Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Орлов, Д. М. Щербин, Гипергеометрические решения солитонных уравнений, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 1, 84–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:02:43

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются гипергеометрические функции многих переменных, связанные с функциями Шура. Показано, что эти гипергеометрические функции суть тау-функции иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) и одновременно являются отношениями тау-функций решетки Тоды, вычисленных при некоторых значениях высших времен иерархии решетки Тоды. Переменные гипергеометрических функций связаны с высшими временами этих иерархий с помощью мивовской замены переменных. Дискретная переменная решетки Тоды сдвигает параметры гипергеометрических функций. Построено детерминантное и интегральное представления специального вида для тау-функций КП. На эти тау-функции выписаны системы линейных дифференциальных и разностных уравнений, которые играют роль струнных уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе строятся гипергеометрические функции многих переменных, которые связаны с функциями Шура таким же образом, каким с ними связаны тау-функции τ иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Уравнение КП

$$4\partial_{t_1}\partial_{t_3}u = \partial_{t_1}^4u + 3\partial_{t_2}^2u + 3\partial_{t_1}^2u^2, \quad u = 2\partial_{t_1}^2 \ln \tau, \quad (1.1)$$

широко известно в физике и математике. Пара Лакса уравнения КП, полученная в работе [1], была проинтегрирована с помощью метода одевания Захаровым и Шабатом [2], которые также построили так называемую иерархию высших уравнений КП. Другое важное уравнение – двумеризованная решетка Тоды (РТ) – было проинтегрировано в работе [3]. В данной работе эти уравнения используются для построения гипергеометрических функций, зависящих от многих переменных, т.е. от высших времен КП и РТ. Для этого используется общий подход к интегрируемым иерархиям, называемый подходом киотской школы [4], [5].

*Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto, Japan; Лаборатория нелинейных волновых процессов, Институт океанологии, Москва, Россия.

E-mail: orlovs@kusm.kyoto-u.ac.jp, orlovs@wave.sio.rssi.ru

†Centre de recherches mathématiques, Université de Montréal, Montréal, Canada.

E-mail: scherbini@crm.umontreal.ca

Статья имеет следующую структуру. Обозначения содержатся в разделах 2 и 3. Основной результат – фермионное представление гипергеометрических функций – приведен в п. 4.1 и в примерах 3–6. Линейные уравнения (уравнения связей) на тау-функцию, которые обобщают обычное уравнение Гаусса на гипергеометрическую функцию Гаусса, выписаны в п. 4.7. Детерминантное и интегральное представления описаны соответственно в п. 4.8, 4.9. Представление гипергеометрической функции через групповой 2-коцикл содержится в замечании 2 в конце приложения А.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Через $\mathbf{n}$ обозначены разбиения, $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}^*$ – соответствующие наборы переменных высших времен КП и РТ, $\mathbf{x}_{(N)}$ и $\mathbf{y}_{(N)}$ – переменные Мивы. Заметим, что индекс $*$ и черта над буквами не означают комплексное сопряжение, а штрих не означает производную.

2. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Обобщенная гипергеометрическая функция одной переменной x имеет вид

$${}_pF_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_s)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.1)$$

где

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+n-1)$$

– символ Похгаммера. Для данного комплексного числа q , $|q| < 1$, так называемый базисный гипергеометрический ряд от одной переменной имеет вид

$${}_p\Phi_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; q, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}; q)_n \dots (q^{a_p}; q)_n}{(q^{b_1}; q)_n \dots (q^{b_s}; q)_n} \frac{x^n}{(q; q)_n}, \quad (2.2)$$

где $(q^a; q)_n$ – q -деформированный символ Похгаммера,

$$(q^a; q)_0 = 1, \quad (q^a; q)_n = (1 - q^a)(1 - q^{a+1}) \dots (1 - q^{a+n-1}). \quad (2.3)$$

Оба ряда сходятся при всех x , если только $p < s + 1$. В случае, когда $p = s + 1$, эти ряды сходятся при $|x| < 1$. Эти гипергеометрические функции называются обыкновенными гипергеометрическими функциями.

Существуют различные обобщения гипергеометрических рядов на случай многих переменных [6], [7]. Положим $|q| < 1$, и пусть $\mathbf{x}_{(N)} = (x_1, \dots, x_N)$ – новые переменные. Обозначим через $s_{\mathbf{n}}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ многочлен Шура, отвечающий разбиению $\mathbf{n}$ [8]. Тогда функция $s_{\mathbf{n}}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ будет симметричной функцией от переменных x_k . Базисный гипергеометрический ряд от многих переменных, связанный с многочленами Шура [9], имеет вид

$${}_p\Phi_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; q, \mathbf{x}_{(N)}) = \sum_{l(\mathbf{n}) \leq N} \frac{(q^{a_1}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{a_p}; q)_{\mathbf{n}}}{(q^{b_1}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{b_s}; q)_{\mathbf{n}}} \frac{q^{n(\mathbf{n})}}{H_{\mathbf{n}}(q)} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}), \quad (2.4)$$

где сумма пробегает все различные разбиения $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$, для которых $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$, $r \leq |\mathbf{n}|$ и $|\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_r$ с длинами $l(\mathbf{n}) = r \leq N$. Многочлен Шура $s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)})$ при $N \geq l(\mathbf{n})$ – это симметричная функция от переменных $\mathbf{x}_{(N)}$ [8],

$$s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}) = \frac{a_{\mathbf{n}+\delta}}{a_{\delta}}, \quad a_{\mathbf{n}} = \det(x_i^{n_j})|_{1 \leq i, j \leq N}, \quad \delta = (N-1, N-2, \dots, 1, 0).$$

Коэффициент $(q^c; q)_{\mathbf{n}}$, связанный с разбиением $\mathbf{n}$, может быть выражен в терминах q -деформированных символов Похгаммера $(q^c; q)_n$, определенных формулой (2.3):

$$(q^c; q)_{\mathbf{n}} = (q^c; q)_{n_1} (q^{c-1}; q)_{n_2} \dots (q^{c-l+1}; q)_{n_l}.$$

Множитель $q^{n(\mathbf{n})}$ зависит от разбиения $\mathbf{n}$,

$$q^{n(\mathbf{n})} = q^{\sum_{i=1}^N (i-1)n_i},$$

в то время как q -деформированный “многочлен крюка” $H_{\mathbf{n}}(q)$ имеет вид

$$H_{\mathbf{n}}(q) = \prod_{(i,j) \in \mathbf{n}} (1 - q^{h_{ij}}), \quad h_{ij} = n_i + n'_j - i - j + 1, \quad (2.5)$$

где через $\mathbf{n}'$ обозначено сопряженное разбиение (определения см. в работе [8]). В случае $N = 1$ получим формулу (2.2).

Другое обобщение гипергеометрического ряда – это так называемая гипергеометрическая функция матричного аргумента $\mathbf{X}$ с индексами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ [6], [10]

$${}_p F_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| \mathbf{X} \right) = \sum_{\mathbf{n}} \frac{(a_1)_{\mathbf{n}} \dots (a_p)_{\mathbf{n}}}{(b_1)_{\mathbf{n}} \dots (b_s)_{\mathbf{n}}} \frac{Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{X})}{|\mathbf{n}|!}, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{X}$ – эрмитова матрица размера $N \times N$, а $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{X})$ – зональный сферический многочлен для симметрического пространства $GL(N, C)/U(N)$ (см. [6], [7]). В пределе $q \rightarrow 1$ ряд (2.4) превращается в ряд (2.6) (см. [7]).

Формула

$$\begin{aligned} & {}_p \Phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) = \\ & = \sum_{\substack{\mathbf{n} \\ l(\mathbf{n}) \leq N}} \frac{(q^{a_1}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{a_p}; q)_{\mathbf{n}}}{(q^{b_1}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{b_s}; q)_{\mathbf{n}}} \frac{q^{n(\mathbf{n})}}{H_{\mathbf{n}}(q)} \frac{s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}_{(N)})}{s_{\mathbf{n}}(1, q, q^2, \dots, q^{N-1})} \end{aligned} \quad (2.7)$$

задает базовую гипергеометрическую функцию, зависящую от двух наборов переменных [7], [9].

Еще одно обобщение гипергеометрического ряда – это так называемая гипергеометрическая функция от двух матричных аргументов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ с индексами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$${}_p \mathcal{F}_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{\mathbf{n}} \frac{(a_1)_{\mathbf{n}} \dots (a_p)_{\mathbf{n}}}{(b_1)_{\mathbf{n}} \dots (b_s)_{\mathbf{n}}} \frac{Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}) Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{Y})}{|\mathbf{n}|! Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{I}_N)}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – эрмитовы $(N \times N)$ -матрицы, а $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{X})$ и $Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{Y})$ – зональные сферические многочлены симметрических пространств $GL(N, C)/U(N)$ (см. [7]).

3. ФЕРМИОННОЕ ОПИСАНИЕ ИЕРАРХИЙ КП И РТ

В этом разделе используются материалы работ [4], [11]. Введем фермионные поля

$$\psi(z) = \sum_k \psi_k z^k, \quad \psi^*(z) = \sum_k \psi_k^* z^{-k-1} dz,$$

генераторы которых удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0, \quad [\psi_m, \psi_n^*]_+ = \delta_{mn}. \quad (3.1)$$

Левые и правые вакуумы удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \psi_m |0\rangle &= 0, \quad m < 0, & \psi_m^* |0\rangle &= 0, \quad m \geq 0, \\ \langle 0 | \psi_m &= 0, \quad m \geq 0, & \langle 0 | \psi_m^* &= 0, \quad m < 0. \end{aligned}$$

Соотношения (3.1) инвариантны относительно преобразований

$$\psi_n \rightarrow e^{-T_n} \psi_n, \quad \psi_n^* \rightarrow e^{T_n} \psi_n^*, \quad T_n \in \mathbb{C}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь бесконечномерные матрицы $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющие условию, что $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > N$ для некоторого N . Рассмотрим набор линейных комбинаций билинейных форм $\sum a_{ij} : \psi_i \psi_j^* :$, где $:$ обозначает нормальное упорядочение, т.е. $: \psi_i \psi_j^* : = \psi_i \psi_j^* - \langle 0 | \psi_i \psi_j^* | 0 \rangle$. Линейная оболочка этих элементов с добавленной единицей — это бесконечномерная алгебра Ли $\widehat{gl}(\infty)$:

$$\begin{aligned} \left[\sum a_{ij} : \psi_i \psi_j^* :, \sum b_{ij} : \psi_i \psi_j^* : \right] &= \sum c_{ij} : \psi_i \psi_j^* : + c_0, \\ c_{ij} &= \sum_k a_{ik} b_{kj} - \sum_k b_{ik} a_{kj}, \quad c_0 = \sum_{\substack{i < 0 \\ j \geq 0}} a_{ij} b_{ji} - \sum_{\substack{i \geq 0 \\ j < 0}} a_{ij} b_{ji}. \end{aligned}$$

Определим теперь оператор g , являющийся элементом группы, отвечающей алгебре Ли $\widehat{gl}(\infty)$,

$$g \psi_n g^{-1} = \sum_m \psi_m a_{mn}, \quad g^{-1} \psi_n^* g = \sum_m a_{nm} \psi_m^*,$$

и вакуумные векторы, занумерованные целыми числами M ,

$$\langle M | = \langle 0 | \Psi_M^*, \quad | M \rangle = \Psi_M | 0 \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_M &= \psi_{M-1} \dots \psi_1 \psi_0, \quad M > 0, & \Psi_M &= \psi_M^* \dots \psi_{-2}^* \psi_{-1}^*, \quad M < 0, \\ \Psi_M^* &= \psi_0^* \psi_1^* \dots \psi_{M-1}^*, \quad M > 0, & \Psi_M^* &= \psi_{-1} \psi_{-2} \dots \psi_M, \quad M < 0. \end{aligned}$$

Тау-функции уравнения КП и уравнения двумеризованной РТ обычно определяются следующими выражениями:

$$\tau_{\text{КП}}(M, \mathbf{t}) = \langle M | e^{H(\mathbf{t})} g | M \rangle, \quad (3.3)$$

$$\tau_{\text{РТ}}(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \langle M | e^{H(\mathbf{t})} g e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle. \quad (3.4)$$

В соответствии с работой [4] целое число M в формуле (3.4) играет роль дискретной переменной РТ.

Времена $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ и $\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots)$ называются старшими временами РТ [4], [11]. При этом набор $\mathbf{t}$ одновременно является набором старших времен иерархии КП. Низшие времена t_1 , t_2 и t_3 из этого набора – это независимые переменные уравнения КП (1.1), которое есть первое нетривиальное уравнение иерархии КП. Элементы $H(\mathbf{t})$ и $H^*(\mathbf{t}^*)$ принадлежат картановским подалгебрам алгебры $\widehat{gl}(\infty)$:

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n H_n, \quad H^*(\mathbf{t}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^* H_{-n}, \quad H_n = \frac{1}{2\pi i} \oint : z^n \psi(z) \psi^*(z) :. \quad (3.5)$$

Гамильтонианы удовлетворяют коммутационным соотношениям Гейзенберга:

$$[H_n, H_m] = n \delta_{m+n, 0}.$$

Действие оператора $e^{H(\mathbf{t})}$ на фермионы имеет вид

$$e^{H(\mathbf{t})} \psi_i e^{-H(\mathbf{t})} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(\mathbf{t}) \psi_{i-n}, \quad e^{H(\mathbf{t})} \psi_i^* e^{-H(\mathbf{t})} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(\mathbf{t}) \psi_{i+n}^*,$$

где p_n суть стандартные многочлены Шура, задаваемые разложением Тейлора

$$e^{\xi(\mathbf{t}, z)} = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} t_k z^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n p_n(\mathbf{t}). \quad (3.6)$$

В теории КП встречается другое определение функции Шура, отвечающей разбиению $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_r)$,

$$s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \det(p_{n_i - i + j}(\mathbf{t})) \Big|_{1 \leq i, j \leq r},$$

где $p_m(\mathbf{t})$ имеет тот же вид, что и в (3.6). Эта функция связана с функциями $s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)})$ и $s_{\mathbf{n}'}(\mathbf{x}_{(N)})$,

$$s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})) = s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}), \quad s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)})) = s_{\mathbf{n}'}(\mathbf{x}_{(N)}),$$

в которых разбиение $\mathbf{n}'$ сопряжено $\mathbf{n}$ [8], посредством замены переменных (известной как мивовская замена переменных в теории интегрируемых систем)

$$t_m^+(\mathbf{x}_{(N)}) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^m}{m}, \quad (3.7)$$

$$t_m^-(\mathbf{x}_{(N)}) = - \sum_{i=1}^N \frac{x_i^m}{m}. \quad (3.8)$$

Заметим, что $s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})) = 0$ для $l(\mathbf{n}) > N$ и $s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)})) = 0$ для $l(\mathbf{n}') > N$.

Вершинные операторы $V_{\infty}(z)$, $V_{\infty}^*(z)$ и $V_0(z)$, $V_0^*(z)$ действуют в пространстве $C[t_1, t_2, \dots]$ многочленов от бесконечно многих переменных,

$$\begin{aligned} V_{\infty}(z) &= z^M e^{\xi(\mathbf{t}, z)} e^{-\xi(\tilde{\partial}, z^{-1})}, & V_{\infty}^*(z) &= z^{-M} e^{-\xi(\mathbf{t}, z)} e^{\xi(\tilde{\partial}, z^{-1})}, \\ V_0(z) &= z^{-M} e^{\xi(\mathbf{t}^*, z^{-1})} e^{-\xi(\tilde{\partial}^*, z)}, & V_0^*(z) &= z^M e^{-\xi(\mathbf{t}^*, z^{-1})} e^{\xi(\tilde{\partial}^*, z)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\tilde{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_3}, \dots \right), \quad \tilde{\partial}^* = \left(\frac{\partial}{\partial t_1^*}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t_2^*}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_3^*}, \dots \right).$$

Функции Бейкера–Ахизера и сопряженные функции Бейкера–Ахизера имеют вид

$$\begin{aligned} w_{\infty}(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*, z) &= \frac{V_{\infty}(z)\tau}{\tau}, & w_{\infty}^*(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*, z) &= \frac{V_{\infty}^*(z)\tau}{\tau}, \\ w_0(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*, z) &= \frac{V_0(z)\tau(M+1)}{\tau(M)}, & w_0^*(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*, z) &= \frac{V_0^*(z)\tau(M-1)}{\tau(M)}, \end{aligned}$$

где τ задается формулой (3.4).

4. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИЯМИ ШУРА

4.1. Тау-функция КП $\tau_r(M, \mathbf{t}, \beta)$. Пусть r — это функция от одной переменной и оператор $D = z d/dz$ действует на базисе $\{z^n; n \in \mathbb{Z}\}$ функций, голоморфных в проколоте диске $0 < |z| < 1$. Положим тогда $r(D)z^n = r(n)z^n$. Все функции оператора D определяются своими собственными значениями относительно этого базиса. Рассмотрим теперь абелеву подалгебру в $\widehat{gl}(\infty)$, образованную фермионными операторами

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \psi^*(z) \left(\frac{1}{z} r(D) \right)^k \psi(z), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где оператор $r(D)$ действует справа на все функции от z . Другими словами,

$$A_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{n-k}^* \psi_n r(n) r(n-1) \dots r(n-k+1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

и тогда $[A_m, A_k] = 0$ для всех m, k . Фермионные операторы (4.1) похожи на гамильтонианы РТ H_k^* , определенные формулами (3.5); эти операторы совпадают с гамильтонианами, если $r(n) = 1$ для $n \in \mathbb{Z}$.

Для данного набора независимых переменных $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ определим сумму

$$A(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n A_n.$$

Для разбиения $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ и функции одной переменной r введем следующее обозначение:

$$r_{\mathbf{n}}(M) = \prod_{i=1}^k r(1-i+M) r(2-i+M) \dots r(n_i-i+M); \quad (4.2)$$

при этом будет предполагаться, что $r_0(M) = 1$.

ЛЕММА. *Имеет место равенство*

$$\langle 0 | \psi_{i_1}^* \dots \psi_{i_s}^* \psi_{-j_s} \dots \psi_{-j_1} e^{-A(\beta)} | 0 \rangle = (-1)^{j_1 + \dots + j_s} r_{\mathbf{n}}(0) s_{\mathbf{n}}(\beta),$$

где разбиение $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_{j_1})$ имеет вид

$$\mathbf{n} = (i_1, \dots, i_s \mid j_1 - 1, \dots, j_s - 1),$$

а $(\cdot \mid \cdot)$ – это другое обозначение для разбиения, введенное Фробениусом (см., например, [8]).

Доказательство проводится прямым вычислением с использованием разложения $e^A = 1 + A + A^2/2 + \dots$, формулы (4.1) и разложения $\mathbf{n}$ по крюкам.

Рассмотрим теперь тау-функцию (3.3) иерархии КП

$$\tau_r(M, \mathbf{t}, \beta) := \langle M | e^{H(\mathbf{t})} e^{-A(\beta)} | M \rangle. \quad (4.3)$$

Используя разложение Тейлора $e^H = 1 + H + \dots$ и лемму, приходим к следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеет место разложение*

$$\tau_r(M, \mathbf{t}, \beta) = \sum_{\mathbf{n}} r_{\mathbf{n}}(M) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) s_{\mathbf{n}}(\beta). \quad (4.4)$$

Вопрос о сходимости этого ряда не рассматривается. Переменные M и $\mathbf{t}$ суть старшие времена КП, а β – набор групповых времен для коммутирующей подалгебры дополнительных симметрий иерархии КП (см. [12]–[14] и замечание 7 из работы [15]). С другой точки зрения, выражение (4.4) – это тау-функция двумеризованной РТ [11] с двумя наборами непрерывных переменных $\mathbf{t}$ и β и с одной дискретной переменной M . Формула (4.4) симметрична относительно замены $\mathbf{t} \leftrightarrow \beta$. Эта “дуальность” порождает струнные уравнения [16], что характерно для тау-функции гипергеометрического типа (см. ниже).

Введем теперь переменные

$$\tilde{A}_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint \psi^*(z) (\tilde{r}(D)z)^k \psi(z), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tilde{A}(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n \tilde{A}_n. \quad (4.5)$$

Тогда имеем

$$\langle M | e^{\tilde{A}(\tilde{\beta})} e^{-A(\beta)} | M \rangle = \sum_{\mathbf{n}} (\tilde{r}r)_{\mathbf{n}}(M) s_{\mathbf{n}}(\tilde{\beta}) s_{\mathbf{n}}(\beta). \quad (4.6)$$

4.2. Гамильтониан $H_0(\mathbf{T})$, твистованные фермионы $\psi(\mathbf{T}, z)$ и $\psi^*(\mathbf{T}, z)$ и правила бозонизации. Положим $r \neq 0$, и пусть $r(n) = e^{T_{n-1}-T_n}$, где переменные T_n определены с точностью до константы, не зависящей от n . Определим гамильтониан $H_0(\mathbf{T}) \in \widehat{gl}(\infty)$ (все $T_n \in \mathbb{C}$ конечны) следующей формулой:

$$H_0(\mathbf{T}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n : \psi_n^* \psi_n :.$$

Этот гамильтониан порождает преобразование (3.2),

$$\begin{aligned} e^{\mp H_0(\mathbf{T})} \psi_n e^{\pm H_0(\mathbf{T})} &= e^{\pm T_n} \psi_n, & e^{\mp H_0(\mathbf{T})} \psi_n^* e^{\pm H_0(\mathbf{T})} &= e^{\mp T_n} \psi_n^*, \\ e^{H_0(\mathbf{T})} \tilde{A}(\tilde{\beta}) e^{-H_0(\mathbf{T})} &= H(\tilde{\beta}), & e^{-H_0(\mathbf{T})} A(\beta) e^{H_0(\mathbf{T})} &= -H^*(\beta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

При $r \neq 0$ можно ввести фермионные операторы

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{T}, z) &= e^{H_0(\mathbf{T})} \psi(z) e^{-H_0(\mathbf{T})} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-T_n} z^n \psi_n, \\ \psi^*(\mathbf{T}, z) &= e^{H_0(\mathbf{T})} \psi^*(z) e^{-H_0(\mathbf{T})} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{T_n} z^{-n-1} \psi_n^*. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для переменных $\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})$ и $\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)})$ и для “гамильтонианов” A и $\tilde{A}$, заданных формулами (4.1) и (4.5), получим правила бозонизации:

$$\begin{aligned} e^{-A(\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)}))} |M\rangle &= \frac{\psi(\mathbf{T}, y_1) \dots \psi(\mathbf{T}, y_N) |M - N\rangle}{\Delta^+(M, N, \mathbf{T}, \mathbf{y}_{(N)})}, \\ e^{-A(\mathbf{t}^{*-}(\mathbf{y}_{(N)}))} |M\rangle &= \frac{\psi^*(\mathbf{T}, y_1) \dots \psi^*(\mathbf{T}, y_N) |M + N\rangle}{\Delta^-(M, N, \mathbf{T}, \mathbf{y}_{(N)})}, \\ \langle M | e^{\tilde{A}(\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}))} &= \frac{\langle M - N | \psi^*(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_N) \dots \psi^*(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_1)}{\tilde{\Delta}^+(M, N, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{x}_{(N)})}, \\ \langle M | e^{\tilde{A}(\mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}))} &= \frac{\langle M + N | \psi(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_N) \dots \psi(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_1)}{\tilde{\Delta}^-(M, N, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{x}_{(N)})}, \end{aligned}$$

где $\tilde{T}_n$ связаны с $\tilde{A}$ (4.5) через $\tilde{r}(n) = e^{\tilde{T}_{n-1}-\tilde{T}_n}$. Коэффициенты Вандермонда имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta^+(M, N, \mathbf{T}, \mathbf{y}_{(N)}) &= \frac{\prod_{i < j} (y_i - y_j)}{(y_1 \dots y_N)^{N-M}} \frac{\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})}{\tau(M - N, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})}, \\ \Delta^-(M, N, \mathbf{T}, \mathbf{y}_{(N)}) &= \frac{\prod_{i < j} (y_i - y_j)}{(y_1 \dots y_N)^{M+N}} \frac{\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})}{\tau(M + N, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})}, \\ \tilde{\Delta}^+(M, N, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{x}_{(N)}) &= \frac{\prod_{i < j} (x_i - x_j)}{(x_1 \dots x_N)^{N-M-1}} \frac{\tau(M, \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{0})}{\tau(M - N, \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{0})}, \\ \tilde{\Delta}^-(M, N, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{x}_{(N)}) &= \frac{\prod_{i < j} (x_i - x_j)}{(x_1 \dots x_N)^{N+M-1}} \frac{\tau(M, \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{0})}{\tau(M + N, \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{0})}. \end{aligned}$$

Обозначение $\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})$ объясняется в п. 4.3 (см. (4.13)). Тогда можно переписать корреляторы (4.6) через переменные Мивы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle M | e^{\tilde{A}(\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}))} e^{-A(\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)}))} | M \rangle &= \\ &= \frac{\langle M - N | \psi^*(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_N) \dots \psi^*(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_1) \psi(\mathbf{T}, y_1) \dots \psi(\mathbf{T}, y_N) | M - N \rangle}{\tilde{\Delta}^+(M, N, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{x}_{(N)}) \Delta^+(M, N, \mathbf{T}, \mathbf{y}_{(N)})}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \langle M | e^{\tilde{A}(\mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}))} e^{-A(\mathbf{t}^{*-}(\mathbf{y}_{(N)}))} | M \rangle &= \\ &= \frac{\langle M + N | \psi(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_N) \dots \psi(-\tilde{\mathbf{T}}, 1/x_1) \psi^*(\mathbf{T}, y_1) \dots \psi^*(\mathbf{T}, y_N) | M + N \rangle}{\tilde{\Delta}^-(M, N, \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{x}_{(N)}) \Delta^-(M, N, \mathbf{T}, \mathbf{y}_{(N)})}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3. Тау-функция РТ $\tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*)$. Рассмотрим теперь тау-функцию РТ (3.4), которая зависит от трех наборов переменных $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{t}^*$ и от $M \in \mathbb{Z}$:

$$\tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*) = \left\langle M \left| e^{H(\mathbf{t})} \exp \left(\sum_{-\infty}^{\infty} T_n : \psi_n^* \psi_n : \right) e^{H^*(\mathbf{t}^*)} \right| M \right\rangle, \quad (4.11)$$

где $: \psi_n^* \psi_n : = \psi_n^* \psi_n - \langle 0 | \psi_n^* \psi_n | 0 \rangle$. Поскольку оператор $\sum_{-\infty}^{\infty} : \psi_n^* \psi_n :$ коммутирует со всеми элементами алгебры $\hat{gl}(\infty)$, то можно положить $T_{-1} = 0$ в (4.11). Времена T_n суть интегралы движения относительно динамики иерархий КП и РТ. Для каждой пары времен (t_m, T_n) получается уравнение Лиувилля, связанное с тау-функцией (4.11) (см. приложение Б), а переменные $\mathbf{t}^*$ суть интегралы движения этих уравнений Лиувилля.

Как будет показано ниже, гипергеометрические функции (2.1), (2.2), (2.4) и (2.6) представляются в виде отношений тау-функций (4.11), взятых при специальных значениях индекса M и времен $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{t}^*$. Это верно, только если все параметры a_k гипергеометрических функций не являются целыми числами. В случае, когда хотя бы один из индексов a_k становится целым числом, возникает тау-функция открытой РТ, которая рассматривается в п. 4.4, 4.5.

Тот факт, что тау-функция (4.11) линейна по каждой экспоненте e^{T_n} , описывается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} \frac{\tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*)}{\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})} &= \\ &= 1 + \sum_{\mathbf{n} \neq \mathbf{0}} e^{(T_{M-1} - T_{n_1 + M-1}) + (T_{M-2} - T_{n_2 + M-2}) + \dots + (T_{M-l} - T_{n_l + M-l})} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^*), \end{aligned}$$

где суммирование идет по всем возможным разбиениям $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_l)$, $l = 1, 2, 3, \dots$, кроме тривиального разбиения $\mathbf{0}$.

Пусть $r \neq 0$ и $\tilde{r} \neq 0$. Тогда можно положить

$$r(n) = e^{T_{n-1} - T_n}, \quad \tilde{r}(n) = e^{\tilde{T}_{n-1} - \tilde{T}_n}. \quad (4.12)$$

Покажем эквивалентность представлений (4.6) и (4.4) в этом случае. Имеем

$$\tau(n, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0}) = \begin{cases} e^{T_{n-1} + \dots + T_1 + T_0}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ e^{-T_n - \dots - T_{-2} - T_{-1}}, & n < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\tau(n, \tilde{\beta}, \mathbf{T}, \beta)$ – это тау-функция PT (4.11), а $\tau_{\tilde{r}r}(n, \tilde{\beta}, \beta)$ определяется формулой (4.6), в которой величины $\tilde{r}$, r , $\mathbf{T}$ и $\tilde{\mathbf{T}}$ связаны формулами (4.12). Если функции r и $\tilde{r}$ не обращаются в нуль ни при каких целых значениях своего аргумента, то

$$\frac{\tau(n, \tilde{\beta}, \tilde{\mathbf{T}} + \mathbf{T}, \beta)}{\tau(n, \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{T}} + \mathbf{T}, \mathbf{0})} = \langle n | e^{\tilde{A}(\tilde{\beta})} e^{-A(\beta)} | n \rangle = \tau_{\tilde{r}r}(n, \tilde{\beta}, \beta).$$

Доказательство предложения следует из формул (4.7).

В случае $\tilde{r} = 1$ можно положить $\tilde{\beta} = \mathbf{t}$. Тогда выполняются следующие уравнения:

$$\partial_{t_1} \partial_{\beta_1} \phi_n = r(n) e^{\phi_{n-1} - \phi_n} - r(n+1) e^{\phi_n - \phi_{n+1}}, \quad e^{-\phi_n} = \frac{\tau_r(n+1, \mathbf{t}, \beta)}{\tau_r(n, \mathbf{t}, \beta)}, \quad (4.14)$$

$$\tau(n) \partial_{\beta_1} \partial_{t_1} \tau(n) - \partial_{t_1} \tau(n) \partial_{\beta_1} \tau(n) = r(n) \tau(n-1) \tau(n+1), \quad \tau(n) := \tau_r(n, \mathbf{t}, \beta). \quad (4.15)$$

Эти уравнения остаются справедливыми и в случае, когда функции $r(n)$ могут обращаться в нуль.

Если функция r не имеет целых нулей, то после замены переменных $\varphi_n = -\phi_n - T_n$ придем к стандартному уравнению РТ [11]

$$\partial_{t_1} \partial_{t_1^*} \varphi_n = e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n} - e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}}. \quad (4.16)$$

Переменные T_n могут быть интерпретированы как асимптотические значения полей ϕ_n для тау-функций вида (4.11), которые характеризуются тем свойством, что $\varphi_n \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow 0$.

4.4. Решетка Тоды, состоящая из открытых частей. Рассмотрим теперь тау-функцию (4.11) с модифицирующими потоками. Введем следующую функцию:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } r(n) = 0, \\ 1, & \text{если } r(n) \neq 0. \end{cases}$$

Имея набор целых нулей $\mathbf{m}$ функции r ,

$$\mathbf{m} = \{M_i \in \mathbb{Z}\}, \quad M_{i+1} > M_i, \quad r(M_i) = 0, \quad (4.17)$$

можно построить гамильтонианы, зависящие от таких наборов $\mathbf{m}$:

$$\begin{aligned} H_{-k}(\mathbf{m}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)\delta(n-1)\dots\delta(n-k+1)\psi_n\psi_{n-k}^*, & H^*(\mathbf{m}; \beta) &= \sum H_{-k}(\mathbf{m})\beta_k, \\ H_k(\mathbf{m}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n+1)\delta(n+2)\dots\delta(n+k)\psi_n\psi_{n+k}^*, & H(\mathbf{m}; \mathbf{t}) &= \sum H_k(\mathbf{m})t_k. \end{aligned}$$

Искомая тау-функция открытой РТ (см. ниже (4.19)) имеет три эквивалентных представления:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}; M, \mathbf{t}, \beta) &= \left\langle M \left| e^{H(\mathbf{t})} \exp\left(\sum_{-\infty}^{\infty} T_n \psi_n^* \psi_n\right) e^{H^*(\mathbf{m}; \beta)} \right| M \right\rangle = \\ &= \left\langle M \left| e^{H(\mathbf{m}; \mathbf{t})} \exp\left(\sum_{-\infty}^{\infty} T_n \psi_n^* \psi_n\right) e^{H(\beta)} \right| M \right\rangle = \\ &= \left\langle M \left| e^{H(\mathbf{m}; \mathbf{t})} \exp\left(\sum_{-\infty}^{\infty} T_n \psi_n^* \psi_n\right) e^{H(\mathbf{m}; \beta)} \right| M \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.18)$$

в которых константы $T_n \in \mathbb{C}$ играют роль времен. Эта тау-функция обладает тем свойством, что

$$M_i \in \mathbf{m} \Rightarrow \tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}; M_i, \mathbf{t}, \beta) = 1$$

при всех значениях времен $\mathbf{t}$ и β . Задав функцию

$$\varphi_n = \ln \frac{\tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}; n+1, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \beta)}{\tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}; n, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \beta)},$$

получим уравнение открытой РТ:

$$\partial_{t_1} \partial_{\beta_1} \varphi_n = \delta(n) e^{\varphi_{n-1} - \varphi_n} - \delta(n+1) e^{\varphi_n - \varphi_{n+1}}. \quad (4.19)$$

Совокупность полей φ_n задает решение набора задач на открытых решетках, заданных на наборе интервалов (на каждом интервале при этом задается своя задача):

$$\{\varphi_n : n < M_1\}, \quad (4.20)$$

$$\{\varphi_n : M_i \leq n < M_{i+1}, M_{i+1} - M_i > 1\}, \quad (4.21)$$

$$\{\varphi_n : n > M_s\}. \quad (4.22)$$

Соответствующая тау-функция описывает набор открытых РТ, включающий в себя РТ с конечными длинами $M_{i+1} - M_i$, расположенные между парами соседних нулей M_{i+1} и M_i , и две полубесконечные РТ, заданные на интервалах (4.20) и (4.22).

4.5. Свойства функции τ_r в случае, когда $r(n)$ имеет нули. Введем набор переменных T_n , используя соотношения

$$r(n) = e^{T_{n-1} - T_n} \quad (4.23)$$

для всех тех n , для которых $r(n) \neq 0$. Уравнения (4.23) определяют переменные T_n с точностью до постоянной интегрирования в каждом из интервалов (число постоянных равно числу интервалов)

$$\{T_n : n < M_1\}, \quad (4.24)$$

$$\{T_n : M_i \leq n < M_{i+1}, M_{i+1} - M_i > 1\}, \quad (4.25)$$

$$\{T_n : M_s \leq n\}. \quad (4.26)$$

В случае, когда $M_{i+1} = M_i + 1$, также можно определить переменные T_{M_i} , но они не исследуются ввиду тривиальности задач, связанных с такими интервалами.

Введем гамильтониан

$$H_0(\mathbf{T}) = \sum_n T_n : \psi_n^* \psi_n :,$$

в котором суммирование идет по всем n таким, что T_n принадлежит одному из наборов (4.24), (4.25) или (4.26). Получим

$$A_k = -e^{H_0(\mathbf{T})} H_{-k}(\mathbf{m}) e^{-H_0(\mathbf{T})}, \quad A(\beta) = -e^{H_0(\mathbf{T})} H^*(\mathbf{m}, \beta) e^{-H_0(\mathbf{T})}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $\tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}, n, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \beta)$ есть тау-функция РТ (4.18), $\tau_r(n, \mathbf{t}, \beta)$ задана формулой (4.3), в которой величины r и $\mathbf{T}$ связаны соотношением (4.23) при $r \neq 0$, а функции r имеют нули при целых значениях аргумента (4.17), то

$$\frac{\tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}, n, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \beta)}{\tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}, n, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})} = \langle n | e^{H(\mathbf{t})} e^{-A(\beta)} | n \rangle = \tau_r(n, \mathbf{t}, \beta).$$

Уравнения (4.14) и (4.15) выполнены также и в случае, когда функция $r(n)$ имеет целые нули.

Уравнение Хироты (4.15) можно интерпретировать как рекуррентное соотношение, выражающее тау-функцию с дискретной переменной РТ n через величины $\tau_r(M_i \pm 1, \mathbf{t}, \beta)$ и $\tau_r(M_i, \mathbf{t}, \beta) = 1$. Из формул (4.2) и (4.4) следует, что

$$r(M_k) = 0 \Rightarrow \tau_r(M_k, \mathbf{t}, \beta) = 1.$$

Далее, из формул (4.2) и (4.4) следует, что ряды (4.4) содержат лишь конечное число ненулевых членов в интервалах (4.21). В области (4.22) суммирование идет только по диаграммам Юнга $\mathbf{n}$ длины $l(\mathbf{n}) < M - M_1$. Наконец, в области (4.20) в ряд (4.4) дают вклад только те диаграммы $\mathbf{n}$, для которых сопряженные диаграммы $\mathbf{n}'$ имеют длины $l(\mathbf{n}') \leq M_s - M$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Есть два различных способа выделить из суммы (4.4) сумму по разбиениям длины $l(\mathbf{n}) \leq N$ (либо $l(\mathbf{n}') \leq N$ для сопряженных разбиений). Второй способ связан с использованием мивовской замены переменных.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Для сокращения записи опустим дополнительный аргумент $\mathbf{m}$ и нижний индекс, различающий тау-функции РТ (4.11) и тау-функции открытых РТ (4.18). Вместо $\tau_{\text{ор}}(\mathbf{m}, n, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*)$ будем писать $\tau(n, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*)$. С помощью $\tau_r(M, \mathbf{t}, \beta)$ будем теперь обозначать только тау-функцию КП (4.3). Также положим $\beta = \mathbf{t}^*$. В случае, когда старшие времена РТ выражаются с помощью мивовской замены переменных (3.7) или (3.8), будем вместо времен $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}^*$ подставлять соответствующие аргументы $\mathbf{x}_{(N)}$ и $\mathbf{y}_{(N)}$, т.е. будем использовать обозначения $\tau_r(M, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{t}^*)$, $\tau_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{y}_{(N)})$ или $\tau_r(M, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)})$.

4.6. Действие вершинных операторов. Выведем теперь соотношения между гипергеометрическими функциями, которые следуют из теории солитонов (см., например, [13], [14]). Для этого введем операторы, действующие на функции от переменных $\mathbf{t}$:

$$\begin{aligned}\Omega_r^{(\infty)}(\mathbf{t}^*) &:= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint V_{\infty}^*(z + \epsilon) \xi_r^{(\infty)}(\mathbf{t}^*, z, D) V_{\infty}(z) dz, \\ \Omega_r^{(0)}(\mathbf{t}) &:= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint V_0(z + \epsilon) \xi_r^{(0)}(\mathbf{t}, z, D) V_0^*(z) z^{-2} dz,\end{aligned}$$

где $V_{\infty}(z)$, $V_{\infty}^*(z)$, $V_0(z)$ и $V_0^*(z)$ определены формулами (3.9). Например, получим

$$\Omega_r^{(\infty)}(\mathbf{t}^*) = \Omega_r^{(0)}(\mathbf{t}) = \sum_{n>0} n t_n t_n^*, \quad r = 1,$$

и, в частности, можно получить формулы для сдвига аргументов тау-функции (4.4):

$$e^{\Omega_r^{(\infty)}(\gamma)} \tau_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \tau_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^* + \gamma), \quad e^{\Omega_r^{(0)}(\gamma)} \tau_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \tau_r(M, \mathbf{t} + \gamma, \mathbf{t}^*). \quad (4.27)$$

Кроме того, получим

$$\exp\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n Z_{nn}\right) \tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*) = \exp\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n Z_{nn}^*\right) \tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*) = \tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T} + \gamma, \mathbf{t}^*), \quad (4.28)$$

где

$$Z_{nn} = -\frac{1}{4\pi^2} \oint \frac{z^n}{z^{*n}} V_{\infty}^*(z^*) V_{\infty}(z) dz dz^*, \quad Z_{nn}^* = -\frac{1}{4\pi^2} \oint \frac{z^n}{z^{*n}} V_0^*(z^*) V_0(z) dz dz^*.$$

Например,

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{-\infty}^{\infty} T_n Z_{nn}\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n t_n t_n^*\right) &= \\ &= \exp\left(\sum_{-\infty}^{\infty} T_n Z_{nn}^*\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n t_n t_n^*\right) = \tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*).\end{aligned}$$

4.7. Линейные уравнения для τ_r . Выведем теперь линейные уравнения, которые следуют из явного фермионного представления для тау-функции (4.3) с помощью формул бозонизации (4.9) и (4.10). Эти уравнения можно также интерпретировать как связи, приводящие к струнным уравнениям. Поскольку $\langle M | A = 0$ и под знаком фермионного коррелятора (4.9) выполнено соотношение $A_k = e^{H_0} H_{-k} e^{-H_0}$, то на тау-функцию (4.4), выраженную в терминах параметров $\mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)})$, получаются линейные уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial \tau_r(M, \mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^*)}{\partial t_k^*} = \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left(\sum_{i=1}^N (x_i r(-D_{x_i}))^k \right) \tilde{\Delta} \tau_r(M, \mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^*), \quad (4.29)$$

где $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}^-(M, N, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{(N)})$. Эти уравнения суть не что иное, как струнные уравнения связи на тау-функцию (4.4). Можно переписать (4.29) через переменные $\mathbf{t}^{*-}(\mathbf{y}_{(\infty)})$:

$$\begin{aligned} (-1)^k \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{e_{k-1}(1/y_1, \dots, 1/y_{i-1}, 1/y_{i+1}, \dots)}{\prod_{j \neq i} (1 - y_i/y_j)} \frac{\partial \tau_r(M, \mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^{*-}(\mathbf{y}_{(\infty)}))}{\partial y_i} = \\ = \frac{1}{\tilde{\Delta}} \left(\sum_{i=1}^N (x_i r(-D_{x_i}))^k \right) \tilde{\Delta} \tau_r(M, \mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^{*-}(\mathbf{y}_{(\infty)})), \end{aligned}$$

где $e_k(\mathbf{y})$ – симметричная функция, определенная соотношением

$$\prod_{i=1}^{+\infty} (1 + ty_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e_k(\mathbf{y}).$$

Также получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{M+N-1} k - \sum_{i=1}^N D_{x_i} \right) \tilde{\Delta}^- \tau(M, \mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{T}, \mathbf{t}^{*-}(\mathbf{y}_{(N')})) \Delta^- = \\ = \left(\sum_{k=1}^{M+N'-1} k - \sum_{i=1}^{N'} \left(\frac{1}{y_i} D_{y_i} y_i \right) \right) \tilde{\Delta}^- \tau(M, \mathbf{t}^-(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{T}, \mathbf{t}^{*-}(\mathbf{y}_{(N')})) \Delta^-, \quad (4.30) \end{aligned}$$

где $\tilde{\Delta}^- = \tilde{\Delta}^-(M, N, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{(N)})$ и $\Delta^- = \Delta^-(M, N, \mathbf{0}, \mathbf{y}_{(N')})$. Эту формулу можно получить, если вставить в фермионный коррелятор фермионный оператор $\text{res}_z : \psi^*(z) z (d/dz) \psi(z) :$. Эти формулы также могут быть записаны в терминах старших времен иерархий КП и РТ, если использовать представление вершинных операторов (см. п. 4.6). В этом случае соотношение (4.29) становится инфинитезимальной версией соотношения (4.27), а соотношение (4.30) – инфинитезимальной версией соотношения (4.28).

4.8. Детерминантное представление. С помощью теоремы Вика [4] можно получить следующие два предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Обобщенная детерминантная формула Милна имеет вид*

$$\tau_r(M, \mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}), \beta) = \frac{\det(x_i^{N-k} \tau_r(M - k + 1, \mathbf{t}^+(x_i), \beta))_{i,k=1}^N}{\det(x_i^{N-k})_{i,k=1}^N}. \quad (4.31)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Применяя к тау-функции $\tau_r(M, \mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)}))$ теорему Вика при $r \neq 0$, получим детерминантную формулу*

$$\tau_r(M, \mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)})) = \frac{\det(F(x_i y_j))_{i,j=1}^N}{\tilde{\Delta}^+(M, N, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{(N)}) \Delta^+(M, N, \mathbf{T}, \mathbf{y}_{(N)})},$$

в которой

$$F(x_i y_j) = \left\langle M - N \mid \psi^* \left(\frac{1}{x_i} \right) \psi(\mathbf{T}, y_j) \mid M - N \right\rangle.$$

4.9. Интегральные представления. Легко получить соотношения для фермионов (4.8),

$$\int \psi(\mathbf{T}, \alpha z) d\mu(\alpha) = \psi(\mathbf{T} + \mathbf{T}(\mu), z), \quad \int \psi^* \left(-\mathbf{T}, \frac{1}{\alpha z} \right) d\tilde{\mu}(\alpha) = \psi^* \left(-\mathbf{T} - \mathbf{T}(\tilde{\mu}), \frac{1}{z} \right),$$

где μ и $\tilde{\mu}$ — меры интегрирования, а сдвиги времен T_n задаются в терминах моментов:

$$\int \alpha^n d\mu(\alpha) = e^{-T_n(\mu)}, \quad \int \alpha^n d\tilde{\mu}(\alpha) = e^{-T_n(\tilde{\mu})}.$$

Теперь с использованием формул бозонизации (4.9) получим соотношения для тау-функции (набор переменных $\mathbf{t}^*$ задан преобразованием Мивы (3.7)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Имеет место формула для интегрального представления*

$$\begin{aligned} & \int \tilde{\Delta}_{\tilde{\mathbf{T}}}(\tilde{\alpha} \mathbf{x}_{(N)}) \frac{\tau(M, \mathbf{t}^+(\tilde{\alpha} \mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{t}^{*+}(\alpha \mathbf{y}_{(N)}))}{\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{0})} \times \\ & \times \Delta_{\mathbf{T}}(\alpha \mathbf{y}_{(N)}) \prod_{i=1}^N d\tilde{\mu}(\tilde{\alpha}_i) \prod_{i=1}^N d\mu(\alpha_i) = \tilde{\Delta}_{\tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{\mu})}(\mathbf{x}_{(N)}) \times \\ & \times \frac{\tau(M, \mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{\mu}) + \mathbf{T}(\mu), \mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)}))}{\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T} + \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}(\tilde{\mu}) + \mathbf{T}(\mu), \mathbf{0})} \Delta_{\mathbf{T} + \mathbf{T}(\mu)}(\mathbf{y}_{(N)}), \quad (4.32) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{T}}(\alpha \mathbf{y}_{(N)}) &= \Delta^+(M, N, \mathbf{T}, \alpha \mathbf{y}_{(N)}), & \tilde{\Delta}_{\tilde{\mathbf{T}}}(\tilde{\alpha} \mathbf{x}_{(N)}) &= \tilde{\Delta}^+(M, N, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\alpha} \mathbf{x}_{(N)}), \\ \alpha \mathbf{y}_{(N)} &= (\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2, \dots, \alpha_N y_N), & \tilde{\alpha} \mathbf{x}_{(N)} &= (\tilde{\alpha}_1 x_1, \tilde{\alpha}_2 x_2, \dots, \tilde{\alpha}_N x_N). \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} \int \frac{\tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^{*+}(\alpha \mathbf{y}_{(N)}))}{\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})} \Delta_{\mathbf{T}}(\alpha \mathbf{y}_{(N)}) \prod_{i=1}^N d\mu(\alpha_i) = \\ = \frac{\tau(M, \mathbf{t}, \mathbf{T} + \mathbf{T}(\mu), \mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)}))}{\tau(M, \mathbf{0}, \mathbf{T} + \mathbf{T}(\mu), \mathbf{0})} \Delta_{\mathbf{T} + \mathbf{T}(\mu)}(\mathbf{y}_{(N)}). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Напомним, что произвольная линейная комбинация тау-функций не является тау-функцией. Формулы (4.32) и (4.33) задают интегральные представления для тау-функции (4.3). Более того, с помощью этих формул можно выразить тау-функцию в терминах более простой тау-функции. Выбирая меры интегрирования в виде

$$\frac{i}{2\pi} \int_C \psi(\mathbf{T}, -\alpha^{-1}z) e^{-\alpha} (-\alpha)^{-b-1} d\alpha = \psi(\mathbf{T} + \mathbf{T}^b, z), \quad (4.34)$$

$$\int_0^\infty \psi(\mathbf{T}, \alpha z) e^{-\alpha} \alpha^a d\alpha = \psi(\mathbf{T} + \mathbf{T}^a, z), \quad (4.35)$$

$$\int_0^1 \psi(\mathbf{T}, \alpha z) \alpha^a (1-\alpha)^{b-a-1} d\alpha = \psi(\mathbf{T} + \mathbf{T}^c, z) \quad (4.36)$$

(контур C начинается в точке $+\infty$ на вещественной оси и обходит начало координат против часовой стрелки, прежде чем вернуться в начальную точку), получим

$$T_n^b = \ln \Gamma(b+n+1), \quad T_n^a = -\ln \Gamma(a+n+1), \quad T_n^c = \ln \frac{\Gamma(b+n+1)}{\Gamma(a+n+1)\Gamma(b-a)}. \quad (4.37)$$

Рассмотрим также q -интегралы [7]

$$q^{-(a+n)(a+n+1)} \int_0^\infty \psi(\mathbf{T}, \alpha(1-q)z) E_q(-\alpha) \alpha^a d_q \alpha = \psi(\mathbf{T} + \mathbf{T}(a, q), z), \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{\Gamma_q(b-a)} \int_0^1 \psi(\mathbf{T}, \alpha z) \alpha^a \frac{(\alpha q; q)_\infty}{(\alpha q^{b-a}; q)_\infty} d_q \alpha = \psi(\mathbf{T} + \mathbf{T}(a, b, q), z). \quad (4.39)$$

Тогда

$$T_n(a, q) = \ln \frac{1}{(1-q)^n \Gamma_q(a+n+1)}, \quad T_n(a, b, q) = \ln \frac{\Gamma_q(b+n+1)}{\Gamma_q(a+n+1)}.$$

Подобным образом можно исследовать мивовскую замену переменных (3.8). В нижеприведенных примерах гипергеометрические функции, перечисленные в разделе 2, представлены как тау-функции вида (4.9). Затем будут написаны интегральные формулы (4.33), с помощью которых функции ${}_{p+1}\Phi_s$ и ${}_{p+1}\Phi_{s+1}$ можно выразить через ${}_p\Phi_s$ с использованием интегралов (4.38), (4.39) и (4.32). Другое интегральное представление, основанное на введенном Ашки и Каделлом q -аналоге интеграла Сельберга, было найдено в работе [9]. Производя предельный переход $q \rightarrow 1$, можно рассмотреть функции ${}_pF_s$. После этого, исходя из выражений (4.37), можно выразить функции ${}_{p+1}\mathcal{F}_s$, ${}_{p+1}\mathcal{F}_{s+1}$ и ${}_p\mathcal{F}_{s+1}$ через интегралы от ${}_p\mathcal{F}_s$ с использованием соответствующих формул (4.35), (4.36) и (4.34).

4.10. Примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $r = 1$. Тогда можно положить $\mathbf{T} = 0$, что дает

$$\tau_{r=1}(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \sum_{\mathbf{n}} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^*) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} n t_n t_n^* \right), \quad (4.40)$$

и это выражение есть не что иное, как вакуумная тау-функция двумеризованной РТ. Формула (4.40) также задает формулу суммирования функций Шура [7]. Полагая $\mathbf{t} = \mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})$ и $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^+(\mathbf{y}_{(N)})$ и используя формулу (3.7), получим функцию ${}_1\mathcal{F}_0(N; \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)})$ (см. (2.6)).

ПРИМЕР 2. Положим $r(n) = n$, т.е. $T_n = \ln(1/n!)$ при $n \geq 0$ и $T_n = \ln(-1)^n(-n-1)!$ при $n < 0$, а также выберем $\mathbf{t}^* = (t_1^*, 0, 0, \dots)$. Тогда для $M = 0, \pm 1$ получим

$$\tau_r(0, \mathbf{t}, t_1^*) = 1, \quad \tau_r(1, \mathbf{t}, t_1^*) = e^{\xi(\mathbf{t}, t_1^*)}, \quad \tau_r(-1, \mathbf{t}, t_1^*) = e^{-\xi(\mathbf{t}, t_1^*)}, \quad (4.41)$$

где t_1^* играет роль спектрального параметра для вакуумной функции Бейкера–Ахизера, что находится в согласии с интерпретацией величины t_1^* как группового времени преобразования Галилея [15].

Можно получить аналогичные формулы $\tau = e^{\pm \xi(\mathbf{t}, z^*)}$, подставив $t_n^* = \pm n^{-1}(z^*)^n$ в соотношение (4.40).

Выражения (4.41) суть функции ${}_1F_0(0; t_1, t_2, \dots)$, ${}_1F_0(1; t_1, t_2, \dots)$ и ${}_1F_0(-1; t_1, t_2, \dots)$ (2.8), описанные в примере 3 (см. ниже (4.43)).

ПРИМЕР 3. Полагая, что все параметры b_k не являются целыми числами, получим

$${}^p r_s(D) = \frac{(D + a_1)(D + a_2) \dots (D + a_p)}{(D + b_1)(D + b_2) \dots (D + b_s)}.$$

Если ни один из параметров a_k также не является целым числом, то соответствующая величина $\mathbf{T}$ имеет вид

$${}^p T_n^s = -\ln \frac{\Gamma(n + a_1 + 1) \Gamma(n + a_2 + 1) \dots \Gamma(n + a_p + 1)}{\Gamma(n + b_1 + 1) \Gamma(n + b_2 + 1) \dots \Gamma(n + b_s + 1)},$$

а коррелятор (4.4) становится равным

$$\frac{{}^p \tau^s(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*)}{{}^p \tau^s(M, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})} = {}^p \tau_r^s(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \sum_{\mathbf{n}} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^*) \frac{(a_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (a_p + M)_{\mathbf{n}}}{(b_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (b_s + M)_{\mathbf{n}}}. \quad (4.42)$$

Если теперь в формуле (4.42) положить

$$t_1^* = 1, \quad t_i^* = 0, \quad i > 1,$$

то $s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}^*) = H_{\mathbf{n}}^{-1}$, и получается гипергеометрическая функция, связанная с функциями Шура [7] (см. [8]),

$$\begin{aligned} \frac{{}_p\tau_r^s(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*)}{{}_p\tau_r^s(M, \mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})} &= {}^p\tau_r^s(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = {}_pF_s \left(\begin{matrix} a_1 + M, \dots, a_p + M \\ b_1 + M, \dots, b_s + M \end{matrix} \middle| t_1, t_2, \dots \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{n}} \frac{(a_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (a_p + M)_{\mathbf{n}} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})}{(b_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (b_s + M)_{\mathbf{n}} H_{\mathbf{n}}}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где $H_{\mathbf{n}}$ – крюковое произведение (ср. (2.5)),

$$H_{\mathbf{n}} = \prod_{(i,j) \in \mathbf{n}} h_{ij}, \quad h_{ij} = n_i + n'_j - i - j + 1.$$

Таким образом, если положить $a_1 = 0$, $\mathbf{t} = (t_1, 0, 0, \dots)$ и $\mathbf{t}^* = (t_1^*, 0, 0, \dots)$, получим обыкновенную гипергеометрическую функцию одной переменной

$${}_{p-1}F_s(a_2, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; \pm t_1 t_1^*) = \tau_r(\pm 1, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*). \quad (4.44)$$

В переменных $\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})$ формула (4.43) принимает вид

$$\begin{aligned} {}^p\tau_r^s(M, \mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^*) &= {}_pF_s \left(\begin{matrix} a_1 + M, \dots, a_p + M \\ b_1 + M, \dots, b_s + M \end{matrix} \middle| \mathbf{x}_{(N)} \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{n}} \frac{(a_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (a_p + M)_{\mathbf{n}} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)})}{(b_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (b_s + M)_{\mathbf{n}} H_{\mathbf{n}}}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Тем самым получается гипергеометрическая функция (2.8), связанная с зональными многочленами симметрического пространства $GL(N, C)/U(N)$ [6]. Здесь $x_i = z_i^{-1}$, $i = 1, \dots, N$, – собственные значения матрицы $\mathbf{X}$, и для зональных сферических многочленов существует представление в терминах матричных интегралов:

$$Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{X}) = Z_{\mathbf{n}}(\mathbf{I}_N) \int_{U(N, C)} \Delta^{\mathbf{n}}(U^* \mathbf{X} U) d_* U,$$

где $\Delta^{\mathbf{n}}(\mathbf{X}) = \Delta_1^{n_1 - n_2} \Delta_2^{n_2 - n_3} \dots \Delta_N^{n_N}$, $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ – старшие миноры матрицы $\mathbf{X}$, а $d_* U$ – инвариантная мера на множестве матриц $U(N, C)$ (см. [6]).

Полагая $N = 1$, получим обыкновенную гипергеометрическую функцию одной переменной $x = x_1$ (ср. (4.44)). Обыкновенная гипергеометрическая функция удовлетворяет стандартному гипергеометрическому уравнению

$$(\partial_x - {}_p r_s(D)) {}_p F_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; x) = 0, \quad D := x \partial_x, \quad (4.46)$$

которое оказывается полезным для прояснения смысла функции r .

Известно, что ряд (4.45) расходится при $p > s + 1$ (если ни один из параметров $a_i + M$ не является неположительным целым числом). В случае $p = s + 1$ этот ряд сходится в окрестности $\mathbf{x}_{(N)} = \mathbf{0}$. При $p < s + 1$ ряд (4.45) сходится при всех $\mathbf{x}_{(N)}$. Эти известные факты (см., например, [7]) могут также быть получены из детерминантного представления (4.31) и свойств функции (2.1).

ПРИМЕР 4. Для того чтобы построить гипергеометрическую функцию, зависящую от двух наборов переменных $\mathbf{x}_{(N)}$ и $\mathbf{y}_{(N)}$, положим

$${}_p r_s(D) = \frac{\prod_{i=1}^p (a_i + D)}{\prod_{i=1}^s (b_i + D)} \frac{1}{N - M + D},$$

$$e^{-T_n} = \frac{1}{\Gamma(N - M + n + 1)} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + n + 1)}{\prod_{i=1}^s \Gamma(b_i + n + 1)}.$$

Тогда для переменных $\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})$ и $\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)})$ получим (см. раздел 3 книги [8] и формулу (2.8))

$$\begin{aligned} \langle M | e^{H(\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}))} e^{A(\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)}))} | M \rangle &= {}_p \mathcal{F}_s \left(\begin{matrix} a_1 + M, \dots, a_p + M \\ b_1 + M, \dots, b_s + M \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) = \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{n} \\ l(\mathbf{n}) \leq N}} \frac{s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}_{(N)})}{(N)_{\mathbf{n}}} \frac{(a_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (a_p + M)_{\mathbf{n}}}{(b_1 + M)_{\mathbf{n}} \dots (b_s + M)_{\mathbf{n}}}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 5. q -Обобщение примера 3 имеет вид

$${}_p r_s^{(q)}(D) = \frac{\prod_{i=1}^p (1 - q^{a_i + D})}{\prod_{i=1}^s (1 - q^{b_i + D})}. \quad (4.47)$$

В терминах переменных $\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})$ и величин

$$y_k = q^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad t_m^* = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y_k^m}{m} = \frac{1}{m(1 - q^m)}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

получим гипергеометрическую функцию Милна (2.4):

$$\begin{aligned} \langle M | e^{H(\mathbf{t})} e^{A(\mathbf{t}^*)} | M \rangle &= {}_p \Phi_s \left(\begin{matrix} a_1 + M, \dots, a_p + M \\ b_1 + M, \dots, b_s + M \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)} \right) = \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{n} \\ l(\mathbf{n}) \leq N}} \frac{(q^{a_1 + M}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{a_p + M}; q)_{\mathbf{n}}}{(q^{b_1 + M}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{b_s + M}; q)_{\mathbf{n}}} \frac{q^{n(\mathbf{n})}}{H_{\mathbf{n}}(q)} s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}). \end{aligned} \quad (4.48)$$

ПРИМЕР 6. Для того чтобы получить гипергеометрическую функцию Милна, зависящую от двух наборов переменных $\mathbf{x}_{(N)}$ и $\mathbf{y}_{(N)}$, используем представление $\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})$ и $\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)})$. Тогда ненулевой вклад в искомую сумму будут давать только те разбиения $\mathbf{n}$, для которых $l(\mathbf{n}) \leq N$. Положим

$${}_p r_s^{(q)}(n) = \frac{\prod_{i=1}^p (1 - q^{a_i + n})}{\prod_{i=1}^s (1 - q^{b_i + n})} \frac{1}{1 - q^{N - M + n}},$$

$$e^{-T_n} = \frac{1}{(1 - q)^n \Gamma_q(n + N - M + 1)} \frac{\prod_{i=1}^p (1 - q)^n \Gamma_q(a_i + n + 1)}{\prod_{i=1}^s (1 - q)^n \Gamma_q(b_i + n + 1)}, \quad (4.49)$$

где $\Gamma_q(a)$ — q -деформированная гамма-функция,

$$\Gamma_q(a) = (1-q)^{1-a} \frac{(q; q)_\infty}{(q^a; q)_\infty}, \quad (q^a; q)_n = (1-q)^n \frac{\Gamma_q(a+n)}{\Gamma_q(a)}.$$

Теперь получается формула Милна (2.7) (см. раздел 3 книги [8]):

$$\begin{aligned} \tau_r(M, \mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}), \mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)})) &= {}_p\Phi_s \left(\begin{matrix} a_1 + M, \dots, a_p + M \\ b_1 + M, \dots, b_s + M \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) = \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{n} \\ l(\mathbf{n}) \leq N}} \frac{q^{n(\mathbf{n})}}{H_{\mathbf{n}}(q)} \frac{s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}_{(N)})}{s_{\mathbf{n}}(1, q, \dots, q^{N-1})} \frac{(q^{a_1+M}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{a_p+M}; q)_{\mathbf{n}}}{(q^{b_1+M}; q)_{\mathbf{n}} \dots (q^{b_s+M}; q)_{\mathbf{n}}}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что это выражение задает тау-функцию иерархии КП (а не тау-функцию иерархии РТ, хотя в выражении (4.49) и содержится зависимость от переменной РТ M).

Для того чтобы получить основную гипергеометрическую функцию от одного набора переменных, следует положить неопределенные переменные $\mathbf{y}_{(N)}$ в (4.48) равными $y_i = q^{i-1}$, $i = 1, \dots, N$. И в случае $N = 1$ мы имеем обыкновенную q -деформированную гипергеометрическую функцию

$${}_p\Phi_s \left(\begin{matrix} a_1 + M, \dots, a_p + M \\ b_1 + M, \dots, b_s + M \end{matrix} \middle| q, x \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(q^{a_1+M}; q)_n \dots (q^{a_p+M}; q)_n}{(q^{b_1+M}; q)_n \dots (q^{b_s+M}; q)_n} \frac{x^n}{(q; q)_n}, \quad x = x_1, \quad (4.50)$$

удовлетворяющую q -разностному уравнению (ср. (4.46))

$$\left(\frac{1}{x} (1 - q^D) - {}_p r_s^{(q)}(D) \right) {}_p\Phi_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; q, x) = 0, \quad D := x \partial_x,$$

где факторы ${}_p r_s^{(q)}(D)$ определяются формулой (4.47).

В математической физике встречаются различные приложения рядов (4.50) [17], [18]. Бозонное представление функции (4.50) было найдено в работе [19]. Оператор q^D , действующий на фермионы $\psi(z)$, был использован в работе [20] в другом контексте.

ПРИМЕР 7. В этом примере обозначения взяты из работы [21]. Пусть r — это рациональная функция от тэта-функций Якоби $\theta(2x\eta \mid \tau') = \theta_1(2x\eta \mid \tau')$, где τ' — эллиптический параметр,

$$\begin{aligned} {}_p r_s^{(\eta)}(n) &= \frac{\prod_{i=1}^p \theta(2\eta(a_i + n) \mid \tau')}{\theta(2\eta(N - M + n) \mid \tau') \prod_{i=1}^s \theta(2\eta(b_i + n) \mid \tau')}, \\ e^{-T_{n-1}} &= \frac{\prod_{i=1}^p [a_i]_n}{[N - M]_n \prod_{i=1}^s [b_i]_n}. \end{aligned}$$

Эллиптический символ Похгаммера $[a]_n$ определен здесь в терминах эллиптического числа $[a]$:

$$[a] = \theta(2a\eta \mid \tau'), \quad [a]_k = [a][a+1][a+2] \dots [a+k-1].$$

Эллиптический символ Похгаммера можно ассоциировать с заданным разбиением $\mathbf{n}$:

$$[a]_{\mathbf{n}} = [a]_{n_1} [a-1]_{n_2} \dots [a-l+1]_{n_l}.$$

Для переменных $\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)})$ и $\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)})$ можно ввести гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned} \langle M | e^{H(\mathbf{t}^+(\mathbf{x}_{(N)}))} e^{A(\mathbf{t}^{*+}(\mathbf{y}_{(N)}))} | M \rangle &= {}_pF_s^{(\eta)} \left(\begin{matrix} a_1 + M, \dots, a_p + M \\ b_1 + M, \dots, b_s + M \end{matrix} \middle| \eta, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{l}(\mathbf{n}) \leq N} \frac{s_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_{(N)}) s_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}_{(N)})}{[N]_{\mathbf{n}}} \frac{[a_1 + M]_{\mathbf{n}} \dots [a_p + M]_{\mathbf{n}}}{[b_1 + M]_{\mathbf{n}} \dots [b_s + M]_{\mathbf{n}}}. \end{aligned}$$

Как и в случае уравнения (2.4), эта функция является тау-функцией иерархии КП, а не иерархии РТ, поскольку множитель $[N]_{\mathbf{n}}$ в знаменателе не зависит от M . При $N = 1$ получим эллиптическую гипергеометрическую функцию одной переменной [21]. Полагая теперь

$$\begin{aligned} z = 1, \quad t_n = \frac{1}{n}, \quad t_n^* = \frac{1}{n}, \\ e^{-T_{n-1}} = \frac{[\alpha_1 + 2n][\alpha_1]_n}{[\alpha_1][n]!} \prod_{m=1}^{p-2} \frac{[\alpha_{m+3}]_n}{[\alpha_1 - \alpha_{m+3} + 1]_n}, \end{aligned}$$

получим хорошо определенный эллиптический гипергеометрический ряд

$${}_{p+1}W_p(\alpha_1; \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{p+1} \mid \eta, \tau') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\alpha_1 + 2n][\alpha_1]_n}{[\alpha_1][n]!} \prod_{m=1}^{p-2} \frac{[\alpha_{m+3}]_n}{[\alpha_1 - \alpha_{m+3} + 1]_n}.$$

4.11. Формулы сдвига индексов. Выпишем теперь уравнения на гипергеометрические функции со сдвинутыми индексами a_i и b_i , которые следуют из явного фермионного представления для тау-функции (4.9). При $\tilde{a}_i = a_i + M$ и $\tilde{b}_i = b_i + M$ получим

$$\begin{aligned} \Delta_p \Phi_s \left(\begin{matrix} \tilde{a}_1 + 1, \dots, \tilde{a}_p \\ \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_s \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) = \\ = \prod_{i=1}^N \frac{1 - q^{D_i + \tilde{a}_1}}{1 - q^{\tilde{a}_1}} \left(\Delta_p \Phi_s \left(\begin{matrix} \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_p \\ \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_s \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) \right), \end{aligned}$$

где $D_i = y_i \partial_{y_i}$ и $\Delta = \Delta^+(M, N, \mathbf{0}, \mathbf{y}_{(N)})$. Действуя сходным образом, получим

$$\begin{aligned} \Delta_p \Phi_s \left(\begin{matrix} \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_p \\ \tilde{b}_1 + 1, \dots, \tilde{b}_s \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) = \\ = \prod_{i=1}^N \frac{1 - q^{\tilde{b}_1}}{1 - q^{D_i + \tilde{b}_1}} \left(\Delta_p \Phi_s \left(\begin{matrix} \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_p \\ \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_s \end{matrix} \middle| q, \mathbf{x}_{(N)}, \mathbf{y}_{(N)} \right) \right). \end{aligned}$$

Благодарности. Один из авторов (А. О.) благодарит В. Драговича и Т. Шиоту за многочисленные полезные обсуждения. Авторы выражают свою признательность С. Милну за присланную работу [9].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Задача факторизации Гаусса, дополнительные симметрии и струнные уравнения

Опишем струнное уравнение Такасаки и Такебе [16], [22]. Эта задача будет подробно изучена в последующих работах.

Для того чтобы описать потоки КП и РТ и их симметрии, полезно ввести бесконечномерные матрицы (см. [11]). Одевающие матрицы Захарова и Шабата обозначаются через K и $\bar{K}$, где K — это нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали ($K_{ii} = 1$), а $\bar{K}$ — верхнетреугольная матрица. Матрицы K и $\bar{K}$ зависят от параметров M , $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{t}^*$. Удобно ввести матрицы $(\Lambda)_{ik} = \delta_{i,k-1}$ и $(\bar{\Lambda})_{ik} = \delta_{i,k+1}$. При каждом значении $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{t}^*$ и при $M \in \mathbb{Z}$ эти матрицы решают задачу факторизации Гаусса (Римана-Гильберта) для бесконечномерных матриц:

$$\bar{K} = KG(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*), \quad G(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*) = e^{\xi(\mathbf{t}, \Lambda)} \Lambda^M G(\mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0}) \bar{\Lambda}^M e^{\xi(\mathbf{t}^*, \bar{\Lambda})}.$$

Положим $\ln(\bar{K}_{ii}) = \phi_{i+M}$. Тогда набор полей $\phi_i(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$, $-\infty < i < +\infty$, решает иерархию высших уравнений двумеризованной РТ.

Выбирая $L = K \Lambda K^{-1}$, $\bar{L} = \bar{K} \bar{\Lambda} \bar{K}^{-1}$, $(\Delta)_{ik} = i \delta_{i,k}$, $\widehat{M} = K \Delta K^{-1} + M + \sum n t_n L^n$ и $\widehat{\bar{M}} = \bar{K} \Delta \bar{K}^{-1} + M + \sum n t_n^* \bar{L}^n$, можно записать дополнительные симметрии КП [12]–[14], [16], [22], а высшие потоки РТ [11] тогда могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \partial_{\beta_n} K &= -((r(\widehat{M})L^{-1})^n)_- K, & \partial_{\beta_n} \bar{K} &= ((r(\widehat{M})L^{-1})^n)_+ \bar{K}, \\ \partial_{t_n^*} K &= -(\bar{L}^n)_- K, & \partial_{t_n^*} \bar{K} &= (\bar{L}^n)_+ \bar{K}. \end{aligned}$$

В этом представлении струнные уравнения имеют вид

$$\bar{L}L = r(\widehat{M}), \quad \widehat{\bar{M}} = \widehat{M}. \quad (\text{П.1})$$

Первое из этих уравнений следует из того, что групповое время β_1 дополнительной симметрии КП может быть отождествлено с временем РТ t_1^* . В этом случае получаются уравнения (4.27), если тау-функция представлена с помощью действия вершинных операторов [13], [14], или уравнения (4.29), если тау-функция представлена через переменные Мивы.

Второе из струнных уравнений в (П.1) следует из симметрии тау-функций относительно замены $\mathbf{t} \leftrightarrow \beta$.

При

$$r(M) = M + a \quad (\text{П.2})$$

уравнения (П.1) описывают струну $c = 1$ (см. [16]), и мы получаем соотношение

$$[\bar{L}, L] = 1. \quad (\text{П.3})$$

Струнные уравнения в форме записи Такасаки напоминают другую проблему. Бездисперсионный предел уравнения (П.3) (и уравнения (П.1), в котором $r(M) = M^n$, а также

уравнения (П.2)) имеет вид $\bar{\lambda}\lambda = \mu^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{\mu} = \mu$. Интересен случай, когда $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$ комплексно сопряжены λ и μ , соответственно. Эти струнные уравнения (в основном в случае $n = 1$) появлялись в последнее время при решении так называемой проблемы роста лапласиана (см. [23]) (авторы благодарны А. Забродину за привлечение их внимания к этой задаче). Бездисперсионный предел иерархий КП и РТ был исследован в работе [22].

Если функция $r(n)$ имеет нули (описываемые дивизором $\mathbf{m} = (M_1, \dots)$, $r(M_k) = 0$), можно сделать замену $\Lambda \rightarrow \Lambda(\mathbf{m})$ и $\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{\Lambda}(\mathbf{m})$, где новые матрицы $\Lambda(\mathbf{m})$ и $\bar{\Lambda}(\mathbf{m})$ имеют вид

$$\begin{aligned} (\Lambda(\mathbf{m}))_{i,j} &= \delta_{i,j-1}, \quad j \neq M_k, & (\Lambda(\mathbf{m}))_{i,j} &= 0, \quad j = M_k, \\ (\bar{\Lambda}(\mathbf{m}))_{i,j} &= \delta_{i,j+1}, \quad i \neq M_k, & (\bar{\Lambda}(\mathbf{m}))_{i,j} &= 0, \quad i = M_k. \end{aligned}$$

Эта модификация описывает уравнение открытой РТ (4.19), где набор полей $\phi_\infty, \dots, \phi_{M_1}, \phi_{M_1+1}, \dots$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{n=-\infty}^{M_s} \phi_n = 0, \quad \sum_{n=M_{k+1}}^{M_k+1} \phi_n = 0, \quad \sum_{n=M_1+1}^{\infty} \phi_n = 0,$$

которые следуют из условий $\tau(M_k, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = 1$. Каждый внутренний интервал (4.25) этой РТ представляет собой конечную цепочку с $M_k - M_{k+1}$ узлами. Также имеются две полубесконечные цепочки, отвечающие условиям (4.24) и (4.26).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Матрица $r(\widehat{M})$ содержит $(\widehat{M} - b_i)$ в знаменателе. Матрица $(\widehat{M} - b_i)^{-1}$ имеет вид $K(\Delta - b_i)^{-1} K^{-1}(1 + O(\mathbf{t}))$ (ср. [12]).

Тау-функция КП (4.4) может быть получена из соотношения

$$\begin{aligned} G(M, \mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{t}^*) &= G(\mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0}) U(M, \mathbf{t}, \beta), & U(M, \mathbf{t}, \beta) &= U^+(\mathbf{t}) U^-(M, \beta), \\ U^+(\mathbf{t}) &= e^{\xi(\mathbf{t}, \Lambda)}, & U^-(M, \beta) &= e^{\xi(\beta, \Lambda^{-1} r(\Delta + M))}. \end{aligned}$$

Матрица $G(\mathbf{0}, \mathbf{T}, \mathbf{0})$ связана с преобразованием уравнения (4.16) в уравнение (4.14). Действуя оператором проекции $U \mapsto U_{--}$ [11] при неположительных значениях индексов матричных элементов, получим детерминантное представление для тау-функции (4.4):

$$\tau_r(M, \mathbf{t}, \beta) = \frac{\det U_{--}(M, \mathbf{t}, \beta)}{\det(U_{--}^+(\mathbf{t}) \det(U_{--}^-(M, \beta)))} = \det U_{--}(M, \mathbf{t}, \beta), \quad (\text{П.4})$$

поскольку оба детерминанта в знаменателе равны единице. Формула (П.4) одновременно является формулой Сегала–Вильсона для 2-копикла алгебры $GL(\infty)$ $C_M(U^+(-\mathbf{t}), U^-(-\beta))$ [24]. Выбирая функцию r так же, как и в п.4.2, получим гипергеометрические функции, перечисленные в разделе 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Уравнения относительно переменных $\mathbf{T}$

Покажем, что переменные $\mathbf{T}$ являются переменными времен, если выписывается уравнение, включающее в себя дифференцирование по $\mathbf{T}$. Соответствующие уравнения Ливилля строятся в терминах величин

$$e^{v_k} = \frac{\langle M+1 | e^{H(\mathbf{t})} \psi_k e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle \langle M-1 | e^{H(\mathbf{t})} \psi_k^* e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle}{\langle M | e^{H(\mathbf{t})} e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle^2}$$

и имеют вид

$$-\frac{\partial^2 v_k}{\partial t_1 \partial T_k} = e^{v_k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Чтобы получить систему уравнений трех волн, положим

$$\begin{aligned} \beta_{nm} &= \frac{\langle M | e^{H(\mathbf{t})} \psi_m \psi_n^* e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle}{\langle M | e^{H(\mathbf{t})} e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle}, \\ \beta_{1'n} &= \frac{\langle M+1 | e^{H(\mathbf{t})} \psi_n e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle}{\langle M | e^{H(\mathbf{t})} e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle}, \\ \beta_{n1'} &= \frac{\langle M-1 | e^{H(\mathbf{t})} \psi_n^* e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle}{\langle M | e^{H(\mathbf{t})} e^{H_0(\mathbf{T})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | M \rangle}. \end{aligned}$$

Тогда получим $-\partial_{T_n} \beta_{1'm} = \beta_{1'n} \beta_{nm}$, $-\partial_{T_n} \beta_{m1'} = \beta_{mn} \beta_{n1'}$ и $\partial_{t_1} \beta_{mn} = \beta_{m1'} \beta_{1'n}$ при $m \neq n$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Эти уравнения могут быть получены с помощью представления лаковского типа [25]:

$$[\partial_{T_m} + \beta_{1'm} \partial_{t_1}^{-1} \beta_{m1'}, \partial_{T_n} + \beta_{1'n} \partial_{t_1}^{-1} \beta_{n1'}] = 0.$$

Также можно вывести дискретные аналоги этих уравнений и (дискретные и непрерывные) уравнения, включающие только переменные $\mathbf{T}$.

Список литературы

- [1] В. С. Дрюма. Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 653–754.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функци. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 43–53; 1979. Т. 13. № 3. С. 13–22.
- [3] А. В. Михайлов. Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 443–448.
- [4] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo, T. Miwa. Transformation groups for soliton equations. In: Non-linear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory. Proc. of RIMS Symp. (Kyoto, Japan, 13–16 May, 1981). Eds. M. Jimbo and T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983. P. 39–120.
- [5] L. A. Dickey. Soliton Equations and Hamiltonian System. Singapore: World Scientific, 1991.
- [6] N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk. Representation of Lie Groups and Special Functions. V. 3. Classical and Quantum Groups and Special Functions. Dordrecht: Kluwer, 1992.
- [7] N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk. Representation of Lie Groups and Special Functions. Recent Advances. Dordrecht: Kluwer, 1995.
- [8] I. G. Macdonald. Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford: Clarendon, 1995.

- [9] *S. C. Milne*. Summation theorems for basic hypergeometric series of Schur function argument. In: *Progress in Approximation Theory*. Eds. A. A. Gonchar and E. B. Saff. New York: Springer, 1992. P. 51–77.
- [10] *K. I. Gross, D. S. Richards*. *Trans. Am. Math. Soc.* 1987. V. 301. P. 781–811.
- [11] *K. Ueno, K. Takasaki*. *Adv. Stud. Pure Math.* 1984. V. 4. P. 1–95.
- [12] *П. Вунтернуц, А. Ю. Орлов*. *ТМФ*. 1997. Т. 113. С. 231–260.
- [13] *L. A. Dickey*. *Mod. Phys. Lett. A*. 1993. V. 8. P. 1357–1377.
- [14] *M. Adler, T. Shiota, P. van Moerbeke*. *Phys. Lett. A*. 1994. V. 194. P. 33–34.
- [15] *A. Yu. Orlov*. Vertex operators, ∂ bar problem, symmetries, Hamiltonian and Lagrangian formalism of $(2 + 1)$ dimensional integrable systems. In: *Proc. 3rd Kiev Intl. Workshop*, 1987. V. 1. Eds. V. G. Bar'yakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1988. P. 116–134.
- [16] *K. Takasaki*. *Commun. Math. Phys.* 1996. V. 181. P. 131–156; *T. Nakatsu, K. Takasaki, S. Tsujimaru*. *Nucl. Phys. B*. 1995. V. 443. P. 155–197.
- [17] *G. E. Andrews, E. Onofri*. Lattice gauge theory, orthogonal polynomials, and q -hypergeometric functions. In: *Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications*. Eds. R. A. Askey, T. H. Koornwinder, W. Schempp. Dordrecht: Reidel, 1984. P. 163–188.
- [18] *A. Odziejewicz*. *Commun. Math. Phys.* 1998. V. 192. P. 183–215.
- [19] *A. Yu. Morozov, L. Vinet*. *Phys. Lett. A*. 1993. V. 8. P. 2891–2902.
- [20] *I. Loutsenko, V. Spiridonov*. *Nucl. Phys. B*. 1999. V. 538. P. 731–758.
- [21] *A. Zabrodin*. Commuting difference operators with elliptic coefficients from Baxter's vacuum vectors. QA/9912218; *I. Frenkel, V. Turaev*. Elliptic solutions of the Yang–Baxter equations and modular hypergeometric functions. In: *The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars*. Eds. V. I. Arnold, I. M. Gelfand, V. S. Retakh, M. Smirnov. Boston: Birkhauser, 1997. P. 171–204; *A. Zhedanov, V. Spiridonov*. *Commun. Math. Phys.* 2000. V. 210. P. 49–83.
- [22] *T. Takebe, K. Takasaki*. *Rev. Math. Phys.* 1995. V. 7. P. 743–808; hep-th/94050096.
- [23] *M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin*. *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 5106–5109.
- [24] *G. Segal, G. Wilson*. *Publ. Math. IHES*. 1985. V. 61. P. 5–65.
- [25] *A. Yu. Orlov*. Volterra operator algebra for zero-curvature representation: Universality of KP. In: *Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. Series in Nonlinear Phys. V.126 (Potsdam–Kiev, 1991)*. Eds. A. Fokas, D. Kaup, V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1993. P. 126–131.