировок теоремы Дарбу. Теорема была переформулирована для классического ПД

$$\psi[1] = D\psi - \sigma\psi \quad (2.1)$$

в терминах обобщенных полиномов Белла [2], которые дают компактные выражения для преобразованных коэффициентов оператора. Здесь мы рассмотрим эти результаты с точки зрения их дальнейшего применения, а именно выпишем уравнения для элемента σ , которые появляются в ходе доказательства теоремы.

Будем исходить из линейного оператора

$$L = \sum_{n=0}^N a_n D^n$$

и уравнения эволюции (потока)

$$\psi_t = L\psi. \quad (2.2)$$

Здесь оператор D может быть оператором дифференцирования по какой-либо переменной, а ψ_t – производная по другой переменной (более общие случаи рассмотрены в [5]). Преобразование решений уравнения записывается в стандартном виде (2.1), где $\sigma = (D\phi)\phi^{-1}$, а ϕ – другое решение (2.2), $\phi_t = L\phi$. Наиболее удобной оказывается следующая формулировка теоремы Матвеева [4].

ТЕОРЕМА 1. *Коэффициенты полученного оператора*

$$L[1] = \sum_{n=0}^N a_n[1] D^n$$

определяются как $a_N[1] = a_N$, а для всех других n — как

$$a_n[1] = a_n + \sum_{k=n+1}^N [a_k B_{k,k-n} + ((Da_k) - \sigma a_k) B_{k-1,k-1-n}], \quad (2.3)$$

откуда следует принцип ковариантности. Здесь $B_{m,n}$ — обобщенные ПБ (см. ниже определение 1).

Из теоремы следует, что функция $\psi[1]$ есть решение уравнения $\psi_t[1] = L[1]\psi[1]$, где $L[1]$ имеет ту же структуру и порядок, что и L . При доказательстве данного утверждения используется уравнение, связывающее σ и коэффициенты оператора L . Это уравнение, которое выводится в теории факторизации [2], понадобится нам в дальнейшем:

$$\sigma_t = Dr + [\sigma, r], \quad r = \sum_{k=1}^N a_k B_k. \quad (2.4)$$

Здесь B_k — неабелевы ПБ (см., например, [21]). В стационарном случае получим

$$\sigma_t = \phi_{xt} \phi^{-1} - \phi_x \phi^{-1} \phi_t \phi^{-1} = 0. \quad (2.5)$$

Функции $B_{m,n}$ были введены в [2]. Здесь мы напомним их определение и некоторые свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенные ПБ $B_{m,n}$ определяются условием*

$$B_{n,0}(\sigma) = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} B_{n,k}(\sigma) &= B_{n-1,k}(\sigma) + DB_{n-1,k-1}(\sigma), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \\ B_{n,n}(\sigma) &= DB_{n-1,n-1}(\sigma) + B_n(\sigma), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из соотношений

$$\begin{aligned} B_{n,n-k+1}(\sigma) &= \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} B_{n,n-i}(\sigma) D^{i-k} \sigma, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ B_{n+1}(\sigma) &= \sum_{i=0}^n B_{n,n-i}(\sigma) D^i \sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

находим связь между стандартными (неабелевыми) и обобщенными ПБ:

$$B_{n+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(\sigma) D^{n-i} \sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В соответствии с определением 1 получаем для первых трех полиномов

$$B_{n,1}(\sigma) = \sigma, \quad B_{n,2}(\sigma) = \sigma^2 + nD\sigma, \quad B_{n,3}(\sigma) = \sigma^3 + n\sigma'\sigma + (n-1)\sigma D\sigma + \binom{n}{2}D^2\sigma.$$

3. ПОИСК СХЕМЫ КЛАССИФИКАЦИИ: СОВМЕСТНАЯ КОВАРИАНТНОСТЬ ПАР ЛАКСА

Используемый здесь формализм основан на результатах [1] и компактных формулах для обобщенных ПБ, полученных в разделе 2. Формализм справедлив для коэффициентов a_n в неабелевом случае и для решений уравнения (2.1), где ϕ и ψ могут рассматриваться как матрицы или операторы. Тем не менее мы начнем рассмотрение со скалярного случая.

Прежде всего на конкретных примерах рассмотрим получение явных выражений и продемонстрируем ряд свойств. Чтобы прояснить смысл вводимого понятия интегрируемости, начнем с простого анализа. Заметим, что преобразование “старших” коэффициентов (с $n = N$ и $n = N - 1$) почти тривиально. Следовательно, в общем случае функции a_N не играют роли потенциалов или неизвестных функций для нелинейного уравнения условия совместности.

При $N = 2$ общее преобразование (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} a_2[1] &= a_2 = a(x, t), & a_1[1] &= a_1(x, t) + Da(x, t), \\ a_0[1] &= a_0 + Da_1(x, t) + 2a(x, t)D\sigma + \sigma Da(x, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

(На данном этапе рассматривается только скалярный, а точнее абелев, случай.) Из явного вида преобразований сразу заметна разница между коэффициентами $a(x, t)$ и $a_1(x, t)$, преобразования которых не зависят от решений, и коэффициентом $a_0 = u(x, t)$, который ниже будет неизвестной функцией в нелинейном уравнении; в контексте представления Лакса мы будем называть ее потенциалом. Легко заметить, что здесь имеет место случай уравнения КдФ. А именно, если $a = \text{const}$ и $a_1 = 0$, то a_0 выполняет роль единственной неизвестной функции в уравнении КдФ. В соответствии с этим мы можем сформулировать следующее

НАБЛЮДЕНИЕ 1. Абелев случай с $N = 2$ есть первый нетривиальный пример множества ковариантных операторов с коэффициентами $a_{1,2}$, которые зависят только от x и дополнительного параметра (например, t), но его преобразования содержат только функции $a_{1,2}$ и потому считаются тривиальными. Преобразование (ПД) для u определяется уравнением (3.1) и зависит как от $a_{1,2}$, так и от решений уравнения (2.2) через σ .

Следующий пример мы рассмотрим более подробно, особенно случай, когда пары операторов анализируются одновременно. Это особенно важно, когда оба оператора – функции единственного потенциала. Полагая $N = 3$, получим

$$\begin{aligned} b_3[1] &= b_3, & b_2[1] &= b_2 + Db_3, \\ b_1[1] &= b_1 + Db_2 + 3b_3D\sigma + \sigma Db_3, \\ b_0[1] &= b_0 + Db_1 + \sigma Db_2 + (\sigma^2 + (2D\sigma))Db_3 + 3b_3(\sigma D\sigma + D^2\sigma). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим (3.1) и (3.2) как коэффициенты пары операторов Лакса, одновременно зависящих от единственной переменной u , и положим, что коэффициенты оператора – аналитические функции от u и ее производных по x . Затем подставив $t \rightarrow y$ и $L \rightarrow L_1$ в уравнение (2.2), что соответствует случаю (3.1), и оставив параметр t ($L \rightarrow L_2$) для случая (2.5), получим пару Лакса:

$$\psi_y = L_1 \psi, \quad (3.3)$$

$$\psi_t = L_2 \psi. \quad (3.4)$$

Чтобы обобщить эту конструкцию на случай уравнения КдФ, перейдем к решению (3.3), стационарному по y , $\phi_y = \lambda \phi$, где λ – постоянная.

Напомним случай КдФ. В стационарном случае уравнение (2.4) для $N = 2$ имеет вид

$$\sum_0^2 a_n B_n = c,$$

что дает

$$\sigma^2 + \sigma' + u = c = \text{const}. \quad (3.5)$$

Заметим, что для $N = 3$ соотношение (2.5) по-прежнему справедливо при $\sigma = \phi_x \phi^{-1}$, если ϕ есть решение системы уравнений Лакса (3.3), (3.4). Ограничиваясь в уравнениях (3.2) случаем $b_2 = 0$ и $b_3 = b = \text{const}$, получим второе уравнение в паре Лакса для уравнения КдФ.

Возвращаясь к общему случаю и учитывая, что $b_3 = b(x, t)$ и b_2 тривиальны в указанном выше смысле, получаем, что первый нетривиальный потенциал есть $b_1 = F(u, u', \dots)$. Предположим, что выполняется принцип ковариантности или, более кратко, что для функции F выполняется уравнение

$$\begin{aligned} b_1[1] &= F(u[1]) = F(u + Da_1 + 2aD\sigma + \sigma Da) = \\ &= F(u) + Db_2 + 3bD\sigma + \sigma Db. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу аналитичности F левая часть уравнения (3.6) допускает разложение в ряд Тейлора:

$$F(u[1]) = F(u) + F_u(2aD\sigma + Da_1 + \sigma Da) + F_{Du}(\dots) + \dots \quad (3.7)$$

Сравним преобразование (3.6) с дифференциалом Фреше (3.7) функции F . Равенство выполняется тождественно, если равны коэффициенты при σ , $D\sigma$ и свободном члене. Вводя функцию $F_u = c(x, t)$, находим

$$2ac = 3b, \quad (3.8)$$

или

$$F(u) = \frac{3bu}{2a}$$

с дополнительными условиями

$$cDa_1 = Db_2, \quad (3.9)$$

$$cDa = Db. \quad (3.10)$$

Подставляя в (3.10) коэффициент c из (3.8), получим либо $3D(\ln a) = 2D(\ln b)$, откуда после интегрирования следует $b = a^{3/2}c_1(t)$, либо $Da = Db = 0$. В последнем случае (3.10) выполняется для произвольного c , т.е. независимых $b(t)$ и $a(t)$, а (3.9) приводит в обоих случаях к уравнению для a_1 : $3Da_1 = 2aDb_2/3b$ для любого $c_1(t)$.

Еще одно условие следует из последнего уравнения системы (3.2): если ввести аналитическую функцию G и положить $b_0 = G(u, u', \dots)$, то преобразованная функция b_0 дается разложением

$$G(u + Da_1 + 2aD\sigma + \sigma Da) = G(u) + G_u(Da_1 + 2aD\sigma + \sigma Da) + \\ + G_{Du}D(Da_1 + 2aD\sigma + \sigma Da) + \dots \quad (3.11)$$

Легко видеть, что здесь мы использовали ПД для потенциала u . ПД для коэффициента b_0 (см. (3.2)) дает соотношение

$$b_0[1] = G(u) + Db_1 + \sigma Db_2 + (\sigma^2 + 2(D\sigma))Db + 3bD\left(\frac{\sigma^2}{2} + D\sigma\right). \quad (3.12)$$

Рассмотрим теперь общий вид преобразования Миуры (3.5)

$$\sum_0^2 a_n B_n = u + a_1\sigma + a(\sigma^2 + D\sigma) = \mu,$$

которым мы воспользуемся, чтобы выразить σ^2 в (3.12). Сравнивая выражения (3.11) и (3.12), получим

$$D\frac{3bu}{2a} + \sigma Db_2 + \left(\frac{\mu - u - a_1\sigma}{a} + \frac{D\sigma}{2}\right)Db + 3bD\left(\frac{\mu - u - a_1\sigma}{2a} + D\sigma\right) = \\ = G_u(Da_1 + 2aD\sigma + \sigma Da) + G_{Du}D(Da_1 + 2aD\sigma + \sigma Da). \quad (3.13)$$

Из (3.13) получаем коэффициенты

$$2aG_{Du} = \frac{2b}{a} \quad (3.14)$$

для $D^2\sigma$,

$$2aG_u + \frac{9b(Da)}{4a} = Db - \frac{3ba_1}{2a} \quad (3.15)$$

для $D\sigma$ (с учетом (3.14)) и

$$G_u Da + \frac{3b}{4a}D^2a(x, t) = Db_2 - \frac{a_1}{a} - 3bD\left(\frac{a_1}{2a}\right) \quad (3.16)$$

для σ . Свободный член имеет вид

$$D\frac{3bu}{2a} + \left(\frac{\mu - u}{a}\right)Db + 3bD\left(\frac{\mu - u}{2a}\right) = G_u Da_1 + \frac{3b(D^2a_1)}{4a}. \quad (3.17)$$

Из (3.14) и (3.15) находим

$$G_u = \frac{Db}{2a} - \frac{3ba_1}{4a^2} - \frac{9b(Da)}{8a^2}. \quad (3.18)$$

Для ненулевых G_u из (3.16) следует, что

$$\left(\frac{Db}{2a} - \frac{3ba_1}{4a^2} - \frac{9b(Da)}{8a^2} \right) Da + \frac{3b}{2a} D^2a = Db_2 - \frac{a_1}{a} - 3bD \left(\frac{a_1}{2a} \right).$$

Из выражения для свободного члена (3.17) получим

$$u \frac{Db}{2a} + \mu \left(\frac{Db}{a} - \frac{3bDa}{2a^2} \right) = \left(\frac{Db}{2a} - \frac{3ba_1}{4a^2} - \frac{9bDa}{8a^2} \right) Da_1(x, t) + \frac{3b(D^2a_1)}{4a}. \quad (3.19)$$

Если u линейно независимо от σ и ее производных и мы не учитываем члены высшего порядка в дифференциальном разложении Фреше (3.7), то имеем условие $Db = 0$, из которого следует отсутствие члена с u , и уравнение (3.19) упрощается:

$$D^2a_1 - \frac{a_1(Da_1)}{2a} = 0.$$

Здесь использовано условие $Da = 0$, вытекающее из (3.10). Уравнение (3.16) также упрощается:

$$Db_2 - \frac{a_1}{a} - \frac{3b(Da_1)}{2a} = 0;$$

отсюда интегрированием получим выражение для b_2 .

В другом возможном случае, $G_u = 0$, вместо (3.18) получим

$$\frac{9b(Da)}{2a} = \frac{Db - 3ba_1}{2a}.$$

Свободный член преобразуется в

$$u \frac{Db}{2a} + \mu \left(\frac{Db}{a} - \frac{3bDa}{2a^2} \right) = \frac{3b(D^2a_1)}{2a}. \quad (3.20)$$

Рассуждая аналогично случаю, когда u линейно независимо от σ и ее производных, получим условия $Db = Da = 0$. Отсюда следует $a_1 = 0$ и в силу (3.16) $Db_2 = 0$. Таким образом, в этом случае мы получаем уравнение КдФ со всеми возможными $a(t)$, $b(t)$ и $b_2(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты, полученные для одного уравнения (3.3), содержат довольно широкий класс коэффициентов (по сравнению со случаем совместной ковариантности (3.3) и (3.4)). А именно, a и a_1 — произвольные функции x и t . Это может быть полезно для построения потенциалов и решений (например, специальных функций) линейного уравнения Шредингера и уравнений эволюции в одномерной квантовой механике [22]. Случай КдФ может рассматриваться отдельно (используя теперь обозначение $f' = Df$):

$$G_u \sigma' + G_{u'} \sigma'' = \frac{3b(1-a)u'}{4a^2} + \frac{3b\sigma''}{4a}.$$

Если рассматривать σ , σ' и u' как независимые переменные, то должны выполняться соотношения

$$G_u = 0, \quad G_{u'} = \frac{3b}{4a}.$$

Если использовать условие равенства нулю коэффициента при u' , т.е. $a = 1$, то получим

$$G(u, u', \dots) = \frac{3bu'}{4}.$$

Этот результат сразу приводит к одной из эквивалентных пар Лакса для уравнения КдФ.

Рассмотрим теперь следующий пример, в котором уравнения для спектральной задачи и эволюции меняются местами. В качестве исходного возьмем уравнение (3.3) для спектрального оператора третьего порядка, а в качестве уравнения эволюции с $N = 2$ используем (3.4). Если ограничиться случаем $b_2 = 0$ и $b_3 = 1$, $b_1 = b$ и $b_0 = u$, то ПД дает

$$b_1[1] = b_1 + 3\sigma', \quad (3.21)$$

$$b_0[1] = b_0 + b'_1 + 3(\sigma_x \sigma + \sigma_{xx}). \quad (3.22)$$

Как показывает анализ оператора третьего порядка (см. (3.16)–(3.20)), ковариантная спектральная задача имеет вид

$$\psi_{xxx} + b\psi_x + G\psi = \lambda\psi, \quad (3.23)$$

а второе (эволюционное) уравнение в этом случае –

$$\psi_t = -\psi_{xx} - w\psi. \quad (3.24)$$

Рассмотрим (3.3) (с учетом (3.21) и (3.22)) или (3.23) и (3.24) как систему уравнений Лакса с зависящими от единственной переменной w коэффициентами в обоих уравнениях. Положим снова, что коэффициенты операторов суть аналитические функции w и ее производных (или интегралов) по x . Если мы хотим сохранить форму стандартного ПД для переменной (потенциала) w , то, используя те же рассуждения, что и в предыдущем примере, получим уравнение $b = 3w/2 + \alpha$ для константы α . Сравним результат с (3.20) или с $w[1] = w + 2\sigma_x$. Тогда преобразование для потенциала w следует из последнего уравнения системы (3.22), т.е.

$$G[1] = G + \frac{3w_x}{2} + 3\left(\frac{\sigma^2}{2} + \sigma_x\right)_x. \quad (3.25)$$

Для выяснения возможных ограничений требуется дальнейший анализ. Аналогично случаю КдФ ковариантные уравнения (3.22) и (3.23) дополняются уравнением (Бюргерса)

$$\sigma_t = -(\sigma^2 + \sigma_x)_x - w_x \quad (3.26)$$

для задачи (3.23) и уравнением $\sigma^3 + 3\sigma_x \sigma + \sigma_{xx} + b\sigma + G = \text{const}$ (см. (2.5)). Сравним их с (3.5), т.е. со стационарным уравнением Риккати для спектральной задачи второго порядка, соответствующей КдФ. Использование в (3.25) уравнения (3.26) приводит к появлению временной производной переменной w .

Далее, анализ этого случая показывает, что необходимо расширить функциональную зависимость от u , а именно, следует включить в рассмотрение как аргументы потенциала не только производные w по x , но также и интегралы (обратные производные). Поэтому мы рассмотрим в уравнении (3.23) аналитическую функцию

$$G = G(\partial^{-1}w, w, w_x, \dots, \partial^{-1}w_t, w_t, w_{tx}, \dots).$$

Первые члены в разложении Тэйлора для G суть

$$G(w + 2\sigma_x) = G(w) + G_{w_x}2\sigma_{xx} + G_{\partial^{-1}w_t}2\sigma_t + \dots \quad (3.27)$$

(несущественные для дальнейшего рассмотрения члены не выписаны). После подстановки (3.26) ПД (3.25) приводит к

$$G(w) = \frac{3w_x}{2} + \frac{3(-\sigma_t - w_x)}{2} + \frac{3\sigma_{xx}}{2}. \quad (3.28)$$

Приравнявая (3.28) и (3.27), получим

$$G_{w_x} = \frac{3}{4}, \quad G_{\partial^{-1}w_t} = -\frac{3}{4},$$

откуда следует явный вид пары Лакса для уравнения Буссинеска в [2] с $\alpha = -3/4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что мы оборвали дифференциальные формулы Фреше на уровне минимальных потоков. Учитывая члены более высоких порядков, можно получить старшие потоки (например, КдФ).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Во втором примере мы ограничиваемся рассмотрением автономного случая для специально выбранного ПД и не рассматриваем класс калибровочно-инвариантных уравнений. Общий случай, учитывающий производные высших порядков, будет рассмотрен в следующих публикациях.

Итогом данного раздела является следующая

ТЕОРЕМА 2. *Ковариантная по отношению к преобразованию Дарбу пара Лакса (3.3), (3.4) с уравнением стационарности (3.3) и оператором L_1 в виде (3.1) имеет коэффициенты $a_2 = a(t)$, $a_1 = 0$ и $a_0 = u$. Уравнение эволюции (3.4), имеющее вид (3.2), содержит*

$$b_3 = b(t), \quad b_2 = b_2(t), \quad b_1 = \frac{3bu}{2a}, \quad b_0 = \frac{3b(Du)}{2a}.$$

Пара задает уравнение КдФ в обобщенном виде $L_{1t} = [L_1, L_2]$, решение которого дается стандартным ПД.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ БИНАРНЫХ ПОЛИНОМОВ БЕЛЛА

Использующиеся здесь бПБ определяются в терминах экспоненциальных дифференциальных полиномов $Y_{mx,nt}(f) \equiv e^{-f} \partial_x^m \partial_t^n e^f$ с помощью связи между полиномами $\mathcal{Y}$ и стандартными формулами Хироты [23]:

$$D_x^p D_t^q G' \cdot G \equiv (\partial_x - \partial_{x'})^p (\partial_t - \partial_{t'})^q G'(x, t) G(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t},$$

которая выражается соотношением

$$\mathcal{Y}_{mx,nt}(v, w) \equiv e^{\frac{v-w}{2}} e^{-\frac{v+w}{2}} D_x^m D_t^n e^{\frac{v+w}{2}} \cdot e^{\frac{w-v}{2}}. \quad (4.1)$$

Теперь бПБ наследуют легко распознаваемую структуру разбиений ПБ:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_x(v) &= v_x, & \mathcal{Y}_{2x}(v, w) &= w_{2x} + v_x^2, \\ \mathcal{Y}_{x,t}(v, w) &= w_{xt} + v_x v_t, & \mathcal{Y}_{3x}(v, w) &= v_{3x} + 3v_x w_{2x} + v_x^3, \quad \dots \end{aligned}$$

Выражения для бПБ содержат структуры, которые уже были исследованы в предыдущих разделах. Поэтому и ковариантность данных выражений может быть исследована аналогичным образом. Чтобы проверить предположение о ковариантности бПБ, мы должны убедиться, что выражения для этих полиномов, порождаемые (4.1), совпадают с функциональным преобразованием (2.3). В качестве простейшего примера применим рассмотренный выше метод к полиному второго порядка и получим дополнительную формулу, приведенную в [24]:

$$\mathcal{Y}_{2x}(v, v + q) = P_0 B_2(v) + P_{2x}(q) B_0,$$

где символы $\mathcal{Y}_{2x}$ и $P_{2x}(q)$ также определены в работах [23], [24], а B_n суть обычные ПБ. Тогда имеет место формула

$$\mathcal{Y}_{2x}(v, v + q) = \psi^{-1} L \psi = \psi^{-1} (\psi_{xx} + q_{2x} \psi).$$

Как показано в разделе 3, этот полином содержит D -ковариантное выражение для оператора L ($N = 2$) с потенциалом q_{2x} . Отсюда видно, что спектральная задача в случае уравнения КдФ также может быть выражена через бПБ, т.е.

$$\mathcal{Y}_{2x}(v, v + q) = \lambda. \quad (4.2)$$

Этот простой пример показывает, как можно найти удобный базис для указанного преобразования. Такой путь проще, чем прямая проверка и, более того, допускает обобщение на случай произвольного N .

Общее выражение для бПБ, преобразованных аналогично формуле (2.3), дается дополнительной формулой из [23]:

$$\mathcal{Y}_{Nx}(v, v + q) = \sum_{p=0}^{[N/2]} \binom{N}{2p} P_{2px}(q) Y_{(N-2p)x}(v), \quad (4.3)$$

где $[N/2]$ – целая часть $N/2$. После логарифмической линейаризации выражения (4.1) получим

$$\mathcal{Y}_{Nx}(v, v + q) = \sum_{m=N-2[N/2]}^{[N/2]} \binom{N}{N-m} P_{(N-m)x}(q) D^m \psi = \sum_{m=0}^N a_m^P D^m \psi, \quad (4.4)$$

что формально совпадает с правой частью уравнения Лакса с оператором L . Коэффициенты дифференциального оператора содержатся в (4.4), а ПД этого оператора задается уравнением (2.3). Полученные коэффициенты имеют вид

$$a_m^P = \begin{cases} \binom{N}{N-m} P_{(N-m)x}(q), & \text{если } N - m \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } N - m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты a_m^P отличны от нуля только при $m \in \{N, N-2, \dots, N-2[N/2]\}$. Подставляя коэффициенты из (4.4) с подстановкой $m = N-2p$ в (2.3), находим

$$\begin{aligned} a_m^P[1] &= a_m^P + \sum_{j=m+1}^N \binom{N}{N-j} q \{ P_{(N-j)x}(q) [B_{j,j-m} - \sigma B_{j-1,j-1-m}] + \\ &\quad + P_{(N-j)x}(q)' B_{j-1,j-1-m} \}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Члены суммы в (4.5) также отличны от нуля при четном $N-j = 2p$ (что обозначает штрих при знаке суммы). Определение, полезные соотношения и явные выражения для обобщенных ПБ $B_{n,m}$ приведены в разделе 2.

Для иллюстрации предлагаемого метода мы снова рассмотрим минимальные полиномы и оценим правые части (4.4) и (4.5). Сначала, считая N четным, запишем

$$a_{N-2}[1] = a_{N-2} + a_N (B_{N,2} - \sigma B_{N-1,1}) = a_{N-2} + N\sigma',$$

где мы учли, что $a_N = P_0 = 1$. Сравнивая это соотношение с соотношением суммирования

$$P_{2x}(q + 2v) = \binom{2}{0} P_{2x}(q) + \binom{2}{2} P_{2x}(2v) = q_{2x} + 2v_{2x} = q_{2x} + 2\sigma',$$

мы видим, что полином инвариантен в случае $N = 2$.

Случай нечетного полинома с $N = 3$ дает

$$\mathcal{Y}_{3x}(v, v + q) = \mathcal{Y}_{3x}(v) + 3q_{2x}v_x = \psi^{-1}(D^3 + 3q_{2x}D)\psi, \quad (4.6)$$

причем преобразование оператора в (4.6) известно. Для полинома существуют два способа включения в пару Лакса: либо он входит в уравнение эволюции, либо он приводит к спектральной задаче третьего порядка и уравнениям Савады–Котеры или Буссинеска.

В случае КдФ спектральная задача

$$\mathcal{Y}_{2x}(v, v + q) = \lambda \quad (4.7)$$

делает потенциал q_{2x} зависимой переменной для уравнения КдФ. Запишем уравнение эволюции в терминах бПБ. Исходя из (4.7) заметим, что соответствующие коэффициенты в (4.4) определяются уравнением (4.6):

$$a_3^P = 1, \quad a_1^P = 3q_{2x}^{(3)}, \quad a_2^P = a_0^P = 0.$$

Их преобразования определяются полиномом (4.6); можно также воспользоваться явными выражениями из (4.2), например $3a_1^P[1] = 3a_1^P + 3\sigma'$. Отсюда следует, что потенциал (зависимая переменная) должен быть выбран в виде

$$q_{xx}^{(3)} = \frac{q_{xx}}{2}, \quad (4.8)$$

чтобы удовлетворить преобразованию для q_{xx} . Рассматривая преобразование коэффициентов обобщенного оператора (например, (4.3)), заметим, что “младший” коэффициент b_0 всегда меняется. Суммирование зависит от потенциала и σ , поэтому равенство нулю a_0^P в общем случае не сохраняется.

НАБЛЮДЕНИЕ 2. Изолированный полином $\mathcal{Y}_{3x}$ в общем случае не ковариантен.

Таким образом, для ковариантности необходимо включение различных полиномов. Поэтому возьмем комбинацию

$$c_3\mathcal{Y}_{3x}(v, v + q^{(3)}) + c_2\mathcal{Y}_{2x}(v, v + q^{(2)}) + c_1\mathcal{Y}_{1x} \quad (4.9)$$

с различными потенциалами q_i . Если ограничиться рассмотрением единственного потенциала, входящего в спектральную задачу (4.2), и заметить, что выбор $q^{(3)} = q/2$ определяется (4.8), получим соотношение между $q^{(2)}$ и q из (4.2):

$$q^{(2)} = q + \frac{3c_3q_x}{4c_2}, \quad (4.10)$$

которое означает, что константы c_i произвольны и влияют только на вид пары Лакса и условия совместности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система (4.9) с условием (4.10) ковариантна по отношению к ПД. Если $c_2 = c_3 = 1$, то условие совместности (4.2) и (4.9) эквивалентно уравнению $u_t = 3uu_x/2 + u_{xxx}/4$, которое есть не что иное, как одна из форм КдФ.

В эту схему можно включить и многие другие интегрируемые уравнения.

5. ПРИМЕР: НЕАБЕЛЕВА ЗАДАЧА ЗАХАРОВА–ШАБАТА

Наметим основную схему вывода одевающей цепочки в неабелевом случае. Возьмем уравнение эволюции

$$a_0\Psi + a_1D\Psi = \Psi_t, \quad (5.1)$$

содержащее полиномиальный оператор D в простейшем виде. Мы получим нетривиальный пример общего уравнения (2.3) с неабелевыми элементами. В качестве операторов можно выбрать Ψ или другие решения Φ (необходимые для построения ПД). Данное уравнение входит в пару интегрируемых нелинейных уравнений Лакса (например, уравнения Дэви–Стюартсона), а его стационарные формы представляют собой нелинейное уравнение Шредингера. Оно представляет также и самостоятельный интерес: одномерные квантовые уравнения Паули и Дирака после умножения на соответствующую матрицу принимают вид (5.1).

Потенциал a_0 может быть выражен через σ с помощью стационарной формы уравнений (2.4) и (2.5) с $\sigma_t = 0$. А именно, вводя показатель итерации i , получим связь

$$Da_0^i + [a_0^i, \sigma_i] = -Da_1 - [a_1, \sigma_i]\sigma_i. \quad (5.2)$$

Связь оказывается линейной, но содержащей коммутатор. Обозначим через $ad_\sigma x$ коммутатор $[\sigma, x]$, тогда

$$a_0^i = (D - ad_{\sigma_i})^{-1} \{-Da_1 - [a_1, \sigma_i]\sigma_i\}. \quad (5.3)$$

Существование обратного оператора в (5.3) накладывает ограничение на выражение в скобках: это выражение не может входить в ядро оператора $D - ad_{\sigma_i}$. Уравнение (5.2) упрощается в подпространстве с нулевым произведением Ли. В этом случае ПД также имеет простой вид:

$$a_0^{i+1} = a_0^i + [a_1, \sigma_i]. \quad (5.4)$$

Заметим, что a_1 не преобразуется общей формулой (2.3). Подставляя связь (5.3) для i и $i + 1$ в (5.4), получим цепочку уравнений. Можно поступить по-другому: выразить матричные элементы a_0 через элементы матрицы σ и подставить их в ПД (5.4).

Рассмотрим более подробно построение для стационарного случая. Положим $a_0 = u$ и $a_1 = J$, выберем $DJ = 0$, и пусть Ψ и Φ соответствуют λ и μ . В стационарном случае для неабелева уравнения (5.1) возможны два варианта: либо $\Psi_t = \lambda\Psi$, либо $\Psi_t = \Psi\lambda$. В первом случае получим существенно тривиальную связь между решениями и потенциалами с точки зрения теории ПД. А именно, если $J\Phi_x + u\Phi = \mu\Phi$, то $\sigma = \Phi_x\Phi^{-1} = J^{-1}(\mu - u)$, и ПД не содержит собственных функций. Это, например, означает, что для постоянного потенциала мы никогда не получим зависящего от x потенциала u итерациями.

Во втором случае имеем $\sigma = \Phi_x\Phi^{-1} = J^{-1}(\Phi\mu\Phi^{-1} - u)$, и ПД принимает вид

$$u^{i+1} = u^i - J^{-1}[s^i, J] + J^{-1}[u^i, J] = J^{-1}u^i J - J^{-1}[s^i, J],$$

где $s = \Phi\mu\Phi^{-1}$ (здесь и далее показатели итерации опущены). Потенциалы u^i могут быть исключены из (2.4), и в этом случае получим $\sigma_t = Dr + [r, \sigma]$ с

$$r = J\sigma + u = s. \quad (5.5)$$

Используя стационарность, подставляя u^i из (5.5) и восстанавливая индексы, находим

$$s^{i+1} = s^i + J\sigma^{i+1} - \sigma^i J, \quad (5.6)$$

и связь между s и σ оказывается очень простой:

$$Ds^i + [s^i, \sigma^i] = 0. \quad (5.7)$$

Формальное преобразование, приводящее к цепочке уравнений, аналогично (5.3); а именно, оно заключается в подстановке $\sigma^i = -ad_{s^i}^{-1}Ds^i$ в (5.6).

Направление дальнейшего развития этой программы состоит во введении дополнительных алгебраических структур для рассматриваемых полей, что может быть полезным при выборе конкретных представлений для решений уравнения (5.7). Например, если элементы s^i и σ^i принадлежат алгебре Ли со структурными константами $C_{\alpha\beta}^\gamma$, то после выбора базиса e_α мы можем ввести разложения $s^i = \xi_\alpha^i e_\alpha$ и $\sigma^i = \eta_\alpha^i e_\alpha$. Подставляя их в (5.7), получим дифференциальное уравнение $D\xi_\alpha^i + C_{\gamma\beta}^\alpha \xi_\gamma^i \eta_\beta^i = 0$. Если теперь определить матрицу

$$B_{\beta\alpha} = C_{\gamma\beta}^\alpha \xi_\gamma^i, \quad (5.8)$$

то $\eta_\beta^i = -B_{\beta\alpha}^{-1} \xi_\alpha^{i'}$ вне ядра оператора B . По определению картановской подалгебры C соответствующее подпространство не дает вклада в произведение Ли в формуле (5.7).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если J лежит в модуле над алгеброй Ли, $Je_\alpha = J_{\beta\alpha}e_\beta$, и существует внешний инволютивный автоморфизм такой, что $e_\alpha^+ = -e_\alpha$, $C_{\alpha\beta}^{\gamma*} = C_{\alpha\beta}^\gamma$ и $e_\alpha J = J_{\alpha\beta}e_\beta$, то цепочка уравнений на переменные ξ_α^i принимает вид

$$\xi_\alpha^{i+1} = \xi_\alpha^i - B_{\beta\gamma}^{-1} \xi_\gamma^{i+1'} J_{\beta\alpha} + J_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}^{-1} \xi_\gamma^{i'},$$

где матрица B задается формулой (5.8), а компоненты e_α лежат вне C . В противном случае $D\xi_\gamma^i = 0$, если $e_\gamma \in C$.

Система дифференциальных уравнений нелинейна, поскольку матрица B сама зависит от ξ_γ^i . Соответствующая схема была развита в работе [25].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Указанную схему можно обобщить на нестационарное уравнение (2.5). Тогда в уравнении (5.2) появляется дополнительное слагаемое $D\sigma_t^i$ из правой части.

6. КОВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО БИНАРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ И ОДЕВАЮЩИЕ ЦЕПОЧКИ

Как и в предыдущих разделах, мы не затрагиваем явно совместную ковариантность относительно БПД и проблему классификации. (См. [12], [17], [20] и особенно наиболее общую работу [18], где допускаются неабелевы функции и рациональная зависимость от спектрального параметра. В этих работах рассматривалась эволюция в квантовой статистике: уравнение Лиувилля–фон Неймана там рассматривалось как условие совместности алгебраической редукции стационарной задачи ЗШ и уравнения, которое вводит переменную времени.)

Продолжим исследование стационарной задачи ЗШ (5.1),

$$JD\Psi + u\Psi = z\Psi, \quad (6.1)$$

с введенной цепочкой одевающих бПД (см. введение к работе [19], а также работу [10], откуда мы берем определения). Алгебраическая редукция предполагает, что $D\Psi = -\mu\Psi$ и $D\mu = 0$, где μ – скаляр. Произведя редукцию, мы можем использовать прямое следствие уравнения (6.1) (при этом приведа обозначения в соответствие с обозначениями работы [12]: $J \rightarrow A$, $u \rightarrow \rho$), что даст $\mu A\varphi + \rho\varphi = z_\mu\varphi$ и сопряженную задачу $\nu\chi A + \chi\rho = z_\nu\chi$. Пусть оператор проекции P имеет представление

$$P = \varphi(\chi, \varphi)_p^{-1}\chi \quad (6.2)$$

для заданного постоянного идемпотента p [10]. Формула для бПД связывает элементы (которые суть операторнозначные потенциалы матрицы плотности на физическом языке):

$$\rho[i+1] = \rho[i] + (\mu_i - \nu_i)[P_i, A]. \quad (6.3)$$

Используем определение (6.2), для того чтобы переписать сопряженную спектральную задачу [12] в терминах оператора P :

$$(\rho - \mu A)P = z_\mu P, \quad P(\rho - \nu A) = z_\nu P.$$

Каждое такое уравнение устанавливает связь между “потенциалом” ρ и проекционным оператором P , который играет роль элемента σ из предыдущего раздела:

$$\rho P = \mu AP + z_\mu P, \quad P\rho = \nu PA + z_\nu P. \quad (6.4)$$

Важность каждого из этих операторов очевидна из вытекающих следствий

$$P(\rho - \mu A)P = (\rho - \mu A)P, \quad P(\rho - \nu A)P = P(\rho - \nu A).$$

Заметим также, что $(\nu - \mu)PAP = (z_\mu - z_\nu)P$ и

$$P\rho P = \frac{\nu z_\mu - \mu z_\nu}{\nu - \mu}.$$

Нетрудно проверить, что ПД можно интерпретировать как преобразование подобия

$$\rho[i+1] = \left(1 + \frac{\mu_i - \nu_i}{\nu_i} P_i\right) \rho[i] \left(1 + \frac{\nu_i - \mu_i}{\mu_i} P_i\right).$$

Умножая это уравнение на P_{i+1} слева и на P_i справа и подставляя $\rho[n+1] = \rho_n$, получим

$$P_{n+1}\rho_{n+1}P_n = P_{n+1}\left(1 + \frac{\mu_n - \nu_n}{\nu_n} P_n\right)\rho_n P_n \left(1 + \frac{\nu_n - \mu_n}{\nu_n} P_n\right)$$

или же, используя соотношения (6.4) для подходящего n –

$$P_{n+1}(\nu_{n+1}A + z_{\nu,n+1})P_n = P_{n+1}\left(1 + \frac{\mu_n - \nu_n}{\nu_n} P_n\right)(\mu_n AP_n + z_{\mu,n}P_n)\left(1 + \frac{\nu_n - \mu_n}{\nu_n} P_n\right).$$

Упрощая выражения, мы получим уравнение цепочки

$$(\nu_{n+1} - \nu_n)P_{n+1}AP_n + (z_{\nu,n+1} - z_{\nu,n})P_{n+1}P_n = 0 \quad (6.5)$$

или, эквивалентно, умножая на P_{n+1} справа и на P_n слева –

$$(\mu_{n+1} - \mu_n)P_nAP_{n+1} + (z_{\mu,n+1} - z_{\mu,n})P_nP_{n+1} = 0. \quad (6.6)$$

Эти уравнения рекуррентны и определяют решение через параметры. Зависимость параметров от дополнительной переменной t вводится с помощью “мастер”-уравнения (см. [12])

$$\imath P_t = \frac{AP - PAP}{\mu} - \frac{PA - PAP}{\nu}. \quad (6.7)$$

“Минимальное” замыкание $P_{n+1} = \lambda P_n = P_n \lambda$ возможно, только если $\lambda = 1$ относительно проектора P_n . В этом случае

$$P_{n+1} = P_n = P, \quad z_{\nu,n+1} = z_{\nu,n} = z_\nu,$$

а уравнения (6.5) и (6.6) выполняются автоматически. Другой простой выбор замыкания $P_{n+1} = a_n P_n + b_n$ при $a_n, b_n \in K$ приводит к условию $P_{n+1} = P_n - (1 - (-1)^n)/2$.

Еще одна возможность связана со случаем, когда некоторый элемент A не коммутирует с P_n , например

$$P_{n+1} = P_n A, \quad z_{\mu,n+1} = \lambda_n z_\mu.$$

Для уравнения цепочки (6.6) это даст $(\lambda_n - 1)z_{\mu,n}S_n^2 = (\mu_n - \nu_n)S_n$, где $S_n = P_n A$ пропорционально некоторому проекционному оператору, или же по рекуррентным соотношениям $P_n = p_0(t)A^n$, где функция $p_0(t)$ задается формулой (6.7).

В итоге мы можем сформулировать следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. *Уравнения цепочек (6.5) и (6.6) могут быть полезными при построении частных решений условий совместности пары Лакса (см. [17]), если каждый оператор P_n есть решение уравнения (6.7).*

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что наш подход, во-первых, связывает класс билинеаризуемых нелинейных уравнений в частных производных с его лаксовой формой (класс образован некоторым набором бПД, удовлетворяющих принципу ковариантности) и, во-вторых, автоматически дает технику интегрирования для уравнений из этого класса (базисная ковариантность относительно преобразований Дарбу для обоих линейных операторов позволяет получить богатый набор решений, включающий мультисолитоны, позитоны, а также периодические и рациональные решения со всем многообразием взаимодействий).

Мы также подготовили плацдарм для введения неабелевых обобщений. Принцип совместной ковариантности, по-видимому, позволяет включить в классификацию типы

уравнений, возникающие в большинстве симметричных подходов [26], [27], и обеспечивает прямой переход к решениям с помощью одевающих цепочек, или итераций ПД.

Отметим также, что нам удалось обобщить теорию малых деформаций итерированных преобразований [9] на случай конечных величин параметров преобразований, возникающих в ходе итерационной процедуры для бПД. Инфинитезимальная инвариантность, порожденная расширенным преобразованием Беклунда, рассматривалась в работе [28]. Формулы теории возмущений, введенные в этой работе, позволили определить и исследовать свойства генераторов соответствующей группы, т.е. группы симметрий иерархии уравнений, ассоциированных с исследуемой задачей ЗШ.

Мы продолжили развитие метода одевания в применении к линейным и солитонным задачам. Одевание затрагивает как решения, так и потенциалы соответствующей линейной системы. Другие редукции и обобщения могут быть введены, если существует инволютивный автоморфизм соответствующего кольца.

Многообразные возможности дальнейших обобщений связаны с последними результатами Матвеева [29], где само ПД задано с помощью автоморфизмов колец.

Благодарности. Работа была частично поддержана грантом KBN № 0337/PO3/2001/20.

Список литературы

- [1] S. B. Leble. Darboux transforms algebras in 2+1 dimensions. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Proc. of the 7th Workshop NEEDS-91, Baia Verde, Italy, June 19–29, 1991. Eds. M. Boiti et al. Singapore: World Scientific, 1992. P. 53–61.
- [2] A. A. Zaitsev, S. B. Leble. Rep. Math. Phys. 2000. V. 46. P. 165–174; math-ph/9903005.
- [3] A. B. Бопусов, С. А. Зыков. ТМФ. 1998. Т. 115. С. 199–214.
- [4] V. B. Matveev. Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 217–219, 503–512.
- [5] S. B. Leble, A. A. Zaitsev. Rep. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 177–183; Intertwine operators and elementary Darboux transforms in differential rings and modules. Preprint. Kaliningrad: Kaliningrad State Univ., 1994.
- [6] Н. В. Устинов. Преобразование Дарбу для спектральных задач с редукциями. Дисс. ... канд. физ. мат. наук. Санкт-Петербург: СПбГУ, 1994.
- [7] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [8] S. Leble, N. Ustinov. Deep reductions for matrix Lax system, invariant forms, and elementary Darboux transforms. In: Proc. of Workshop NEEDS-92. Ed. V. Makhan'kov. Singapore: World Scientific, 1993. P. 34–41; J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 5007–5016.
- [9] S. Leble. Computers Math. Appl. 1998. V. 35. P. 73–81.
- [10] С. Б. Лебле. ТМФ. 2000. Т. 122. С. 239–250.
- [11] A. Mikhailov. Physica D. 1981. V. 3. P. 73–117.
- [12] S. B. Leble, M. Czachor. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. № 6. Part A. P. 7091–7100; quant-ph/9804052, 1998.
- [13] J. Weiss. J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 2647–2656.
- [14] A. Shabat. Inverse Problems. 1992. V. 8. P. 303–308.
- [15] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. С. 1–21.
- [16] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. С. 43–53.
- [17] N. Ustinov, S. Leble, M. Czachor, N. Kuna. Darboux integration of $\iota_{\rho} = [H, f(\rho)]$. quant-ph/0005030; Phys. Lett. A. 2001. V. 279. P. 333–340.
- [18] M. Czachor, N. Ustinov. New class of integrable nonlinear von Neumann-type equations. math.nlinSI/0011013.

- [19] *A. B. Михайлов, B. B. Соколов.* ТМФ. 2000. Т. 122. С. 88–101.
- [20] *M. Czachor, S. Leble, M. Kuna, J. Naudts.* Nonlinear von Neumann type equations. In: Trends in Quantum Mechanics. Eds. H.-D. Doebner et al. Singapore: World Scientific, 2000. P. 209–226.
- [21] *R. Schimming, S. Z. Rida.* Int. J. Alg. Comput. 1996. V. 6. P. 635–644.
- [22] *A. Yurov.* Darboux Transformations in Quantum Mechanics. Kaliningrad: Kaliningrad State Univ., 1998.
- [23] *C. Gilson, F. Lambert, J. Nimmo, R. Willox.* Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1996. V. 452. P. 223–234.
- [24] *F. Lambert, J. Springael.* J. Phys. Soc. Japan. 1997. V. 66. P. 2211–2213.
- [25] *A. Shabat.* Dressing chains and lattices. In: Proc. Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years after NEEDS '79. Lecce, Italy, July 1–10, 1999. Eds. M. Boiti et al. Singapore: World Scientific, 2000. P. 331–342.
- [26] *A. B. Михайлов, A. B. Шабат, P. И. Ямилов.* ДАН СССР. 1987. Т. 42. С. 3–53.
- [27] *A. Leznov, E. Yuzbashyan.* Rep. Math. Phys. 1999. V. 43. P. 207–214.
- [28] *H. Steudel.* Ann. der Physik. 1975. V. 32. P. 205, 445, 459.
- [29] *V. B. Matveev.* Darboux transformations in differential rings and functional-difference equations. Preprint 96-170. Bonn: MPI, 1996; In: Proc. CRM Workshop on Bispectral Problems (Montreal, March, 1997). Ed. A. Kasman. New York: AMS, 1998. P. 211–226.