Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Павлов, Уравнение Калоджеро и уравнения типа Лиувилля, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 1, 109–115

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:16:58

УРАВНЕНИЕ КАЛОДЖЕРО И УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ

Представлено двухкомпонентное обобщение C -интегрируемого уравнения Калоджеро, которое также C -интегрируемо. Показано, что с помощью преобразования по решению как уравнение Калоджеро, так и его двухкомпонентное обобщение сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

1. ВВЕДЕНИЕ

В своей работе “Разрешимое нелинейное волновое уравнение” Калоджеро [1] впервые рассмотрел неэволюционное уравнение

$$u_{xt} = uu_{xx} + \Phi(u_x) \quad (1)$$

с произвольной функцией $\Phi(p)$. Он нашел и его общее решение, но в весьма сложном виде. В настоящей работе предлагается новый подход к описанию общего решения этого уравнения в более явном виде, основанный на использовании подходящего преобразования по решению. В результате получено общее решение уравнений типа Лиувилля.

Для начала заметим, что у уравнения Калоджеро (1) имеется специальный закон сохранения

$$\partial_t F(u_x) = \partial_x [uF(u_x)], \quad (2)$$

где

$$F(p) = \exp \left[\int \frac{p \, dp}{\Phi(p)} \right].$$

Соответствующее преобразование по решению

$$dz = F(p) \, dx + uF(p) \, dt, \quad dy = dt$$

определяет переход к новым независимым переменным по правилу

$$\partial_x = v\partial_z, \quad \partial_t = \partial_y + uv\partial_z, \quad (3)$$

*City University of Hong Kong, Kowloon, Hong Kong. E-mail: maxim.pavlov@mtu-net.ru

где $v = F(p)$. При этом закон сохранения (2) принимает вид

$$u_z = \partial_y \left(-\frac{1}{v} \right), \quad (4)$$

а уравнение Калоджеро (1) переходит в уравнение

$$p_y = \Phi(p), \quad (5)$$

где (см. (3) и (4))

$$p = u_x = v u_z = \partial_y \ln v. \quad (6)$$

Таким образом, решение уравнения Калоджеро (1) можно представить в неявной форме (см. (5)); его можно найти, последовательно интегрируя уравнения (5) и (6) и обратное преобразование по решению

$$dx = \frac{1}{F(p)} dz - u dy, \quad dt = dy.$$

В разделе 2 приводятся два хорошо известных примера интегрируемых уравнений этого вида. В разделе 3 описано еще одно преобразование по решению, переводящее обобщенное уравнение Хантера–Сэкстона в уравнение Лиувилля. В разделе 4 обсуждаются общие преобразования по решению, переводящие нелинейное уравнение в частных производных более сложного по сравнению с уравнением Калоджеро (1) вида в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. В разделе 5 строится двухкомпонентное обобщение уравнения Калоджеро (1) и находится его общее решение с помощью соответствующего преобразования по решению, которое сводит задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Главной целью настоящей работы является доказательство того, что некоторые C -интегрируемые уравнения (или системы уравнений) могут быть проинтегрированы с помощью подходящих преобразований по решению, переводящих исходные уравнения в обыкновенные дифференциальные уравнения.

2. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Одним из примеров является обобщенное уравнение Хантера–Сэкстона

$$u_{xt} = u u_{xx} + \varepsilon u_x^2. \quad (7)$$

Это уравнение изучалось в работе [2], где методом характеристик было найдено общее решение при $\varepsilon = 1/2$. Тот же случай, но с другой точки зрения, изучался Олвером и Розенау [3]. В настоящей работе строится общее решение при произвольном ε . Так как $\Phi(p) = \varepsilon p^2$, то имеем последовательно

$$\begin{aligned} F(p) &= p^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad p = \frac{1}{A(z) - \varepsilon y}, \\ u &= B'(y) + \int [A(z) - \varepsilon y]^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} dz, \\ x &= -B(y) + \int [A(z) - \varepsilon y]^{\frac{1}{\varepsilon}} dz. \end{aligned} \quad (8)$$

При $\varepsilon = 1/2$ получается общее решение уравнения Хантера–Сэкстона:

$$\begin{aligned} u &= B'(y) + \int A(z) dz - \frac{1}{2}yz, \\ x &= -B(y) + \int A^2(z) dz - y \int A(z) dz + \frac{1}{4}y^2z. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 1$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$x = -B(y) + C(z) - yz, \quad u = B'(y) + z.$$

В этом случае уравнение (7) допускает редукцию к известному уравнению первого порядка

$$u_t = uu_x.$$

Для него, как легко проверить, $B(y) = \alpha y + \beta$, и мы приходим к стандартному решению

$$(x + \beta) + ut = C(u - \alpha).$$

На конференции NEEDS 2000 в Гокове (Турция) профессор Валерий Дрюма представил нам еще одно неэволюционное уравнение

$$u_{xxt} = uu_{xxx},$$

возникающее на стыке проективной геометрии и гравитации (см. [4]). Это уравнение имеет очевидный интеграл

$$u_{xt} = uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \gamma(t).$$

При $\gamma = 0$ он совпадает с частным случаем обобщенного уравнения Хантера–Сэкстона (7).

3. УРАВНЕНИЕ КАЛОДЖЕРО И УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

У обобщенного уравнения Хантера–Сэкстона (7) имеется еще один, дополнительный к (2), закон сохранения

$$\partial_t \left[(u_{xx})^{\frac{1}{2\varepsilon+1}} \right] = \partial_x \left[u (u_{xx})^{\frac{1}{2\varepsilon+1}} \right]. \quad (9)$$

Соответствующее преобразование по решению

$$dw = q dx + uq dt, \quad d\tau = dt, \quad (10)$$

где

$$q = (u_{xx})^{\frac{1}{2\varepsilon+1}}, \quad (11)$$

определяет переход к новым независимым переменным по правилу

$$\partial_x = q \partial_w, \quad \partial_t = \partial_\tau + uq \partial_w.$$

Закон сохранения (9) принимает вид

$$u_w = -\partial_\tau \left(\frac{1}{q} \right),$$

а обобщенное уравнение Хантера–Сэкстона переходит в уравнение

$$s_\tau = \varepsilon s^2, \quad (12)$$

где

$$s = u_x = q u_w = \partial_\tau \ln q. \quad (13)$$

Таким образом, общее решение уравнения Хантера–Сэкстона можно представить в неявной форме (см. (12)); его можно найти, последовательно интегрируя уравнения (12) и (13) и обратное преобразование по решению

$$dx = \frac{1}{q} dw - u d\tau, \quad dt = d\tau.$$

Общее решение имеет вид

$$x = \int \frac{dw}{B(w)} [A(w) + \varepsilon \tau]^{\frac{1}{\varepsilon}} + C(\tau), \quad u = - \int \frac{dw}{B(w)} [A(w) + \varepsilon \tau]^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} - C'(\tau), \quad (14)$$

а

$$q = B(w) [A(w) + \varepsilon \tau]^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad s = -[A(w) + \varepsilon \tau]^{-1}. \quad (15)$$

Уравнение (11) можно переписать в виде

$$q^{2\varepsilon+1} = u_{xx} = q \partial_w (q u_w). \quad (11a)$$

Если затем подставить (13) в уравнение (11a), то получим, что преобразование по решению (10) переводит уравнение Хантера–Сэкстона в уравнение Лиувилля

$$\partial_{w\tau} \ln q = q^{2\varepsilon}. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (16), получим хорошо известное общее решение уравнения Лиувилля

$$q = [A'(w)]^{\frac{1}{2\varepsilon}} [A(w) + \varepsilon \tau]^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \quad (17)$$

а

$$B(w) = [A'(w)]^{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

Окончательно общее решение уравнения Хантера–Сэкстона имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \int [A'(w)]^{-\frac{1}{2\varepsilon}} [A(w) + \varepsilon \tau]^{\frac{1}{\varepsilon}} dw + C(\tau), \\ u &= - \int [A'(w)]^{-\frac{1}{2\varepsilon}} [A(w) + \varepsilon \tau]^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} dw - C'(\tau). \end{aligned} \quad (14a)$$

Если общее решение обобщенного уравнения Хантера–Сэкстона зависит от двух функций одной переменной (см. (14а) или (8)), то общее решение уравнения Лиувилля также должно зависеть от двух функций одной переменной. Эту зависимость легко восстановить, используя очевидную симметрию уравнения Лиувилля относительно подстановки $\tau \rightarrow R(\tau)$, $q \rightarrow q[R'(\tau)]^{1/2\varepsilon}$ (см. (17)):

$$q = [A'(w)R'(\tau)]^{\frac{1}{2\varepsilon}} [A(w) + \varepsilon R(\tau)]^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (17a)$$

Частный случай $\varepsilon = 1/2$ изучался в работе [5] применительно к высокочастотному пределу уравнения Камасса–Хольма. В данном разделе было показано, что обобщенное уравнение Хантера–Сэкстона можно преобразовать в уравнение Лиувилля. Связь между уравнением Хантера–Сэкстона и уравнением Лиувилля устанавливалась в процессе одновременного интегрирования этих уравнений. В следующем разделе представлена общая схема интегрирования уравнения Калоджеро. Будет показано, что уравнение Калоджеро можно преобразовать в уравнение более общее, чем уравнение Лиувилля, и проинтегрировать с помощью преобразования по решению, переводящего его в обыкновенное дифференциальное уравнение.

4. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Предположим, что у неэволюционного уравнения

$$u_{xt} = \varphi(u, u_x, u_{xx}) \quad (18)$$

имеется специальный закон сохранения

$$\partial_t f(u, u_{xx}) = \partial_x [u f(u, u_{xx})]. \quad (19)$$

Тогда правую часть уравнения (18) можно уточнить:

$$u_{xt} = uu_{xx} + \psi(u, u_x), \quad (18a)$$

где ψ и f связаны уравнением

$$\psi \frac{\partial f}{\partial u_x} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial u} u_x + \left(u_x + \frac{\partial \psi}{\partial u_x} \right) u_{xx} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} = f u_x, \quad (20)$$

следующим из условия совместности уравнений (18) и (19). Если ввести преобразование по решению

$$dz = w dx + uw dt, \quad dy = dt \quad (21)$$

для уравнения (18a), где $w = f(u, u_{xx})$, то получим

$$(wu_z)_y = \psi(u, wu_z) \quad (22)$$

и

$$u_z = w^{-2} w_y.$$

Таким образом, окончательно получается *обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$\partial_y^2 \ln w = \psi(u, \partial_y \ln w) \quad (22a)$$

и уравнение

$$w = f(\partial_y \ln w, w \partial_{yz} \ln w). \quad (23)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (22a) можно проинтегрировать, только если $\psi = \psi(u_x)$. В этом случае уравнение (20) принимает вид

$$\psi \frac{\partial f}{\partial u_x} + [u_x + \psi'(u_x)] u_{xx} \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} = f u_x \quad (20a)$$

и немедленно интегрируется:

$$f = \beta(u_x) \zeta \left(\frac{\beta(u_x) \psi(u_x)}{u_{xx}} \right),$$

где

$$\beta(\tau) = \exp \left[\int \frac{\tau d\tau}{\psi(\tau)} \right], \quad (24)$$

а $\zeta(v)$ — произвольная функция. Таким образом, обобщенный закон сохранения (19) позволяет с помощью преобразования по решению (21) перевести уравнение Калоджеро (1) в *обыкновенное дифференциальное уравнение* (см. (22) и (22a))

$$s_{yy} = \psi(s_y) \quad (22b)$$

и одновременно в гиперболическое уравнение (см. (23))

$$s_{yz} = \psi(s_y) \alpha(\beta(s_y) e^{-s}), \quad (25)$$

где

$$s = \ln w, \quad \zeta \left(\frac{1}{\tau \alpha(\tau)} \right) = \tau.$$

Тем самым установлен замечательный факт: всякое гиперболическое уравнение (25) с двумя произвольными функциями $\psi(\tau)$ и $\alpha(\tau)$ является C -интегрируемым (см. (22b)), если функция $\beta(\tau)$ определяется формулой (24). С этой точки зрения оно является естественным обобщением уравнения Лиувилля (16).

5. ДВУХКОМПОНЕНТНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Уравнение Калоджеро (1) допускает двухкомпонентное обобщение

$$\eta_t = \partial_x(u\eta), \quad u_{xt} = uu_{xx} + \psi(\eta, u_x). \quad (26)$$

Преобразование по решению

$$dz = \eta dx + u\eta dt, \quad dy = dt$$

переводит систему (26) в *обыкновенное дифференциальное уравнение* (ср. (22б)),

$$s_{yy} = \psi(e^s, s_y), \quad (27)$$

где $s = \ln \eta$. Интегрируемость системы (26) представляется более простой, чем интегрируемость уравнения Калоджеро (1), однако обыкновенное дифференциальное уравнение (27) более сложно, а редукция уравнения (26) к уравнению (1) не столь очевидна: $\eta = \eta(u_x)$, где функция η является решением другого обыкновенного дифференциального уравнения

$$\psi(\eta, g) d\eta = \eta g dg.$$

В работе [6] мы показали, что частный случай двухкомпонентного обобщения (26), где $\psi = (\eta^2 + u_x^2)/2$, описывающий движение темной материи во Вселенной [7], тесно связан с нелинейной иерархией Шредингера–Максвелла–Блоха. В этом случае у системы (26) имеется бесконечный набор локальных гамильтоновых структур, коммутирующих потоков и законов сохранения, и ее можно записать в форме Монжа–Ампера. Альтернативная интерпретация этого специального случая с точки зрения нелинейной оптики изложена в работе [8].

Благодарности. Автор благодарен Городскому университету Гонконга за гостеприимство. Работа была поддержана Городским университетом Гонконга и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 00-01-00210 и 00-01-00366).

Список литературы

- [1] *F. Calogero.* Stud. Appl. Math. 1984. V. 70. № 3. P. 189–199.
- [2] *J. K. Hunter, R. Saxton.* SIAM J. Appl. Math. 1991. V. 51. № 6. P. 1498–1521.
- [3] *P. Olver, P. Rosenau.* Phys. Rev. E (3). 1996. V. 53. № 2. P. 1900–1906.
- [4] *V. S. Dryuma.* On initial values problem in theory of the second order ODE's. In: Proc. Workshop on Nonlinearity, Integrability, and All That: Twenty years after NEEDS'79 (Gallipoli (Lecce), Italy, July 1–July 10, 1999). Eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, B. Prinari, G. Soliani. Singapore: World Scientific, 2000. P. 109–116.
- [5] *H. H. Dai, M. Pavlov.* J. Phys. Soc. Japan. 1998. V. 67. № 11. P. 3655–3657.
- [6] *M. V. Pavlov.* Gurevich-Zybin system. (will be published).
- [7] *А. В. Гуревич, К. П. Зыбин.* ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 10. С. 5–15; УФН. 1995. Т. 165. № 7. С. 723–758.
- [8] *A. M. Kamchatnov, M. V. Pavlov.* A new C -integrable limit of SHG equations. nlin.SI/0012014; (to appear in J. Phys. A).