Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Руджинарс, Самосопряженные аналитические разностные операторы с нулевым отражением, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 1, 116–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 10:50:30

© 2001 г.

С. Н. М. Руджинарс*

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С НУЛЕВЫМ ОТРАЖЕНИЕМ

Дается обзор работ автора по обыкновенным линейным аналитическим разностным операторам (АДО) второго порядка, допускающим безотражательные собственные функции. Этот класс операторов гораздо шире, чем класс безотражательных операторов Шредингера и Якоби, соответствующих решетчатым солитонам Кортевега–де Фриза и Тоды. Показано, что подкласс безотражательных АДО, обобщающий указанный класс дифференциальных и дискретных разностных операторов, соответствует солитонным решениям нелокальных эволюционных уравнений типа Тоды. Дальнейшие ограничения приводят к АДО с изометрическими преобразованиями собственных функций, которые можно использовать для связи самосопряженных операторов на $L^2(\mathbb{R}, dx)$ с АДО.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы использовали полученные ранее результаты о безотражательных аналитических разностных операторах (АДО) релятивистского типа Калоджеро–Мозера [2], [3] как свидетельство в пользу предположения о существовании гораздо более широкого класса безотражательных АДО. В настоящей работе мы обоснуем это предположение, а также дадим частичные ответы на связанные с ним вопросы о самосопряженности и о связанных солитонных эволюционных уравнениях. Подробности доказательств можно найти в серии последующих работ автора [3]–[6].

Начнем с простого наблюдения о “свободном” АДО

$$A_0 \equiv e^{-i\partial_x} + e^{i\partial_x}, \quad (1.1)$$

рассматриваемом как линейный оператор на пространстве $\mathcal{M}$ мероморфных функций. Очевидно, этот оператор имеет собственные функции $\mathcal{W}_0(x, \pm p)$ с собственным значением $e^p + e^{-p}$, где

$$\mathcal{W}_0(x, p) \equiv e^{ixp}.$$

*Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands. E-mail: siru@wxs.nl

Пусть теперь $\mu_{\pm}(x, p)$ – функции, которые мероморфны и i -периодичны по x при произвольном $p \in \mathbb{C}$. Тогда ясно, что

$$\mathcal{W}_0^{\mu_+, \mu_-}(x, p) \equiv \mu_+(x, p)\mathcal{W}_0(x, p) + \mu_-(x, p)\mathcal{W}_0(x, -p)$$

также является собственной функцией A_0 с собственным значением $e^p + e^{-p}$. Отсюда следует, что собственные пространства $\Delta\Delta O$ второго порядка A_0 бесконечномерны, что находится в противоречии с двумерностью собственных пространств дифференциального оператора второго порядка ∂_x^2 . Более того, свободу в выборе множителей можно использовать, чтобы построить бесконечномерные собственные пространства собственных функций в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ (подобных $\mathcal{W}_0(x, p)/\operatorname{ch} 2\pi(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$) и получить собственные функции любой заданной при $|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty$ плоско-волновой асимптотики. Например, полагая

$$\mu_-(x, p) \equiv \frac{b(p)e^{-2\pi x}}{e^{2\pi x} + e^{-2\pi x}}, \quad \mu_+(x, p) \equiv \frac{e^{2\pi x} + a(p)e^{-2\pi x}}{e^{2\pi x} + e^{-2\pi x}}, \quad (1.2)$$

легко проверить, что

$$\mathcal{W}_0^{\mu_+, \mu_-}(x, p) \sim \begin{cases} e^{ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \\ a(p)e^{ixp} + b(p)e^{-ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Пусть дана безотражательная асимптотическая функция, т.е. $b(p) = 0$ и $|a(p)| = 1$, $p \in \mathbb{R}$. Рассмотрим оператор в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{F}_{\mu_+} : L^2(\mathbb{R}, dp) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dx), \quad f(p) \mapsto (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp f(p) \mu_+(x, p) e^{ixp}. \quad (1.3)$$

Разумеется, если функция $\mu_+(x, p)$ определяется формулой (1.2) и условием $a(p) = 1$, этот оператор сводится к преобразованию Фурье $\mathcal{F}_0$. Поскольку преобразование Фурье $\mathcal{F}_0$ унитарно, по данному оператору A_0 получаем самосопряженный оператор $\hat{A}_0$ следующим образом:

$$\hat{A}_0 \equiv \mathcal{F}_0 M \mathcal{F}_0^{-1},$$

где M – оператор умножения на $2 \operatorname{ch} p$ на пространстве $L^2(\mathbb{R}, dp)$. В исследуемом здесь свободном случае это дает естественный способ рассматривать A_0 как самосопряженный оператор на $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Существуют бесконечномерное пространство мероморфных функций $a(p)$ таких, что $|a(p)| = 1$ при вещественных p , и связанные с ними i -периодические мероморфные множители, удовлетворяющие условиям

$$\mu(x, p) \sim \begin{cases} 1, & \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \\ a(p), & \operatorname{Re} x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (1.4)$$

причем операторы $\mathcal{F}_{\mu}$, задаваемые формулой (1.3), также являются унитарными. Принимая это утверждение, получаем бесконечномерное пространство самосопряженных операторов

$$\hat{A}_{\mu} \equiv \mathcal{F}_{\mu} M \mathcal{F}_{\mu}^{-1}, \quad (1.5)$$

связанных со свободным АДО A_0 на пространстве $\mathcal{M}$. Эти операторы можно сравнить с “очевидным” свободным оператором $\hat{A}_0$ в смысле теории рассеяния, и тогда, как и следовало ожидать, S -матрица является нетривиальной и задается, по существу, функцией $a(p)$.

Приведенные выше рассуждения можно подтвердить результатами из раздела 5 работы [3]. В конце настоящей статьи мы приведем явный пример только что описанного оператора $\hat{A}_\mu$ и, более того, подробно рассмотрим связь между нашим подходом и подходом работы [3]. Здесь же добавим только, что соответствующие множители $\mu(x, p)$ не имеют такого простого вида, как $\mu_+(x, p)$, задаваемый формулой (1.2). Действительно, используя развитые в работах [3], [6] средства, легко видеть, что для таких множителей оператор $\mathcal{F}_{\mu_+}$ не изометричен (за исключением случая, когда $a(p) = 1$, а потому $\mathcal{F}_{\mu_+} = \mathcal{F}_0$).

Мы начали с того, что привели некоторые факты, относящиеся к “свободному” выбору A_0 , с тем, чтобы подготовиться к оценке соответствующих свойств класса “взаимодействующих” АДО вида

$$A \equiv e^{-i\partial_x} + V_a(x)e^{i\partial_x} + V_b(x). \quad (1.6)$$

Здесь предполагается, что $V_a, V_b \in \mathcal{M}$ и

$$\lim_{|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty} V_a(x) = 1, \quad \lim_{|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty} V_b(x) = 0. \quad (1.7)$$

Поэтому A редуцируется к A_0 при $|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty$.

Первый естественный вопрос состоит в том, допускает ли АДО A собственные функции с собственным значением $e^p + e^{-p}$ и плоско-волновую асимптотику при $|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty$. Более точно, существуют ли функции $\mathcal{W}(\cdot, p) \in \mathcal{M}$, удовлетворяющие условиям

$$(A\mathcal{W})(x, p) = (e^p + e^{-p})\mathcal{W}(x, p), \quad (1.8)$$

$$\mathcal{W}(x, p) \sim \begin{cases} e^{ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \\ a(p)e^{ixp} + b(p)e^{-ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (1.9)$$

при произвольном $p \in \mathbb{C}$?

Из этого вопроса следует второй вопрос, являющийся более существенным для наших целей: можно ли найти *безотражательные* функции $\mathcal{W}(x, p)$ с указанными свойствами (т.е. такие, что $b(p) = 0$ в (1.9))? Подчеркнем сразу, что если такие функции можно найти, то функция $a(p)$ произвольна. Действительно, ее всегда можно изменить путем умножения $\mathcal{W}(x, p)$ на подходящие i -периодические функции $\mu(x, p)$.

Наконец, третий вопрос: если A допускает безотражательные собственные функции, то можно ли использовать их для того, чтобы связать самосопряженный оператор $\hat{A}$ на $L^2(\mathbb{R}, dx)$ с A (подобно тому, как это показано для A_0)? По нашему мнению, это важнейший функционально-аналитический вопрос. Действительно, в случаях, когда функция $\mathcal{W}(x, p)$ дает изометрическое преобразование собственных функций, изометрия обычно разрушается после умножения на нетривиальный множитель $\mu(x, p)$.

Прежде чем приступить к подробному изучению этих общих вопросов, весьма полезно вспомнить, что для операторов Шредингера и Якоби можно получить полные ответы на второй и третий вопросы с помощью обратной задачи рассеяния (ОЗР). В этих двух случаях операторы в гильбертовом пространстве однозначно определяются по данным дифференциальным и дискретным разностным операторам. Действительно, при определенных ограничениях вещественности и асимптотических требованиях вида (1.7) соответствующие операторы Якоби явно ограничены и самосопряжены на $l^2(\mathbb{Z})$, а любой оператор Шредингера $-\partial_x^2 + V(x)$ является, очевидно, самосопряженным на естественной области (пространстве Соболева) оператора ∂_x^2 , коль скоро $V(x)$ ограничен и вещественнозначен. Таким образом, безотражательные собственные функции приводят к преобразованиям собственных функций, дающим явную реализацию спектральной теоремы для однозначно определенных самосопряженных операторов соответственно на $l^2(\mathbb{Z})$ и $L^2(\mathbb{R}, dx)$.

Как видно из нашего обсуждения случая свободного оператора (1.1), ситуация с АДО носит иной характер. Возвращаясь к сформулированным выше вопросам, отметим прежде всего, что первые два ранее не изучались. Из наших результатов вытекает существование широкого класса АДО, для которых имеется положительный ответ на второй вопрос. Но нам представляется очень маловероятно, чтобы это давало наиболее общий класс АДО, допускающих безотражательные собственные функции.

Подобным же образом мы частично ответим на третий вопрос, показав, что при весьма ограничительных дополнительных условиях наши преобразования безотражательных собственных функций оператора $\mathcal{F}$ являются изометриями и поэтому могут использоваться для того, чтобы связать с A самосопряженный оператор $\hat{A}$ на $L^2(\mathbb{R}, dx)$, сопрягая оператор умножения M , действующий на $L^2(\mathbb{R}, dp)$. Точнее говоря, этой процедуры достаточно, коль скоро оператор $\mathcal{F}$ отображает на $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Это имеет место для бесконечномерного пространства потенциалов (V_a, V_b) , что снова резко отличается от случая операторов Шредингера и Якоби, для которых нетривиальные безотражательные потенциалы *всегда* имеют связанные состояния.

В случае, когда оператор $\mathcal{F}$ не является отображением на все пространство $L^2(\mathbb{R}, dp)$, можно показать, что ортогональное дополнение к $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}, dp))$ порождается конечным числом попарно ортогональных собственных функций A с вещественными собственными значениями; поэтому можно определить $\hat{A}$ равным A на этом подпространстве связанных состояний. После введения подходящего изменения масштаба в АДО можно показать, что операторы такого типа сходятся к классу безотражательных операторов Шредингера при стремящемся к нулю шаге. Мы упоминаем последний результат (который подробно рассматривается в разделе 3 работы [5]) для того, чтобы с самого начала было ясно, что класс самосопряженных безотражательных АДО, который мы строим, является весьма большим.

Тем не менее вполне может оказаться, что данный АДО A в этом классе дает совсем различные самосопряженные безотражательные операторы на $L^2(\mathbb{R}, dx)$. (Как объяснялось выше, для специальных АДО A_0 , задаваемых формулой (1.1), действительно существует бесконечномерное пространство таких операторов.) Наши результаты долж-

ны быть полезны при изучении прямой задачи, но случай $b(p) \neq 0$ еще не исследовался. Как нам кажется, наши результаты могут открывать начало (вероятно, весьма богатой) теории операторов в гильбертовых пространствах для АДО указанного простого вида. Из конкретных случаев, которые мы смогли рассмотреть, ясно видно, что основной задачей в данной области является выделение *изометрических* преобразований собственных функций.

Данная работа организована следующим образом. В разделе 2 мы даем набросок нашей конструкции для широкого класса АДО вида (1.6), допускающих безотражательные собственные функции, которые также строятся явно. Мы представляем все детали в простейшем случае ($N = 1$). Основная идея состоит в том, чтобы следовать схеме ОЗР для безотражательных операторов Шредингера и Якоби [7]–[11].

В разделе 3 объясняется связь безотражательных АДО с новым солитонным эволюционным уравнением, которое можно рассматривать как непрерывный нелокальный вариант бесконечных уравнений решетки Тоды. Мы получаем вещественнозначные N -солитонные решения посредством подходящих ограничений на спектральные данные.

При наложенных ограничениях на спектральные данные мы рассматриваем функционально-аналитические свойства в разделе 4. Здесь подробно исследуется специальный случай $N = 1$ и дается оценка того, как предыдущие работы [1]–[3] укладываются в нынешнюю более общую схему.

2. ПОСТРОЕНИЕ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ АДО

Будем исходить из “спектральных данных”

$$(r, \mu) = (r_1, \dots, r_N, \mu_1(x), \dots, \mu_N(x)), \quad N \in \mathbb{N}^*, \quad (2.1)$$

на которые наложены следующие ограничения. Комплексные числа $r_1, \dots, r_N$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Im} r_n \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi), \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

и

$$e^{r_m} \neq e^{\pm r_n}, \quad 1 \leq m < n \leq N. \quad (2.3)$$

Функции $\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)$ (“нормировочные коэффициенты”) могут быть мероморфными, причем

$$\mu_n(x+i) = \mu_n(x), \quad \lim_{|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty} \mu_n(x) = c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}^*, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

(Аналог операторов Шредингера и Якоби возникает в специальном случае $\mu_n(x) = c_n$, $n = 1, \dots, N$, который, разумеется, включен в наше рассмотрение.)

Из условия на r следует, что матрица Коши

$$C(r)_{mn} \equiv \frac{1}{e^{r_m} - e^{-r_n}}, \quad m, n = 1, \dots, N,$$

корректно определена и регулярна, как в случае операторов Шредингера и Якоби. Определим далее диагональную матрицу

$$D(r, \mu; x) \equiv \text{diag}(d_1(x), \dots, d_N(x)),$$

где использовано обозначение

$$d_n(x) = d(r_n, \mu_n; x), \quad n = 1, \dots, N,$$

при

$$d(\rho, \nu; x) \equiv \begin{cases} \nu(x)e^{-2i\rho x}, & \text{Im } \rho \in (0, \pi), \\ \nu(x)e^{-2i(\rho+i\pi)x}, & \text{Im } \rho \in (-\pi, 0). \end{cases} \quad (2.5)$$

Все остальные величины определяются теперь из решения $R(r, \mu; x)$ системы

$$(D(r, \mu; x) + C(r))R = \zeta, \quad \zeta \equiv (1, \dots, 1)^t. \quad (2.6)$$

В терминах вспомогательных функций

$$\lambda(r, \mu; x) \equiv 1 + \sum_{n=1}^N e^{r_n} R_n(r, \mu; x),$$

$$\Sigma(r, \mu; x) \equiv \sum_{n=1}^N R_n(r, \mu; x)$$

определяющие АДО A посредством (1.6) потенциалы V_a и V_b с заданной асимптотикой (1.7) имеют вид

$$V_a(r, \mu; x) \equiv \frac{\lambda(r, \mu; x)}{\lambda(r, \mu; x + i)}, \quad (2.7)$$

$$V_b(r, \mu; x) \equiv \Sigma(r, \mu; x - i) - \Sigma(r, \mu; x). \quad (2.8)$$

Более того, волновая функция, удовлетворяющая условию (1.8), имеет вид

$$\mathcal{W}(r, \mu; x, p) \equiv e^{ixp} \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{R_n(r, \mu; x)}{e^p - e^{-r_n}} \right). \quad (2.9)$$

Она имеет асимптотику (1.9) при $b(p) = 0$ и

$$a(p) = \prod_{n=1}^N \frac{e^p - e^{r_n}}{e^p - e^{-r_n}}.$$

В дальнейшем нам также понадобится асимптотика

$$\lambda(x) \sim \begin{cases} 1, & \text{Re } x \rightarrow \infty, \\ \exp\left(2 \sum_{n=1}^N r_n\right), & \text{Re } x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.10)$$

Разумеется, ни утверждение об асимптотических свойствах, ни утверждение о собственных значениях не являются очевидными. Они следуют из подробного анализа $(N \times N)$ -линейной системы (2.6) (см. раздел 2 работы [4]). Здесь же мы разберем только случай $N=1$. В этом специальном случае соответствующая асимптотика получается немедленно, но доказательство свойств собственных значений уже не является тривиальным. Более того, это доказательство весьма поучительно, поскольку демонстрирует основной момент доказательства для произвольного N и указывает пути дальнейших обобщений.

Итак, при $N = 1$ необходимо рассмотреть два случая: $\operatorname{Im} r > 0$ и $\operatorname{Im} r < 0$. В первом случае получаем

$$C = \frac{1}{2 \operatorname{sh} r}, \quad d(x) = \mu(x)e^{-2irx}, \quad \operatorname{Im} r \in (0, \pi),$$

$$\mu(x) \in \mathcal{M}, \quad \mu(x+i) = \mu(x), \quad \lim_{|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty} \mu(x) = c \in \mathbb{C}^*.$$

Отсюда имеем

$$R(x) = \left[\mu(x)e^{-2irx} + \frac{1}{2 \operatorname{sh} r} \right]^{-1} \sim \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \\ 2 \operatorname{sh} r, & \operatorname{Re} x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.11)$$

Теперь из (2.7) и (2.8) следует, что

$$V_a(x) = \frac{1 + e^r R(x)}{1 + e^r R(x+i)} \sim 1, \quad |\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty,$$

$$V_b(x) = R(x-i) - R(x) \sim 0, \quad |\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty.$$

Аналогично из (2.9) получаем

$$\mathcal{W}(x, p) = e^{ixp} \left(1 - \frac{R(x)}{e^p - e^{-r}} \right) \sim \begin{cases} e^{ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \\ \frac{e^p - e^r}{e^p - e^{-r}} e^{ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.12)$$

как и утверждалось.

Во втором случае $\operatorname{Im} r \in (-\pi, 0)$, и отличия от первого случая возникают лишь в формулах для $d(x)$ и $R(x)$:

$$R(x) = \left[\mu(x)e^{-2irx+2\pi x} + \frac{1}{2 \operatorname{sh} r} \right]^{-1}, \quad \operatorname{Im} r \in (-\pi, 0). \quad (2.13)$$

Докажем теперь свойства собственных функций оператора A , рассматривая оба случая одновременно. Нам надо показать, что функция $\mathcal{W}(x, p)$ удовлетворяет аналитическому разностному уравнению второго порядка

$$F(x-i) + V_a(x)F(x+i) + [V_b(x) - e^p - e^{-p}]F(x) = 0. \quad (2.14)$$

Для этого достаточно доказать, что вспомогательная волновая функция

$$\mathcal{A}(x, p) \equiv (e^p - e^{-r})\mathcal{W}(x, p) = e^{ixp}(e^p - e^{-r} - R(x)) \quad (2.15)$$

удовлетворяет уравнению (2.14). Для этого подставим $F(x) = \mathcal{A}(x, p)$ в левую часть (2.14) и получим функцию $\mathcal{D}(x, p)$ вида

$$\mathcal{D}(x, p) = e^{ixp} (e^p c_1(x) + c_0(x) + e^{-p} c_{-1}(x)).$$

Очевидно, что для обращения этой функции в нуль необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты c_1 , c_0 и c_{-1} обращались в нуль. Далее, легко проверить эквивалентности

$$\begin{aligned} c_1(x) = 0 &\Leftrightarrow V_b(x) = R(x - i) - R(x), \\ c_{-1}(x) = 0 &\Leftrightarrow V_a(x) = \frac{1 + e^r R(x)}{1 + e^r R(x + i)}. \end{aligned}$$

Поскольку мы определили потенциалы V_a и V_b так, что равенства в правых частях выполнены, то можно заключить, что коэффициенты c_1 и c_{-1} обращаются в нуль.

Нетривиальное утверждение состоит в том, что коэффициент $c_0(x)$ также обращается в нуль. Даже в данном весьма простом случае непосредственная проверка этого связана с объемными вычислениями. Но прямой проверки можно избежать, если обратиться к аргументу единственности, который обобщается на случай произвольного N . А именно, сначала заметим, что поскольку $R(x)$ удовлетворяет системе вида (2.6) при $N = 1$, то из (2.15) и (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, r) &= e^{irx} (e^r - e^{-r}) (1 - CR(x)) = \\ &= e^{irx} (e^r - e^{-r}) d(x) R(x) = \alpha(x) \mathcal{A}(x, -r), \\ \alpha(x + i) &= \alpha(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Основным моментом здесь является тот факт, что функция

$$G(x, p) = e^{ixp} (e^p + c(x)), \tag{2.17}$$

удовлетворяющая соотношению

$$G(x, r) = \alpha(x) G(x, -r) \tag{2.18}$$

для данной i -периодической функции $\alpha(x)$, *единственна*. Действительно, подстановка (2.17) в (2.18) показывает, что $c(x)$ определяется единственным образом. Чтобы использовать это обстоятельство, вспомним, что, как было показано выше, как $\mathcal{A}(x, p)$, так и $\mathcal{A}(x, p) - \mathcal{D}(x, p)$ имеют вид (2.17). Кроме того, функция $\mathcal{A}(x, p)$ удовлетворяет соотношению (2.18) ввиду (2.16). Далее, функция $\mathcal{D}(x, p)$ возникает из подстановки $F(x) \rightarrow \mathcal{A}(x, p)$ в левую часть уравнения (2.14), и поскольку $\alpha(x)$ является i -периодической функцией, то и функция $\mathcal{D}(x, p)$ также удовлетворяет (2.18). Но тогда как $\mathcal{A}(x, p)$, так и $\mathcal{A}(x, p) - \mathcal{D}(x, p)$ удовлетворяют (2.18), а потому $\mathcal{A}(x, p) = \mathcal{A}(x, p) - \mathcal{D}(x, p)$ в силу единственности. Отсюда $\mathcal{D}(x, p) = 0$, что и завершает доказательство.

Подчеркнем, что предположение о том, что $\mu(x) \rightarrow c \in \mathbb{C}^*$ при $|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty$, не используется в этом доказательстве (а i -периодичность $\mu(x)$, наоборот, используется). В результате можно расширить указанный выше класс безотражательных АДО при $N = 1$

посредством ослабления требований на $\mu(x)$. Например, легко проверить, что, выбирая $\mu(x) \equiv c_1 + c_2 \operatorname{th} \pi(x - x_0)$, приходим к тем же заключениям. Выбирая же вместо этого $\mu(x) \equiv c_1 + c_2 \operatorname{ch} 4\pi(x - x_0)$, получаем, что $R(x) \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Re} x| \rightarrow \infty$, а потому условия (1.7)–(1.9) справедливы при $a(p) = 1$ и $b(p) = 0$.

Последний пример показывает, что *взаимодействующий* АДО A , задаваемый формулой (1.6) (т.е. с потенциалами $(V_a, V_b) \neq (1, 0)$, удовлетворяющими соотношениям (1.7)), может допускать собственные функции $\mathcal{W}(x, p)$ с *тривиальным* рассеянием. Уже было отмечено, что *свободный* АДО A_0 вида (1.1) допускает собственные функции, которые приводят к *нетривиальному* рассеянию, и *унитарное* преобразование собственных функций. Любая общая теория, основанная на соотношениях (1.6) и (1.7), должна учитывать это явление, не имеющее аналогов для операторов Шредингера и Якоби.

Нашей целью в работах [4]–[6] было выделение *специального* класса безотражательных АДО, свойства которых можно описать весьма детально. Ограничения (2.1)–(2.4) на спектральные данные определяют этот специальный класс, который уже является достаточно большим и который можно систематически изучать с алгебраической точки зрения [4]. Для дальнейших целей отметим два общих аспекта, относящихся к объектам в этом классе.

Во-первых, наличие и положение возникающих в конце концов полюсов по x функции $\mathcal{W}(x, p)$ определяется наличием и положением нулей множителей $\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)$ и τ -функции

$$\tau(x) \equiv |\mathbf{1}_N + CD(x)^{-1}|. \quad (2.19)$$

Действительно, это следует из соотношения (2.9), если разрешить систему (2.6) в соответствии с правилом Крамера.

Второй аспект относится к условиям, обеспечивающим *формальную* самосопряженность АДО A вида (1.6) на $L^2(\mathbb{R}, dx)$ безотносительно областей определения, сингулярностей и т. п. Очевидно, требуется, чтобы потенциал $V_b(x)$ был вещественнозначным при вещественных x и, кроме того, чтобы

$$[V_a(x)e^{i\partial_x}]^* = e^{i\partial_x} \overline{V_a(x)} = \overline{V_a(x-i)}e^{i\partial_x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В обозначениях

$$f^*(x) \equiv \overline{f(\bar{x})}, \quad x \in \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{M},$$

формальная самосопряженность обеспечивается условиями

$$V_b^*(x) = V_b(x), \quad V_a^*(x) = V_a(x-i).$$

Далее можно показать, что это эквивалентно условиям

$$\operatorname{Re}(r_n) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.20)$$

$$\operatorname{Re}(e^{-r_n} \mu_n(x)) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

(см. приложение D в работе [4]). При $N = 1$ эти утверждения легко проверить непосредственно исходя из приведенных выше явных формул.

3. СВЯЗАННОЕ НЕЛОКАЛЬНОЕ СОЛИТОННОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ТОДЫ

Чтобы установить связь обсуждаемых выше объектов с солитонными эволюционными уравнениями, надо ввести подходящую зависимость от времени в нормировочные коэффициенты $\mu(x)$. Точнее говоря, такова процедура, приводящая к солитонным решениям решетчатых уравнений Кортевега–де Фриза (КдФ) и Тоды для случая безотражательных операторов Шредингера и Якоби. Рассматривая ситуацию с этими дискретными разностными операторами как указание на правильный способ действий, определим временную эволюцию как

$$\mu_n(x) \rightarrow \mu_n(x) e^{2it \operatorname{sh} r_n}, \quad n = 1, \dots, N.$$

После этой подстановки все величины R , V_a , V_b , $\mathcal{W}$ и τ зависят от t . Для упрощения обозначений мы будем, как правило, опускать эту временную зависимость. Снова используя свойства, вытекающие только из системы (2.6) (теперь зависящей от времени), можно получить уравнения

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(x) &= iV_a(x)[V_b(x+i) - V_b(x)], & \dot{V}_b(x) &= i[V_a(x) - V_a(x-i)], \\ \dot{\mathcal{W}}(x, p) &= (B\mathcal{W})(x, p) + ie^p \mathcal{W}(x, p), & B &\equiv -i(e^{-i\partial_x} + V_b(x)) \end{aligned}$$

и

$$\ddot{\tau}(x)\tau(x) - \dot{\tau}(x)^2 = \tau(x)^2 - \tau(x+i)\tau(x-i). \quad (3.1)$$

(См. раздел 2 работы [5]; эти уравнения легко проверить непосредственно при $N = 1$.)

Очевидно, уравнение (3.1) является билинейной формой уравнения Хироты. Перепишав это уравнение как

$$\partial_t^2 \ln \tau(x) = 1 - \frac{\tau(x+i)\tau(x-i)}{\tau(x)^2}$$

и вводя функцию

$$\Psi(x) \equiv i \ln \left(\frac{\tau(x-i)}{\tau(x)} \right),$$

легко найти, что функция Ψ удовлетворяет нелокальному уравнению типа Тоды

$$\ddot{\Psi}(x) = ie^{i[\Psi(x+i) - \Psi(x)]} - ie^{i[\Psi(x) - \Psi(x-i)]}.$$

(Подобные нелокальные эволюционные уравнения изучались и ранее; см., например, обзор Сантини [12] и приведенную там литературу.)

Можно показать, что требование вещественнозначности функции $\Psi(x, t)$ при вещественных x и t удовлетворяется, если $\Delta\Delta O \ A(r, \mu(x, t))$ является формально самосопряженным, т. е. если выполнены условия (2.20) и (2.21). (Дело в том, что эти условия обеспечивают вещественнозначность $\tau(x - i/2)$ при вещественных x .)

Рассмотрим теперь решение для $N = 1$ при $\text{Im } r \in (0, \pi)$:

$$\Psi(x, t) = i \ln \left(\frac{1 + (2 \operatorname{sh} r)^{-1} (\mu(x))^{-1} e^{2ir(x-i) - 2it \operatorname{sh} r}}{1 + (2 \operatorname{sh} r)^{-1} (\mu(x))^{-1} e^{2irx - 2it \operatorname{sh} r}} \right).$$

Если $\mu(x)$ не является константой, эта функция не имеет вида бегущей волны $f(x - vt)$. Однако полагая

$$r = i\alpha, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad \mu(x) = \frac{e^{i\alpha}}{2 \operatorname{sh}(i\alpha)} e^{-2\alpha x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

получаем движущийся направо солитон типа кинка

$$\Psi(x, t) = i \ln \left(\frac{1 + e^{i\alpha} e^{-2\alpha[(x-x_0)-v(\alpha)t]}}{1 + e^{-i\alpha} e^{-2\alpha[(x-x_0)-v(\alpha)t]}} \right), \quad v(\alpha) \equiv \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (3.3)$$

Выбирая

$$r = i\alpha - i\pi, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad \mu(x) = -\frac{e^{i\alpha}}{2 \operatorname{sh}(i\alpha)} e^{-2\alpha x_0}, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

подобным же образом получаем соотношение (3.3) с заменой $t \rightarrow -t$ в правой части, т.е. движущийся налево солитон.

Обращаясь к случаю произвольного N , выберем спектральные данные вида (3.2) для $N_+ \in \{0, 1, \dots, N\}$ чисел, выбранных из $r_1, \dots, r_N$, и вида (3.4) для $N_- \equiv N - N_+$ оставшихся (этот выбор гарантирует, что выполнены условия (2.20) и (2.21) и функция $\Psi(x, t)$ является поэтому вещественнозначной при вещественных x, t). Тогда функцию $\Psi(x, t)$ можно рассматривать как N -солитонное решение: его асимптотика на больших временах содержит N_+ движущихся направо и N_- движущихся налево 1-кинковых решений, подробно рассмотренных выше.

Справедливость последнего утверждения не является очевидной, но его достаточно просто доказать в слабой форме (см. предложение 6.1 в работе [5]). Более подробный анализ (включающий изучение траекторий солитонов в пространстве-времени) опирается на довольно замысловатую репараметризацию $2N$ вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N, x_{0,1}, \dots, x_{0,N}$, в терминах которых определяется функция $\Psi(x, t)$. Эта репараметризация играет основную роль и при изучении вопросов самосопряженности. Мы продолжим ее описание в общем виде. (Подробности можно найти в разделе 5 работы [5].)

Для этого вспомним, что хорошо известные N -частичные системы Калоджеро–Мозера допускают обобщение на релятивистский случай [13]. Как и в нерелятивистском случае, имеется решение, описывающее N_+ частиц и N_- античастиц, в том смысле, что частица и античастица притягивают друг друга, тогда как две частицы или две античастицы отталкиваются. В работе [14] мы подробно рассмотрели это решение, а также частице-подобные решения уравнений КдФ, синус-Гордон и модифицированного КдФ. Действительно, последние решения солитонного типа можно также параметризовать релятивистскими N -частичными системами; такое соответствие солитон–частица можно очень эффективно использовать (см. раздел 7 в работе [14]).

Репараметризация, требуемая для указанных выше нелокальных солитонов Тоды, означает, что τ -функция (2.19) связана с матрицей Лакса L систем частиц следующим образом:

$$\tau\left(x - \frac{i}{2}, t\right) = |\mathbf{1}_N + L(x, t)|, \quad x, t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Здесь $L(x, t)$ обозначает матрицу Лакса, вычисленную в зависящей от (x, t) точке соответствующего $2N$ -мерного фазового пространства. Если только числа N_+ или N_- не обращаются в нуль, это соотношение является новым. Действительно, в предыдущих случаях солитонные τ -функции были связаны с *дуальными* матрицами Лакса систем частиц (см. также [15]). В нашем случае, к сожалению, аналитические следствия соответствия солитон–частица (выражаемые формулой (3.5)) представляются не такими эффективными, как ранее. В частности, даже когда числа N_+ или N_- обращаются в нуль, не удастся получить равномерные ограничения на асимптотическое поведение на больших временах. Более того, четкие траектории солитонов в пространстве-времени существуют только при достаточно больших временах (за исключением случаев, когда числа N_+ или N_- обращаются в нуль).

4. ИЗОМЕТРИЯ И ВОПРОСЫ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ

Сохраняя сделанный ранее выбор спектральных данных, приводящий к N -солитонным решениям, изучим теперь свойства гильбертова пространства (доказательства делаемых ниже утверждений см. в работе [6]). Основное свойство, требуемое для установления ортогональности и полноты, заключается в отсутствии полюсов функции $\mathcal{W}(x, p)$ в полосе $\operatorname{Im} x \in [-1, 0]$. Объясним сначала, как можно использовать соотношение (3.5) при $t = 0$ для исследования этого вопроса о полюсах.

Для этого заметим, что отсутствие полюсов в критической полосе гарантировано отсутствием нулей функции $\tau(x)$ в той же полосе. В самом деле, это следует из рассуждения, содержащего формулу (2.19) (напомним, что в данном разделе $\mu_1(x), \dots, \mu_N(x)$ – константы). Согласно (3.5) таких нулей нет, если спектр $L(x)$ не содержит числа -1 при $\operatorname{Im} x \in [-1/2, 1/2]$.

Здесь можно привлечь спектральный анализ матриц Лакса [14]. А именно, можно сделать вывод об отсутствии полюсов при условии, что

$$r_n \in i(-\pi, -\pi/2) \cup i(0, \pi/2), \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Это условие можно ослабить до

$$r_n \in i(0, \pi), \quad n = 1, \dots, N,$$

при $N = N_+$ и до

$$r_n \in i(-\pi, 0), \quad n = 1, \dots, N,$$

при $N = N_-$. Аналогичным образом в качестве спектральных данных в двух последних случаях можно выбрать произвольные точки фазового пространства. Представляется

вероятным, что условие (4.1) можно значительно ослабить, но при $N_+ N_- > 0$ существуют точки фазового пространства, приводящие к нулям функции τ в критической полосе.

Ниже мы будем считать, что спектральные данные таковы, что функция $\tau(x)$ не имеет нулей в указанной полосе. Рассмотрим подробнее некоторые наиболее характерные свойства гильбертова пространства. Во-первых, собственные функции $\mathcal{W}(x, r_n)$ оператора A при $r_n \in i(0, \pi)$ лежат в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ и являются попарно ортогональными. Во-вторых, преобразование собственных функций

$$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}, dp) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dx), \quad f(p) \mapsto (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \mathcal{W}(x, p) f(p)$$

является изометрическим. В-третьих, ортогональное дополнение к $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}, dp))$ есть линейная оболочка связанных состояний $\mathcal{W}(x, r_n)$ при $r_n \in i(0, \pi)$ (в частности, при $N_+ = 0$ нет связанных состояний, а преобразование $\mathcal{F}$ является унитарным).

Эти свойства позволяют связать самосопряженный оператор $\hat{A}$ на $L^2(\mathbb{R}, dx)$ с $A\Delta O$ A на $\mathcal{M}$ следующим образом. Определим $\hat{A}$ как умножение на $2 \operatorname{ch} r_n$ на N_+ связанных состояниях $\mathcal{W}(x, r_n)$ при $r_n \in i(0, \pi)$. На ортогональном дополнении $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}, dp))$ к подпространству связанных состояний определим оператор $\hat{A}$ как самосопряженный оператору умножения M на $L^2(\mathbb{R}, dp)$ с областью определения $\mathcal{D}(M)$:

$$\hat{A}\mathcal{F}f \equiv \mathcal{F}Mf \quad \forall f \in \mathcal{D}(M).$$

Теперь легко проверить, что при $f(p) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ функция $(\mathcal{F}f)(x)$ принадлежит $\mathcal{M}$ и что действие $\hat{A}$ на $\mathcal{F}f$ совпадает с действием A точно так же, как и действие $\hat{A}$ на связанных состояниях.

Рассмотрим подробно случай $N = 1$. Этот случай поучителен, в частности, потому, что различную природу выбора $N = N_+$ и $N = N_-$ легко проиллюстрировать при $N = 1$. Выбирая $N = N_+$ (см. (3.2)), можно положить $x_0 = 0$, поскольку x_0 является просто параметром сдвига. Тогда из (2.9) и (2.11) находим, что

$$\mathcal{W}_+(x, p) = e^{ixp} \frac{e^{i\alpha} \operatorname{sh}(\alpha x + \frac{p}{2}) - \operatorname{sh}(\alpha x - \frac{p}{2})}{2 \operatorname{ch}(\alpha x + \frac{i\alpha}{2}) \operatorname{sh}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})}, \quad N = N_+ = 1. \quad (4.2)$$

Подобным же образом выбор $N = N_-$ (3.4) с учетом (2.9) и (2.13) приводит к

$$\mathcal{W}_-(x, p) = e^{ixp} \frac{e^{i\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x + \frac{p}{2}) + \operatorname{ch}(\alpha x - \frac{p}{2})}{2 \operatorname{ch}(\alpha x + \frac{i\alpha}{2}) \operatorname{ch}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})}, \quad N = N_- = 1. \quad (4.3)$$

Из этих явных формул получаем

$$\mathcal{W}_\pm(x, p) \sim e^{ixp}, \quad \operatorname{Re} x \rightarrow \infty,$$

и

$$\mathcal{W}_+(x, p) \sim e^{i\alpha} \frac{\operatorname{sh}(\frac{p}{2} - \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{sh}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})} e^{ixp}, \quad \mathcal{W}_-(x, p) \sim e^{i\alpha} \frac{\operatorname{ch}(\frac{p}{2} - \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{ch}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})} e^{ixp}, \quad \operatorname{Re} x \rightarrow -\infty,$$

в соответствии с (2.12). Для квадратичной интегрируемости при $x = \infty$ требуется $\text{Im } p > 0$. Это ограничение на p может быть совместно с квадратичной интегрируемостью при $x = -\infty$, только если $p = i\alpha + 2ki\pi$, $k \in \mathbb{N}$, для $\mathcal{W}_+$ и $p = i\alpha + (2k+1)i\pi$, $k \in \mathbb{N}$, для $\mathcal{W}_-$. Тогда получаем

$$\mathcal{W}_+(x, i\alpha + 2ki\pi) = \frac{e^{-2k\pi x}}{e^{\alpha x} + e^{-i\alpha - \alpha x}}, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{W}_-(x, i\alpha + (2k+1)i\pi) = \frac{e^{-(2k+1)\pi x}}{e^{\alpha x} + e^{-i\alpha - \alpha x}}, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.5)$$

Поэтому следует выбрать $k = 0$, чтобы соотношение (4.4) приводило к функции из $L^2(\mathbb{R}, dx)$, тогда как формула (4.5) не дает квадратично-интегрируемой функций для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Соотношение (4.3) можно использовать для иллюстрации еще одного обстоятельства. При

$$\mathcal{W}_-\left(\frac{\pi x}{\alpha}, \frac{\alpha p}{\pi}\right) = \mu(x, p)e^{ixp}$$

функция $\mu(x, p)$ является, очевидно, i -периодической и имеет вид

$$\mu(x, p) \sim \begin{cases} 1, & \text{Re } x \rightarrow \infty, \\ \frac{e^{\frac{\alpha p}{\pi}} + e^{i\alpha}}{e^{\frac{\alpha p}{\pi}} + e^{-i\alpha}}, & \text{Re } x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

т.е. удовлетворяет условиям (1.4). Поскольку функция $(2\pi)^{-1/2}\mathcal{W}_-(x, p)$ является ядром унитарного оператора, это свойство выполнено и для масштабированного ядра $(2\pi)^{-1/2}\mu(x, p)e^{ixp}$. В результате в гильбертовом пространстве получаем пример взаимодействующего самосопряженного оператора $\hat{A}_\mu$ вида (1.5), связанного со свободным АДО A_0 вида (1.1).

Кратко остановимся теперь на вопросе о том, как соглашения и результаты работы [3] связаны с приведенными выше. Тройку параметров $(\hbar, \nu, \beta)$, использованных в работе [3], следует положить равными $(1, \alpha, 1/2)$. Заметим, что приведенные выше функции $\mathcal{W}_\pm(x, p)$ можно также рассматривать как общие собственные функции взаимодействующих АДО $A_\pm$ и свободного АДО

$$A_f \equiv e^{i\pi\alpha^{-1}\partial_x} + e^{-i\pi\alpha^{-1}\partial_x}$$

с собственными значениями $2 \operatorname{ch} p$ и $2 \operatorname{ch}(\pi p/\alpha)$. После унитарного преобразования подобия собственные функции из работы [3] сводятся к волновым функциям $\mathcal{W}(x, p)$ описанного в разделе 2 вида с одним специальным свойством, заключающимся в том, что все они суть общие собственные функции A и A_f с указанными собственными значениями.

Целесообразно подробно рассмотреть случай $N = 1$, прежде чем описывать ситуацию произвольного N . При вещественных x и p и при $N = 1$ функции $F_a(x, p)$ и $F_e(x, p)$

из разделов 4 и 5 работы [3] имеют вид

$$F_a(x, p) = e^{-\frac{i\alpha}{2}} \left(\frac{\operatorname{ch}(\alpha x + \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{ch}(\alpha x - \frac{i\alpha}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\operatorname{sh}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{sh}(\frac{p}{2} - \frac{i\alpha}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{W}_+(x, p),$$

$$F_e(x, p) = e^{-\frac{i\alpha}{2}} \left(\frac{\operatorname{ch}(\alpha x + \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{ch}(\alpha x - \frac{i\alpha}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\operatorname{ch}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{ch}(\frac{p}{2} - \frac{i\alpha}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{W}_-(x, p).$$

(Ветвь квадратного корня фиксируется требованием, чтобы соответствующие функции имели предел $e^{i\alpha/2}$ при $x, p \rightarrow \infty$.) Функция $F_r(x, p)$ из раздела 3 работы [3] аналогичным образом связана с волновой функцией $\mathcal{W}_r(x, p)$, соответствующей спектральным данным

$$r = i\alpha, \quad \mu(x) = -\frac{e^{i\alpha}}{2 \operatorname{sh}(i\alpha)}, \quad \alpha \in (0, \pi). \quad (4.6)$$

Легко проверить, что (ср. (4.2))

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_r(x, p) &= e^{\frac{\pi p}{2\alpha}} \mathcal{W}_+\left(x + \frac{i\pi}{2}\alpha, p\right) = \\ &= e^{ixp} \frac{e^{i\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x + \frac{p}{2}) - \operatorname{ch}(\alpha x - \frac{p}{2})}{2 \operatorname{sh}(\alpha x + \frac{i\alpha}{2}) \operatorname{sh}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})}, \end{aligned}$$

и тогда функция F_r имеет вид

$$F_r(x, p) = e^{-\frac{i\alpha}{2}} \left(\frac{\operatorname{sh}(\alpha x + \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{sh}(\alpha x - \frac{i\alpha}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\operatorname{sh}(\frac{p}{2} + \frac{i\alpha}{2})}{\operatorname{sh}(\frac{p}{2} - \frac{i\alpha}{2})} \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{W}_r(x, p).$$

Изменение знака μ в (4.6) по сравнению со спектральными данными для $\mathcal{W}_+(x, p)$ имеет радикальное последствие: преобразование собственных функций, соответствующее $\mathcal{W}_r(x, p)$, больше не является изометрическим. С другой стороны, преобразование собственных функций с ядром $(2\pi)^{-1/2} F_r(x, p)$ является изометрией из нечетного подпространства в $L^2(\mathbb{R}, dp)$ на нечетное подпространство в $L^2(\mathbb{R}, dx)$ (см. раздел 3 в работе [3]).

В работе [3] вопросы четности играют основную роль. Приведенные выше унитарные преобразования трех операторов A_+ , A_- и A_r , связанных с $\mathcal{W}_+$, $\mathcal{W}_-$ и $\mathcal{W}_r$, приводят к инвариантным относительно четности $\Delta\mathcal{O}$ $H_a^2 - 2$, $H_e^2 + 2$ и $H_r^2 - 2$ при $N = 1$ из работы [3]. Заметим в этой связи, что $\Delta\mathcal{O}$ A , задаваемые формулой (1.6), явным образом не инвариантны относительно четности (за исключением случая, когда $V_a(x) = 1$ и $V_b(x)$ четно).

Чтобы установить связь с результатами работы [3] при произвольном N , требуется преобразование унитарного подобия, обобщающее рассмотренное выше такое преобразование для $N = 1$. Чтобы задать это преобразование, вспомним формулу (2.7), определяющую $V_a(x)$. Из нее следует, что оператор A можно переписать как

$$A = e^{-i\partial_x} + \lambda(x) e^{i\partial_x} \lambda(x)^{-1} + V_b(x).$$

Не очевидно, но верно, что из требований формальной самосопряженности (2.20) и (2.21) следует, что $\lambda^*(x) = \lambda(x)^{-1}$. Поэтому $\lambda(x)$ является фазовым множителем при вещественных x . В этом случае унитарное подобие имеет вид

$$\begin{aligned} A \rightarrow \tilde{A} &\equiv \overline{\lambda(x)}^{\frac{1}{2}} A \lambda(x)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{\lambda(x-i)}{\lambda(x)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\partial_x} + \left(\frac{\lambda(x)}{\lambda(x+i)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\partial_x} + V_b(x), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\mathcal{W}(x, p) \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}(x, p) \equiv \overline{\lambda(x)}^{\frac{1}{2}} \mathcal{W}(x, p). \quad (4.8)$$

Квадратные корни выбраны так, чтобы предел $\lambda(x)$ при $x \rightarrow \infty$ был равен единице (см. (2.10)).

Инвариантные относительно четности операторы $H_a^2 - 2$, $H_e^2 + 2$ и $H_r^2 - 2$ в работе [3] имеют вид (4.7) при произвольном N . Но они составляют всего лишь малую часть интересных нас операторов $\tilde{A}$. Действительно, они соответствуют спектральным данным $r_1, \dots, r_N, \mu_1, \dots, \mu_N$, которые определены, коль скоро фиксирована величина α . Еще одним моментом, заслуживающим упоминания, является тот факт, что из соотношений (4.8), (1.9) и (2.10) вытекает, что

$$\tilde{\mathcal{W}}(x, p) \sim \begin{cases} e^{ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow \infty, \\ \exp\left(-\sum_{n=1}^N r_n\right) a(p) e^{ixp}, & \operatorname{Re} x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Прошедшая волна, таким образом, приобретает дополнительную фазу.

Сказанное выше существенно и при сравнении со сценарием, предложенным в работе [1]. Взяв за основу результаты работы [3], кажется естественным искать класс безотражательных АДО вида

$$\tilde{A} = V_+(x)^{\frac{1}{2}} e^{-i\partial_x} + V_-(x)^{\frac{1}{2}} e^{i\partial_x} + V_0(x), \quad (4.9)$$

свойства которых указаны в работе [1]. Приведенные здесь результаты можно адаптировать к картине, описанной в [1], однако представленная нами картина имеет определенные отличия. Действительно, если взять за исходный АДО A , задаваемый формулой (1.6), видим, что этот оператор имеет *мероморфные* коэффициенты; в этом случае нет точек ветвления, соответствующих квадратным корням, как в операторе $\tilde{A}$. Чтобы получить соответствующие самосопряженные операторы на $L^2(\mathbb{R}, dx)$, которые были бы инвариантными относительно четности при подходящих дополнительных условиях, следует допустить унитарное преобразование подобия, включающее квадратные корни из мероморфных функций (см. выше). Возникающие в этом весьма специальном случае работы [3] свойства четности могли бы остаться незамеченными при работе с АДО вида (1.6). Во всяком случае класс АДО $\tilde{A}$ вида (4.9), выделенный в работе [1], также заслуживает дальнейшего изучения (заметим, что здесь имеются три а priori независимых потенциала, в отличие от двух потенциалов в (1.6)).

Список литературы

- [1] *S. N. M. Ruijsenaars*. J. Nonlin. Math. Phys. (Suppl.). 2001. V. 8. P. 240–248.
- [2] *S. N. M. Ruijsenaars*. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 1627–1663.
- [3] *S. N. M. Ruijsenaars*. Publ. RIMS Kyoto Univ. 2000. V. 36. P. 707–753.
- [4] *S. N. M. Ruijsenaars*. J. Nonlin. Math. Phys. 2001. V. 8. P. 106–138.
- [5] *S. N. M. Ruijsenaars*. Reflectionless analytic difference operators: II. Relations to soliton systems. J. Nonlin. Math. Phys. (to appear).
- [6] *S. N. M. Ruijsenaars*. Reflectionless analytic difference operators: III. Hilbert space aspects (to appear).
- [7] *Ф. Калоджеро, А. Дегасперис*. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985.
- [8] *А. Ньюэлл*. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1985.
- [9] *H. Flaschka*. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. P. 703–716.
- [10] *М. Toda*. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
- [11] *Л. А. Татадзеян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [12] *P. M. Santini*. Integrable singular integral evolution equations. In: Important Developments in Soliton Theory. Eds. A. S. Fokas and V. E. Zakharov. New York: Springer, 1993. P. 147–177.
- [13] *S. N. M. Ruijsenaars and H. Schneider*. Ann. Phys. 1986. V. 170. P. 370–405.
- [14] *S. N. M. Ruijsenaars*. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1994. V. 30. P. 865–1008.
- [15] *S. N. M. Ruijsenaars*. Ann. Phys. 1997. V. 256. P. 226–301.