Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Когомологии алгебры Ли векторных полей на прямой, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:52:09

© 2001 г.

В. В. Жаринов*

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПРЯМОЙ

Предложен адекватный математический аппарат и найдены когомологии алгебры Ли гладких векторных полей на прямой с коэффициентами в важнейших представлениях, а именно: в тривиальном, естественном и присоединенном. Построена обобщающая серия комплексов и вычислены соответствующие когомологии.

Современное развитие теоретической и как следствие математической физики происходит под знаком их глубокой и всесторонней геометризации и алгебраизации. Глядя со стороны, можно подумать, что сейчас математическая физика есть своеобразная смесь специфических разделов геометрии и алгебры с известной долей анализа и теории уравнений в частных производных. Одну из центральных ролей в этом ансамбле играют алгебры Ли, причем следует отметить, что хотя вся история классической и квантовой физики неразрывно связана с симметриями и их математическим выражением группами и алгебрами Ли, в настоящее время совершается переход от конечномерных алгебр Ли, связанных с симметриями в физическом и изотопических пространствах, к бесконечномерным алгебрам, характерным для новейших квантовых теорий, например для теории струн и калибровочных моделей. Внедряясь в физику, математические конструкции приносят в нее присущие им объекты и методы исследования, давая единую базу для описания первоначально разнородных, не связанных между собой физических явлений. Один из многочисленных примеров – классификация элементарных частиц на основе представлений групп Ли.

Естественным языком, описывающим многие объекты, связанные с алгебрами Ли и их представлениями, являются когомологии алгебр Ли [1], которые одновременно дают адекватные методы исследования, классификации и нахождения естественных связей между изучаемыми физическими величинами. Особенно эффективным такой подход становится в бесконечномерном случае [2], [3], когда классические методы становятся неприменимыми. О современных тенденциях использования когомологий алгебр Ли в физике можно прочесть, например, в [4] (см. также цитируемую там литературу). В общем, судя по количеству публикаций в электронных архивах и физических журналах, можно заключить, что когомологии алгебр Ли все шире вовлекаются в теоретическую

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: victor@zharinov.mian.su; zharinov@mi.ras.ru

и математическую физику.

Важными для приложений элементами теории когомологий алгебр Ли являются вычислительный аппарат и набор полностью просчитанных характерных примеров. Известные результаты в этой области описаны в книге [2] и обзоре [3], где имеются многочисленные ссылки на оригинальные работы. Возможно, важнейшим классом бесконечномерных алгебр Ли являются алгебры Ли векторных полей на многообразиях. Простейшие из них – алгебры на единичной окружности и на прямой. Первые, как и вообще алгебры полей на компактных многообразиях, изучены лучше, поскольку в этом случае доступна техника инвариантного интегрирования [5] (см. [2], [3] и приведенные там ссылки). Наиболее полные результаты получены в случае коэффициентов в тривиальном представлении.

В предлагаемой работе вычисляются когомологии алгебры Ли гладких векторных полей на прямой с коэффициентами в трех важнейших представлениях, а именно: в тривиальном, естественном и присоединенном. Попутно разработан адекватный математический аппарат, сводящий вычисления к элементарным выкладкам и позволяющий легко обобщать рассмотренный случай. Основной упор сделан на алгебраическую, комбинаторную часть рассуждений, как на наиболее характерную для изучаемого вопроса, при этом аналитическая часть оставлена в стороне, как более тривиальная, не содержащая чего-либо необычного.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

1.1. Когомологии алгебр Ли. Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики нуль, $\mathfrak{A}$ – алгебра Ли над $\mathbb{F}$ со скобкой $[\cdot, \cdot]$, $\mathfrak{K}$ – модуль над $\mathfrak{A}$, т.е. $\mathfrak{K}$ есть линейное пространство над $\mathbb{F}$, и задано представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$,

$$\rho: \mathfrak{A} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathfrak{K}; \mathfrak{K}), \quad a \mapsto \rho(a): \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K} \quad \forall a \in \mathfrak{A},$$

так что, в частности, выполняется коммутаторное правило

$$\rho([a, b]) = [\rho(a), \rho(b)] \equiv \rho(a) \circ \rho(b) - \rho(b) \circ \rho(a) \quad \forall a, b \in \mathfrak{A},$$

где “ $\circ$ ” – знак композиции отображений.

Пусть

$$\wedge \mathfrak{A} = \bigoplus_{q \geq 0} \wedge^q \mathfrak{A}$$

– внешняя алгебра линейного пространства $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{F}$,

$$\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}) = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$$

– линейное пространство над $\mathbb{F}$ всех коцепей на $\mathfrak{A}$ со значениями в $\mathfrak{K}$, где $\mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\wedge^q \mathfrak{A}; \mathfrak{K})$ – линейные пространства всех q -линейных кососимметрических отображений из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$. Внешний дифференциал d на $\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$ задается правилом

$$(d\omega)(a_0, \dots, a_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq \alpha \leq q} (-1)^\alpha \rho(a_\alpha) (\omega(a_0, \dots, \check{a}_\alpha, \dots, a_q)) + \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta} \omega([a_\alpha, a_\beta], \dots, \check{a}_\alpha, \dots, \check{a}_\beta, \dots, a_q) \right\}$$

для $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$ и $a_0, \dots, a_q \in \mathfrak{A}$ (аргумент под значком “ $\check{}$ ” опускается), так что $d: \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}) \rightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$, $q \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$. В силу тождества Якоби и коммутаторного правила композиция $d \circ d = 0$, так что определен комплекс $\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}); d\}$ с когомологиями

$$H(\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}); d\}) = H(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}).$$

1.2. Алгебра Ли гладких векторных полей на прямой. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathcal{E}$ – ассоциативная коммутативная алгебра над $\mathbb{C}$ всех гладких (т.е. имеющих непрерывные производные всех порядков) комплекснозначных функций на прямой $\mathbb{R}$ с обычными поточечными операциями, $\mathfrak{A}$ – алгебра Ли всех гладких векторных полей на прямой (т.е. всех гладких дифференцирований алгебры $\mathcal{E}$). Подробнее,

$$\mathfrak{A} = \left\{ u = u(x) \frac{d}{dx}; \quad u(x) \in \mathcal{E}, \quad x \in \mathbb{R} \right\},$$

скобка Ли $[u, v] = w$, где $w = w(x)d/dx$,

$$w(x) = u(x)v'(x) - v(x)u'(x) = W_2[u, v](x)$$

есть вронскиан двух функций $u(x), v(x) \in \mathcal{E}$, вычисленный в точке $x \in \mathbb{R}$ (штрих означает производную по $x \in \mathbb{R}$). В частности, наделив линейное пространство $\mathcal{E}$ скобкой Ли, определяемой вронскианом, отождествим алгебры Ли $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{E}$.

Важнейшие представления алгебры Ли $\mathfrak{A}$ суть:

- а) тривиальное представление, где $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ и $\rho(u) = 0$, $u \in \mathfrak{A}$;
- б) естественное представление, где $\mathfrak{K} = \mathcal{E}$ и $\rho(u) = u(x)d/dx$, $u \in \mathfrak{A}$;
- в) присоединенное представление, где $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$ и $\rho(u) = [u, \cdot]$, $u \in \mathfrak{A}$.

Отметим, что тривиальное и присоединенное представления есть у любой алгебры Ли, а естественное – у любой алгебры Ли дифференцирований ассоциативной алгебры.

1.3. Когомологии, формулировки результатов. В случае коцепей с коэффициентами в тривиальном представлении внешний дифференциал действует по формуле

$$(d\omega)(u_0, \dots, u_q) = \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta} \omega([u_\alpha, u_\beta], u_0, \dots, \check{u}_\alpha, \dots, \check{u}_\beta, \dots, u_q)$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathbb{C})$, $u_0, \dots, u_q \in \mathfrak{A}$ и $q \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 1. Когомологии алгебры Ли $\mathfrak{A}$ гладких векторных полей на прямой с коэффициентами в тривиальном представлении, т.е. когомологии комплекса $\{C(\mathfrak{A}; \mathbb{C}); d\}$, равны

$$H^q(\mathfrak{A}; \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & q = 0, \\ \mathbb{C} \cdot W_3(0), & q = 3, \\ 0, & q \neq 0, 3, \end{cases}$$

где $W_3[u, v, w](0)$ – вронскиан трех функций $u, v, w \in \mathcal{E}$, вычисленный в точке $0 \in \mathbb{R}$.

В случае коцепей с коэффициентами в естественном представлении внешний дифференциал действует по формуле

$$(d\omega)(x; u_0, \dots, u_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq \alpha \leq q} (-1)^\alpha u_\alpha(x) (\omega(x; u_0, \dots, \check{u}_\alpha, \dots, u_q))'_x + \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta} \omega(x; [u_\alpha, u_\beta], u_0, \dots, \check{u}_\alpha, \dots, \check{u}_\beta, \dots, u_q) \right\}$$

для всех $\omega \in C^q(\mathfrak{A}; \mathcal{E})$, $u_0, \dots, u_q \in \mathfrak{A}$ и $q \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 2. Когомологии алгебры Ли $\mathfrak{A}$ гладких векторных полей на прямой с коэффициентами в естественном представлении, т.е. когомологии комплекса $\{C(\mathfrak{A}; \mathcal{E}); d\}$, равны

$$H^q(\mathfrak{A}; \mathcal{E}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & q = 0, \\ \mathbb{C} \cdot \frac{d}{dx}, & q = 1, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

В случае коцепей с коэффициентами в присоединенном представлении внешний дифференциал действует по формуле

$$(d\omega)(x; u_0, \dots, u_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq \alpha \leq q} (-1)^\alpha W_2[u_\alpha, \omega(u_0, \dots, \check{u}_\alpha, \dots, u_q)](x) + \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta} \omega(x; [u_\alpha, u_\beta], u_0, \dots, \check{u}_\alpha, \dots, \check{u}_\beta, \dots, u_q) \right\}$$

для всех $\omega \in C^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{A})$, $u_0, \dots, u_q \in \mathfrak{A}$ и $q \in \mathbb{Z}_+$.

ТЕОРЕМА 3. Когомологии алгебры Ли $\mathfrak{A}$ гладких векторных полей на прямой с коэффициентами в присоединенном представлении, т.е. когомологии комплекса $\{C(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}); d\}$, тривиальные, подробнее

$$H^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}) = 0, \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Остальная часть статьи посвящена доказательству перечисленных теорем и разработке адекватного математического аппарата.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

2.1. Экспоненциальное преобразование. Каждому $\xi \in \mathbb{C}$ поставим в соответствие функцию $e^\xi \in \mathcal{E}$, где $e^\xi(x) = e^{x\xi}$, $x \in \mathbb{R}$, причем $[e^\xi, e^\eta] = (\eta - \xi)e^{\xi+\eta}$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{C}$.

Приведем без излишних подробностей ряд определений и результатов из теории обобщенных функций, используемых в дальнейшем. Пусть $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q)$ – линейное локально-выпуклое пространство всех гладких функций на $\mathbb{R}^q$ с топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{R}^q$ вместе с частными производными любого порядка. Его сильное сопряженное пространство $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)$ есть линейное локально-выпуклое пространство всех обобщенных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^q$ с топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^q)$. Пусть $\text{Exp}(\mathbb{C}^q)$ – линейное пространство всех целых функций на $\mathbb{C}^q$ экспоненциального типа. Преобразование Лапласа $L: \mathcal{E}'(\mathbb{R}^q) \rightarrow \text{Exp}(\mathbb{C}^q)$, $\omega \mapsto L[\omega]$, задается формулой $L[\omega](\xi_1, \dots, \xi_q) = \omega(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_q})$ для всех $\omega \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbb{C}^q$. Линейное отображение L инъективно, его образ $L[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)] \subset \text{Exp}(\mathbb{C}^q)$ состоит из всех целых функций на $\mathbb{C}^q$, растущих не быстрее линейной экспоненты в вещественных направлениях и не быстрее степени в мнимых направлениях. Линейное пространство $L[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)]$ наделяется локально-выпуклой топологией, индуцированной из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)$, так что определен изоморфизм линейных локально-выпуклых пространств $L: \mathcal{E}'(\mathbb{R}^q) \simeq L[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)]$ (см., например, [6]).

По построению линейное пространство q -коцепей $C^q(\mathfrak{A}; \mathbb{C})$ есть подпространство в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)$, состоящее из всех кососимметрических обобщенных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^q$, подробнее

$$C^q(\mathfrak{A}; \mathbb{C}) = \{\omega \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^q): \pi^*\omega = \text{sign}(\pi)\omega \text{ для всех } \pi \in \Sigma_q\},$$

где Σ_q – множество всех перестановок индексов $\{1, \dots, q\}$, $\text{sign}(\pi)$ – знак перестановки $\pi \in \Sigma_q$, $(\pi^*\omega)(u_1, \dots, u_q) = \omega(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(q)})$. Надея образ $\Phi^q = L[C^q(\mathfrak{A}; \mathbb{C})] \subset L[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)]$ локально-выпуклой топологией, индуцированной из $L[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)]$, получаем изоморфизм линейных пространств $L: C^q(\mathfrak{A}; \mathbb{C}) \simeq \Phi^q$. Заметим, что $C^0(\mathfrak{A}; \mathbb{C}) = \Phi^0 = \mathbb{C}$. Для $q = 1, 2, \dots$ линейное локально-выпуклое пространство Φ^q состоит из всех целых кососимметрических функций на $\mathbb{C}^q$, растущих не быстрее линейной экспоненты в вещественных направлениях и не быстрее степени в мнимых направлениях, и наделено топологией, индуцированной из $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^q)$. Итак, определен изоморфизм $L: C(\mathfrak{A}; \mathbb{C}) \simeq \Phi$, где $\Phi = \bigoplus_{q \geq 0} \Phi^q$.

Далее, линейное пространство q -коцепей $C^q(\mathfrak{A}; \mathcal{E}) = \mathcal{E} \hat{\otimes} C^q(\mathfrak{A}; \mathbb{C})$, где символ $\hat{\otimes}$ означает замыкание тензорного произведения в подходящей топологии, которая для нас сейчас не важна (заметим, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^1)$). Отождествление $L = \text{id}_{\mathcal{E}} \otimes L$ распространяет преобразование Лапласа на $C^q(\mathfrak{A}; \mathcal{E})$ и приводит к изоморфизму $L: C^q(\mathfrak{A}; \mathcal{E}) \simeq \mathcal{F}^q$, где $\mathcal{F}^q = \mathcal{E} \hat{\otimes} \Phi^q$. Введем “подкрученное” преобразование $\Lambda: C^q(\mathfrak{A}; \mathcal{E}) \simeq \mathcal{F}^q$, где

$$\Lambda[\omega](x; \xi_1, \dots, \xi_q) = \exp\left(-x \sum_{1 \leq \alpha \leq q} \xi_\alpha\right) L[\omega](x; \xi_1, \dots, \xi_q)$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathcal{E})$, $x \in \mathbb{R}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbb{C}^q$. Итак, определен изоморфизм линейных пространств $\Lambda: \mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathcal{E}) \simeq \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{F}^q$, $\mathcal{C}^0(\mathfrak{A}; \mathcal{E}) = \mathcal{F}^0 = \mathcal{E}$.

Как было указано, линейные пространства $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{E}$ совпадают, так что определен и изоморфизм линейных пространств $\Lambda: \mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}) \simeq \mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеется изоморфизм комплексов*

$$L: \{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathbb{C}); d\} \simeq \{\Phi; d_{\mathbb{C}}\},$$

где дифференциал $d_{\mathbb{C}} = L \circ d \circ L^{-1}: \Phi \rightarrow \Phi$ действует по формуле

$$\begin{aligned} (d_{\mathbb{C}}\phi)(\xi_0, \dots, \xi_q) &= \\ &= \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta-1} (\xi_{\alpha} - \xi_{\beta}) \phi(\xi_{\alpha} + \xi_{\beta}, \xi_0, \dots, \check{\xi}_{\alpha}, \dots, \check{\xi}_{\beta}, \dots, \xi_q) \end{aligned}$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеется изоморфизм комплексов*

$$\Lambda: \{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathcal{E}); d\} \simeq \{\mathcal{F}; d_{\mathcal{E}}\},$$

где дифференциал $d_{\mathcal{E}} = \Lambda \circ d \circ \Lambda^{-1}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ действует по формуле

$$\begin{aligned} (d_{\mathcal{E}}f)(x; \xi_0, \dots, \xi_q) &= \\ &= \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq \alpha \leq q} (-1)^{\alpha} \left(\partial_x + \sum_{0 \leq \beta \leq q} \xi_{\beta} - \xi_{\alpha} \right) f(x; \xi_0, \dots, \check{\xi}_{\alpha}, \dots, \xi_q) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta-1} (\xi_{\alpha} - \xi_{\beta}) f(x; \xi_{\alpha} + \xi_{\beta}, \xi_0, \dots, \check{\xi}_{\alpha}, \dots, \check{\xi}_{\beta}, \dots, \xi_q) \right\} \end{aligned}$$

для всех $f \in \mathcal{F}^q$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеется изоморфизм комплексов*

$$\Lambda: \{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}); d\} \simeq \{\mathcal{F}; d_{\mathfrak{A}}\},$$

где дифференциал $d_{\mathfrak{A}} = \Lambda \circ d \circ \Lambda^{-1}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ действует по формуле

$$\begin{aligned} (d_{\mathfrak{A}}f)(x; \xi_0, \dots, \xi_q) &= \\ &= \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq \alpha \leq q} (-1)^{\alpha} \left(\partial_x + \sum_{0 \leq \beta \leq q} \xi_{\beta} - 2\xi_{\alpha} \right) f(x; \xi_0, \dots, \check{\xi}_{\alpha}, \dots, \xi_q) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta-1} (\xi_{\alpha} - \xi_{\beta}) f(x; \xi_{\alpha} + \xi_{\beta}, \xi_0, \dots, \check{\xi}_{\alpha}, \dots, \check{\xi}_{\beta}, \dots, \xi_q) \right\} \end{aligned}$$

для всех $f \in \mathcal{F}^q$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательства предложений 1–3 проводятся элементарными вычислениями.

2.2. Операции в пространстве Φ . В пространствах Φ^q , $q \in \mathbb{Z}_+$, выделим подпространства

$$\Phi^{p,q} = \{\phi(\xi) = \sum_{|n|=p} \phi_n \xi^n \in \Phi^q\} \text{ однородных многочленов,}$$

$$\Phi_{\neq p}^q = \{\phi(\xi) = \sum_{|n| \neq p} \phi_n \xi^n \in \Phi^q\} \text{ их дополнений и}$$

$$\Phi_{\geq p}^q = \{\phi(\xi) = \sum_{|n| \geq p} \phi_n \xi^n \in \Phi^q\} \text{ остатков,}$$

где порядок $p \in \mathbb{Z}_+$, аргумент $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbb{C}^q$, мультииндекс $n = (n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{Z}_+^q$, его модуль $|n| = \sum_{1 \leq \alpha \leq q} n_\alpha$, коэффициент $\phi_n \in \mathbb{C}$, моном $\xi^n = \xi_1^{n_1} \dots \xi_q^{n_q}$.

По построению функции $\phi \in \Phi^q$, $q \in \mathbb{Z}_+$, кососимметрические, т.е. $\pi^* \phi = \text{sign}(\pi) \phi$ для всех $\pi \in \Sigma_q$, где $(\pi^* \phi)(\xi_1, \dots, \xi_q) = \phi(\xi_{\pi(1)}, \dots, \xi_{\pi(q)})$, $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$. Это приводит к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\phi \in \Phi^q$, $q \in \mathbb{Z}_+$, тогда $\phi(\xi) = V_q(\xi) \cdot \rho(\xi)$, где

$$V_q(\xi) = \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq q} (\xi_\beta - \xi_\alpha)$$

– определитель Вандермонда, $\rho(\xi)$ – симметрическая целая функция с оценками того же вида, что и $\phi(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q) \in \mathbb{C}^q$.

В частности, $\Phi^{p,q} = 0$ при $p < \deg V_q = q(q-1)/2$.

Заметим, что $L^{-1}[V_q] = W_q[\dots](0)$ – вронскиан, вычисленный в точке $0 \in \mathbb{R}$, а $\Lambda^{-1}[V_q](x) = W_q[\dots](x)$ – вронскиан, вычисленный в точке $x \in \mathbb{R}$.

Введем на пространстве Φ ряд операций.

- Линейные отображения $\nabla_l^k: \Phi \rightarrow \Phi$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, зададим формулой

$$(\nabla_l^k \phi)(\xi_1, \dots, \xi_q) = \frac{1}{l!} \sum_{1 \leq \alpha \leq q} \xi_\alpha^k \partial_\alpha^l \phi(\xi_1, \dots, \xi_q)$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$, где частные производные $\partial_\alpha = \partial / \partial \xi_\alpha$. В частности, $\nabla_l^k: \Phi^{p,q} \rightarrow \Phi^{p+k-l,q}$, причем

$$\nabla_0^0|_{\Phi^{p,q}} = q \text{ id}_{\Phi^{p,q}}, \quad \nabla_1^1|_{\Phi^{p,q}} = p \text{ id}_{\Phi^{p,q}}$$

для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

- Линейные отображения $\lambda^k: \Phi \rightarrow \Phi$, $k \in \mathbb{Z}_+$, зададим формулой

$$(\lambda^k \phi)(\xi_0, \dots, \xi_q) = \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq \alpha \leq q} (-1)^\alpha \xi_\alpha^k \phi(\xi_0, \dots, \xi_\alpha, \dots, \xi_q)$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$. В частности, $\lambda^k: \Phi^{p,q} \rightarrow \Phi^{p+k,q+1}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

- Линейные отображения $\iota_k: \Phi \rightarrow \Phi$, $k \in \mathbb{Z}_+$, зададим формулой

$$(\iota_k \phi)(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = \frac{q}{k!} (\partial_0^k \phi(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{q-1}))|_{\xi_0=0}$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_1, \dots, \xi_{q-1} \in \mathbb{C}$. В частности, $\iota_k: \Phi^{p,q} \rightarrow \Phi^{p-k,q-1}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для всех $k, l, m, n \in \mathbb{Z}_+$ справедливы следующие равенства:

- 1) $[\nabla_l^k, \nabla_n^m] = \sum_{1 \leq r \leq l} \begin{bmatrix} k, m \\ l, n \end{bmatrix}_r \nabla_{l+n-r}^{k+m-r}$, где $\begin{bmatrix} k, m \\ l, n \end{bmatrix}_r = \binom{m}{r} \binom{l+n-r}{n} - \binom{k}{r} \binom{l+n-r}{l}$,
 $\binom{k}{l} = k! / (l!(k-l)!)$;
- 2) $[\nabla_l^k, \lambda^m] = \binom{m}{l} \lambda^{k+m-l}$;
- 3) $[\iota_m, \nabla_l^k] = \binom{m+l-k}{l} \iota_{m+l-k}$;
- 4) $\{\lambda^k, \lambda^l\} = 0$;
- 5) $\{\lambda^k, \iota_l\} = \delta_l^k \text{id}_\Phi$, где δ_l^k – символ Кронекера;
- 6) $\{\iota_k, \iota_l\} = 0$.

Обратим внимание, что здесь $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ – коммутатор, а $\{X, Y\} = X \circ Y + Y \circ X$ – антикоммутатор отображений $X, Y: \Phi \rightarrow \Phi$.

Доказательства всех этих формул проводятся прямыми вычислениями. Введем еще на пространстве Φ следующие операции.

- Линейное отображение $\delta: \Phi \rightarrow \Phi$ зададим формулой

$$\begin{aligned} (\delta\phi)(\xi_0, \dots, \xi_q) &= \\ &= \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq q} (-1)^{\alpha+\beta-1} (\xi_\alpha - \xi_\beta) \phi(\xi_\alpha + \xi_\beta, \xi_0, \dots, \check{\xi}_\alpha, \dots, \check{\xi}_\beta, \dots, \xi_q) \end{aligned}$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$. В частности, $\delta: \Phi^{p,q} \rightarrow \Phi^{p+1,q+1}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

- Линейные отображения $\delta_k: \Phi \rightarrow \Phi$, $k \in \mathbb{Z}$, зададим формулой $\delta_k = \delta - k\lambda^1$. В частности, $\delta_k: \Phi^{p,q} \rightarrow \Phi^{p+1,q+1}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Справедливы следующие равенства:

- 1) $\delta \circ \delta = 0$;
- 2) $\{\lambda^i, \delta\} = \lambda^{i+1} \circ \lambda^0$, $i = 0, 1$;
- 3) $\{\iota_k, \delta\} = \nabla_{k-1}^0 - \nabla_k^1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, в частности $\{\iota_0, \delta\} = -\nabla_0^1$, $\{\iota_1, \delta\} = \nabla_0^0 - \nabla_1^1$;
- 4) $[\nabla_0^1, \delta] = 0$;
- 5) $\{\lambda^i, \delta_k\} = \lambda^{i+1} \circ \lambda^0$, $i = 0, 1$, в частности $\lambda^0 \circ \delta_k + \delta_{k+1} \circ \lambda^0 = 0$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 6) $\delta_k \circ \delta_k = -k\lambda^2 \circ \lambda^0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Эти равенства доказываются прямыми вычислениями.

И еще две операции на пространстве Φ .

- Линейные отображения $R_k: \Phi \rightarrow \Phi$, $k \in \mathbb{Z}$, зададим формулой $R_k = \nabla_0^0 - \nabla_1^1 - k \text{id}_\Phi$. В частности, $R_k: \Phi^{p,q} \rightarrow \Phi^{p,q}$, причем $R_k|_{\Phi^{p,q}} = (q-p-k) \text{id}_{\Phi^{p,q}}$, откуда $\ker R_k \cap \Phi^q = \Phi^{q-k,q}$, $q \in \mathbb{Z}$.

- Линейные отображения $\rho_k: {}_k\Phi \rightarrow {}_k\Phi$, $k \in \mathbb{Z}$, где

$${}_k\Phi = \bigoplus_{q \geq 0} \Phi_{\neq(q-k)}^q,$$

зададим формулами

$$(\rho_k\phi)(\xi_1, \dots, \xi_q) = - \int_0^1 t^{k-q-1} \phi(t\xi_1, \dots, t\xi_q) dt$$

для всех $\phi \in \Phi_{\geq p}^q$, $p > q - k$, $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{C}$, и

$$\rho_k|_{\Phi^{p,q}} = (q - p - k)^{-1} \text{id}_{\Phi^{p,q}}$$

для $p \neq q - k$. Легко проверить, что эти формулы согласованы друг с другом и действительно определяют серию линейных отображений на ${}_k\Phi$, $k \in \mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Определены изоморфизмы линейных локально-выпуклых пространств*

$$R_k: {}_k\Phi \simeq {}_k\Phi, \quad (R_k)^{-1} = \rho_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для доказательства достаточно посмотреть на действие введенных отображений на однородных компонентах $\Phi^{p,q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Справедливы следующие равенства:*

- 1) $\lambda^l \circ R_k = R_{k+1-l} \circ \lambda^l$, $l, k \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\lambda^l \circ \rho_k = \rho_{k+1-l} \circ \lambda^l$, $l, k \in \mathbb{Z}$;
- 3) $[\delta, R_k] = 0$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 4) $[\delta, \rho_k] = 0$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 5) $\{\iota_1, \delta_k\} = R_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательства этих равенств сводятся к проверке действий на однородных компонентах с использованием предложений 5 и 6.

2.3. Вспомогательные комплексы. Согласно п. 4, 6 предложения 5 линейные отображения $\lambda^0, \iota_0: \Phi \rightarrow \Phi$ удовлетворяют равенствам $\lambda^0 \circ \lambda^0 = \iota_0 \circ \iota_0 = 0$, так что определены комплексы $\{\Phi; \lambda^0\}$, $\{\Phi; \iota_0\}$. Положим $\Psi = \ker \lambda^0 = \{\phi \in \Phi: \lambda^0 \phi = 0\}$ и $\Omega = \ker \iota_0 = \{\phi \in \Phi: \iota_0 \phi = 0\}$. Гомотопическая формула $\{\lambda^0, \iota_0\} = \text{id}_{\Phi}$ (см. п. 5 предложения 5) влечет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) *имеет место разложение $\Phi = \Psi \oplus \Omega$ ($\phi = \phi_{\Psi} + \phi_{\Omega}$, где $\phi_{\Psi} = \lambda^0(\iota_0 \phi)$, $\phi_{\Omega} = \iota_0(\lambda^0 \phi)$);*
- 2) *комплекс $\{\Phi; \lambda^0\}$ имеет тривиальные когомологии;*
- 3) *комплекс $\{\Phi; \iota_0\}$ имеет тривиальные гомологии.*

В силу п. 5 предложения 6 $\delta_k: \Psi^{p,q} \rightarrow \Psi^{p+1,q+1}$, где $\Psi^{p,q} = \Phi^{p,q} \cap \Psi$, для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$, а согласно п. 6 предложения 6 $\delta_k \circ \delta_k|_{\Psi} = 0$, так что определены комплексы $\{\Psi; \delta_k\}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

В дополнение к определенным выше пространствам ${}_k\Phi$ введем пространства ${}^k\Phi = \bigoplus_{q \geq 0} \Phi^{q-k,q}$, так что

$$\Phi = {}^k\Phi \oplus {}_k\Phi \quad \text{для каждого } k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичным образом, положим ${}_k\Psi = {}_k\Phi \cap \Psi$ и ${}^k\Psi = {}^k\Phi \cap \Psi$, так что $\Psi = {}^k\Psi \oplus {}_k\Psi$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$. По построению $\delta_k: {}^k\Psi \rightarrow {}^k\Psi$ и $\delta_k: {}_k\Psi \rightarrow {}_k\Psi$, следовательно, определены комплексы $\{{}^k\Psi; \delta_k\}$ и $\{{}_k\Psi; \delta_k\}$, причем

$$\{\Psi; \delta_k\} = \{{}^k\Psi; \delta_k\} \oplus \{{}_k\Psi; \delta_k\} \quad \text{для каждого } k \in \mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 1. *Комплексы $\{^k\Psi; \delta_k\}$ имеют тривиальные когомологии, так что когомологии*

$$H^q(\{\Psi; \delta_k\}) = H^q(\{^k\Psi; \delta_k\}), \quad q \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, в силу предложения 7 и п. 2, 4, 5 предложения 8 на пространствах $^k\Psi$ определены гомотопические формулы $\{S_k, \delta_k\} = \text{id}$, где $S_k = R_k \circ \iota_1$, что и влечет точность указанных комплексов (заметим, что отображения $R_k, \rho_k: \Psi \rightarrow \Psi$ в силу п. 1 и 2 предложения 8).

ЛЕММА 2. *Линейные пространства $^k\Psi = 0$ и, в частности, комплексы $\{^k\Psi; \delta_k\}$ нулевые при $k \geq 2$.*

Действительно, согласно предложению 4 $\Phi^{q-k, q} = 0$ при $q - k < q(q-1)/2$, т.е. при $q^2 - 3q + 2k > 0$, а последнее неравенство верно для всех $q \in \mathbb{Z}$, если $k \geq 2$.

ЛЕММА 3. *Когомологии комплекса $\{^0\Psi; \delta_0\}$ равны*

$$H^q(\{^0\Psi; \delta_0\}) = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \lambda^0 \xi^2, & q = 2, \\ \mathbb{C} \cdot \lambda^0 \chi, & q = 3, \\ 0, & q \neq 2, 3, \end{cases}$$

где $(\lambda^0 \xi^2)(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2^2 - \xi_1^2)/2$, $\chi(\xi_1, \xi_2) = 3(\xi_2 - \xi_1)\xi_1\xi_2$ (заметим, что $\lambda^0 \chi = V_3$ — определитель Вандермонда 3-го порядка).

Действительно, согласно предложениям 4 и 10 $(^0\Psi)^q = \Psi^{q, q} = \lambda^0 \Phi^{q, q-1} = 0$ при $q \neq 2, 3$, тогда как $\Phi^{2, 1} = \mathbb{C} \cdot \xi^2$, а $\Phi^{3, 2} = \mathbb{C} \cdot \chi$, причем в силу п. 5 предложения 6 $\delta_0(\lambda^0 \xi^2) = -\lambda^0(\delta_{-1} \xi^2) = 0$, поскольку $\delta_{-1} \xi^2 = -\lambda^0 \xi^3$.

ЛЕММА 4. *Когомологии комплекса $\{^1\Psi; \delta_1\}$ равны*

$$H^q(\{^1\Psi; \delta_1\}) = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot \lambda^0 1, & q = 1, \\ \mathbb{C} \cdot \lambda^0 \xi, & q = 2, \\ 0, & q \neq 1, 2, \end{cases}$$

где $(\lambda^0 1)(\xi) = 1$, $\lambda^0 \xi = V_2/2$, где V_2 — определитель Вандермонда 2-го порядка.

Действительно, в силу предложений 4 и 10 $(^1\Psi)^q = \Psi^{q-1, q} = \lambda^0 \Phi^{q-1, q-1} = 0$ при $q \neq 1, 2$, тогда как $\Phi^{0, 0} = \mathbb{C}$, а $\Phi^{1, 1} = \mathbb{C} \cdot \xi$, причем согласно п. 5 предложения 6 $\delta_1(\lambda^0 1) = -\lambda^0(\delta_0 1) = 0$, поскольку $\delta_0 1 = -\lambda^0 \xi$.

Комбинируя леммы 1–4, убеждаемся, что справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Когомологии комплексов $\{\Psi; \delta_k\}$ равны*

$$H^q(\{\Psi; \delta_k\}) = \mathbb{C} \cdot \lambda^0 Q_k^q, \quad q, k \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$Q_k^q = \delta_k^0(\delta_2^q \xi^2 + \delta_3^q \chi) + \delta_k^1(\delta_1^q 1 + \delta_2^q \xi) \in \Omega^{q-1},$$

δ_k^q — символ Кронекера, $\chi(\xi_1, \xi_2) = 3(\xi_2 - \xi_1)\xi_1\xi_2$.

2.4. Операции в пространстве $\mathcal{F}$. Как и в предыдущем пункте, выделим в пространствах $\mathcal{F}^q = \mathcal{E} \hat{\otimes} \Phi^q$ подпространства $\mathcal{F}^{p,q} = \mathcal{E} \hat{\otimes} \Phi^{p,q}$, $\mathcal{F}_{\neq p}^q = \mathcal{E} \hat{\otimes} \Phi_{\neq p}^q$, $\mathcal{F}_{\geq p}^q = \mathcal{E} \hat{\otimes} \Phi_{\geq p}^q$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Отождествление $\phi = 1 \otimes \phi$, $\phi \in \Phi$, дает вложение $\Phi \subset \mathcal{F}$. В свою очередь, отождествление $X = \text{id}_{\mathcal{E}} \otimes X$ распространяет каждое отображение X , первоначально определенное на пространстве Φ , на пространство $\mathcal{F}$, так что все операции из п. 2.2 определены на $\mathcal{F}$.

В частности, определены линейные отображения $\lambda^0, \iota_0: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, и мы положим $\mathcal{K} = \ker \lambda^0 = \mathcal{E} \hat{\otimes} \Psi$ и $\mathcal{M} = \ker \iota_0 = \mathcal{E} \hat{\otimes} \Omega$. Очевидно, что все вычисления, приведенные в п. 2.3, останутся справедливыми с заменой Ψ на $\mathcal{K}$, Ω на $\mathcal{M}$ и $\mathbb{C}$ на $\mathcal{E}$.

Введем на пространстве $\mathcal{F}$ собственную операцию.

• Линейное отображение $d_x: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ зададим формулой $d_x = \partial_x \circ \lambda^0$, где $\partial_x = \partial/\partial x$ — частная производная по x . В частности, $d_x: \mathcal{F}^{p,q} \rightarrow \mathcal{F}^{p,q+1}$ для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Справедливы следующие равенства:*

- 1) $d_x \circ d_x = 0$;
- 2) $d_x \circ \delta_k + \delta_{k+1} \circ d_x = 0$, $k \in \mathbb{Z}$;
- 3) $\{d_x, \lambda^k\} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

В силу п. 1 предложения 10 определен комплекс $\{\mathcal{F}; d_x\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Комплекс $\{\mathcal{F}; d_x\}$ имеет когомологии*

$$H^q(\{\mathcal{F}; d_x\}) = \Omega^q, \quad q \in \mathbb{Z}_+.$$

Действительно, пусть $\phi \in \Omega$, тогда формула $[\phi] = \phi + d_x \mathcal{F}$ определяет когомологию, поскольку $d_x \phi = \lambda_0 \phi'_x = 0$, причем $[\phi] = 0$, т.е. $\phi = d_x g = \lambda^0 g'_x$, тогда и только тогда, когда $\phi = 0$ в силу п. 1 предложения 9. С другой стороны, пусть дана когомология $[f]$, где $d_x f = \lambda^0 f'_x = 0$, тогда с помощью предложения 9 проверяется, что $f = \phi + d_x g$, где $\phi = \iota_0(\lambda^0 f(0)) \in \Omega$, $g = \iota_0 F$, $F'_x = f$ (поясним, что $f(0)(\xi) = f(0; \xi)$, $\xi \in \mathbb{C}^q$).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1–3

3.1. Доказательство теоремы 1. В силу предложения 1 достаточно вычислить когомологии комплекса $\{\Phi; d_{\mathbb{C}}\}$, т.е. комплекса $\{\Phi; \delta_0\}$, поскольку по определению $d_{\mathbb{C}} = \delta = \delta_0$ (заметим, что $\delta_0 \circ \delta_0 = \delta \circ \delta = 0$, см. п. 1 предложения 6). Вычисления проводятся в духе п. 2.3.

По построению $\Phi = {}^0\Phi \oplus {}_0\Phi$, причем $\delta_0: {}^0\Phi \rightarrow {}^0\Phi$ и $\delta_0: {}_0\Phi \rightarrow {}_0\Phi$, так что имеется разложение в прямую сумму комплексов

$$\{\Phi; \delta_0\} = \{{}^0\Phi; \delta_0\} \oplus \{{}_0\Phi; \delta_0\}.$$

Для комплекса $\{{}_0\Phi; \delta_0\}$ имеем гомотопическую формулу $\{S_0, \delta_0\} = \text{id}$, где $S_0 = R_0 \circ \iota_1$, так что его когомологии тривиальны и надо вычислить когомологии комплекса $\{{}^0\Phi; \delta_0\}$. По определению $({}^0\Phi)^q = \Phi^{q,q}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Согласно предложению 4 $\Phi^{q,q} = 0$ при $q < q(q-1)/2$, т.е. при $q > 3$. В свою очередь, простые рассуждения дают $\Phi^{0,0} = \mathbb{C}$, $\Phi^{1,1} = \mathbb{C} \cdot \xi$,

$\Phi^{2,2} = \mathbb{C} \cdot \delta\xi$, $\Phi^{3,3} = \mathbb{C} \cdot V_3$, где V_3 – определитель Вандермонда 3-го порядка. Учитывая, что $\delta = 0$ на $\Phi^0 = \mathbb{C}$, приходим к выводу, что когомологии $H^q(\{\Phi^0; \delta_0\}) = 0$ при $q \neq 0, 3$, тогда как $H^0(\{\Phi^0; \delta_0\}) = \mathbb{C}$ и $H^3(\{\Phi^0; \delta_0\}) = \mathbb{C} \cdot V_3$, причем, как отмечалось ранее, $L^{-1}[V_3] = W_3(0)$. Теорема 1 доказана.

3.2. Обобщающая серия комплексов. Введем в пространстве $\mathcal{F}$ ряд операций.

- Линейные отображения $\Delta_k: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{Z}$, зададим формулой $\Delta_k = \delta_k + \nabla_0^1 \circ \lambda^0$.
- Линейные отображения $d_k: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{Z}$, зададим формулой $d_k = d_x + \Delta_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Для всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливы следующие равенства:

- 1) $\Delta_k \circ \Delta_k = 0$;
- 2) $\delta_k \circ \lambda^0 + \lambda^0 \circ \Delta_k = 0$, в частности $\delta_k \circ d_x + d_x \circ \Delta_k = 0$;
- 3) $\{\iota_0, \Delta_k\} = 0$;
- 4) $d_k \circ d_k = 0$.

Доказательства проводятся прямыми вычислениями с использованием формул из п. 2.2 и п. 1 предложения 10.

ЗАМЕЧАНИЕ. В более общем виде можно ввести линейные отображения $\Delta_{km} = \delta - k\lambda^1 + m\nabla_0^1 \circ \lambda^0$ с некоторыми $k, m \in \mathbb{C}$. В этом случае композиция $\Delta_{km} \circ \Delta_{km} = 0$ тогда и только тогда, когда $m = 1$, $k \in \mathbb{C}$.

Итак, определена серия комплексов $\{\mathcal{F}; d_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$; вычислим соответствующие когомологии.

ЛЕММА 5. Уравнение $\lambda^0 \circ \Delta_k f = 0$, $f \in \mathcal{F}^q$, $k, q \in \mathbb{Z}_+$, имеет общее решение

$$f = aQ_k^{q+1} + \lambda^0 g + \Delta_k h, \quad a \in \mathcal{E}, \quad g, h \in \mathcal{F}^{q-1},$$

функция Q_k^q определена в теореме 4.

Действительно, всякая функция указанного вида является решением данного уравнения. С другой стороны, пусть $f \in \mathcal{F}^q$ и $\lambda^0 \circ \Delta_k f = 0$, тогда согласно п. 2 предложения 12 $\delta_k(\lambda^0 f) = 0$, причем $\lambda^0 f \in \mathcal{K}^{q+1}$. Отсюда в силу теоремы 4 $\lambda^0 f = a\lambda^0 Q_k^{q+1} + \delta_k \tilde{h}$, где $a \in \mathcal{E}$, $\tilde{h} \in \mathcal{K}^q$. Согласно п. 2 предложения 9 $\tilde{h} = -\lambda^0 h$, где $h \in \mathcal{F}^{q-1}$, так что

$$\lambda^0(f - \Delta_k h - aQ_k^{q+1}) = 0,$$

откуда в силу п. 2 предложения 9 $f = \lambda^0 g + \Delta_k h + aQ_k^{q+1}$, $g \in \mathcal{F}^{q-1}$.

ЛЕММА 6. Уравнение $d_x \circ \Delta_k f = 0$, $f \in \mathcal{F}^q$, $k, q \in \mathbb{Z}_+$, имеет общее решение

$$f = aQ_k^{q+1} + d_x g + \Delta_k h + \phi, \quad a \in \mathcal{E}, \quad g, h \in \mathcal{F}^{q-1}, \quad \phi \in \Omega^q,$$

функция Q_k^q определена в теореме 4.

Для доказательства следует слегка модифицировать предыдущие рассуждения. Именно, пусть $f \in \mathcal{F}^q$ и $d_x \circ \Delta_k f = 0$, тогда в силу п. 2 предложения 12 $\delta_k(d_x f) = 0$,

причем $d_x f \in \mathcal{K}^{q+1}$. Отсюда согласно теореме 4 $d_x f = a'_x \lambda^0 Q_k^{q+1} + \delta_k \tilde{h}$ с некоторыми $a \in \mathcal{E}$, $\tilde{h} \in \mathcal{K}^q$. Согласно п. 2 предложения 9 можно считать $\tilde{h} = -\lambda^0 h'_x$, $h \in \mathcal{F}^{q-1}$, откуда

$$d_x(f - aQ_k^{q+1} - \Delta_k h) = 0,$$

так что в силу предложения 11 $f - aQ_k^{q+1} - \Delta_k h = d_x g + \phi$ с некоторыми $g \in \mathcal{F}^{q-1}$ и $\phi \in \Omega^q$.

ЛЕММА 7. Функция Q_k^q , введенная в теореме 4, обладает свойствами:

- 1) $\lambda^0 Q_k^q = 0$ для тех и только тех $k, q \in \mathbb{Z}_+$, для которых $Q_k^q = 0$;
- 2) $\Delta_k Q_k^q = 0$ для всех $k, q \in \mathbb{Z}_+$.

Действительно, по построению функция $Q_k^q \in \Omega^{q-1}$, так что согласно п. 1 предложения 9 $\lambda^0 Q_k^q = 0$ лишь при условии $Q_k^q = 0$. Далее по построению $\delta_k(\lambda^0 Q_k^q) = 0$, так что в силу п. 2 предложения 12 $\lambda^0(\Delta_k Q_k^q) = 0$, откуда согласно п. 2 предложения 9 $\Delta_k Q_k^q = \lambda^0 P$, где $P = \iota_0(\Delta_k Q_k^q) = -\Delta_k(\iota_0 Q_k^q) = 0$ с учетом п. 3 предложения 12 и п. 1 предложения 9.

ТЕОРЕМА 5. Когомологии комплексов $\{\mathcal{F}; d_k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, равны

$$H^q(\{\mathcal{F}; d_k\}) = \mathbb{C} \cdot Q_k^{q+1}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

функция Q_k^q введена в теореме 4.

Действительно, пусть $f \in \mathcal{F}^q$ и $d_k f = 0$. Тогда $\Delta_k f = -d_x f = -\lambda^0 f'_x$, откуда $\lambda^0 \circ \Delta_k f = 0$ в силу п. 4 предложения 5, так что согласно лемме 5 $f = aQ_k^{q+1} + \lambda^0 g + \Delta_k h$ с некоторыми $a \in \mathcal{E}$ и $g, h \in \mathcal{F}^{q-1}$, причем

$$0 = d_k f = d_k(aQ_k^{q+1}) + \Delta_k(\lambda^0 g) + d_x(\Delta_k h).$$

Далее, в силу п. 2 леммы 7

$$d_k(aQ_k^{q+1}) = a'_x \lambda^0 Q_k^{q+1} + a \Delta_k Q_k^{q+1} = a'_x \lambda^0 Q_k^{q+1},$$

тогда как

$$\Delta_k(\lambda^0 g) + d_x(\Delta_k h) = \delta_k(\lambda^0(g - h'_x)),$$

с учетом п. 2 предложения 12. Итак,

$$a'_x \lambda^0 Q_k^{q+1} = -\delta_k(\lambda^0(g - h'_x)),$$

так что $a'_x = 0$ и $\delta_k(\lambda^0(g - h'_x)) = 0$ в силу теоремы 4. Следовательно, $a \in \mathbb{C} \subset \mathcal{E}$, тогда как $\lambda^0 \circ \Delta_k(g - h'_x) = 0$, и согласно лемме 5

$$g - h'_x = b'_x Q_k^q + \lambda^0 r + \Delta_k s'_x$$

с некоторыми $b \in \mathcal{E}$ и $r, s \in \mathcal{F}^{q-2}$. Подставляя $g = h'_x + b'_x Q_k^q + \lambda^0 r + \Delta_k s'_x$ в найденное ранее представление для f , получаем

$$\begin{aligned} f &= aQ_k^{q+1} + \lambda^0(h'_x + b'_x Q_k^q + \lambda^0 r + \Delta_k s'_x) + \Delta_k h = \\ &= aQ_k^{q+1} + d_k h + d_x(bQ_k^q) + d_x(\Delta_k s) + \Delta_k(bQ_k^q) + \Delta_k(\Delta_k s) = \\ &= aQ_k^{q+1} + d_k(h + bQ_k^q + \Delta_k s), \end{aligned}$$

где мы учли п. 2 леммы 7 и п. 1 предложения 12. Таким образом, когомология $[f] = aQ_k^{q+1}$ с некоторой комплексной постоянной a , что и требовалось доказать.

3.3. Доказательство теорем 2 и 3. Развитый выше математический аппарат, в частности предложения 2, 3 и теорема 5, сводят доказательство указанных теорем к элементарной проверке равенств $d_{\mathcal{E}} = d_1$ и $d_{\mathcal{A}} = d_2$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Когомологии алгебры Ли гладких векторных полей на прямой с коэффициентами в тривиальном представлении можно считать, по существу, известными [2], [3], хотя конкретных формулировок, по-видимому, не существует. В настоящей работе приведена теорема 1 с целью показать ее место в единой схеме и подчеркнуть общую методику доказательств. В случае коэффициентов в естественном и присоединенном представлениях имеются общие результаты, касающиеся когомологий с нетривиальными коэффициентами [7]–[9], из которых, по-видимому, можно получить явные выражения для изучаемых когомологий, однако необходимые для этого усилия заведомо превосходят затраченные здесь на прямые вычисления. В любом случае полезно иметь элементарные доказательства для основных модельных примеров. Кроме того, судя по всему, развитая при этом техника допускает обобщения на реальные ситуации, имеющие и физический интерес.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 98-01-00640 и 00-15-96073).

Список литературы

- [1] *П. Картье.* Когомологии алгебр Ли. В сб.: Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар “Софус Ли”. М.: ИЛ, 1962. С. 32.
- [2] *Д. Б. Фукс.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
- [3] *Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс.* Когомологии групп и алгебр Ли. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1988. С. 121.
- [4] *J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, J. C. Pérez Bueno.* An introduction to some novel applications of Lie algebra cohomology in mathematics and physics. arXiv:physics/9803046.
- [5] *И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс.* Функц. анализ и его прилож. 1968. Т. 2. № 4. С. 92.
- [6] *Л. Хёрмандер.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
- [7] *T. Tsuchishita.* Proc. Japan Acad. A. 1977. V. 53. P. 134.
- [8] *М. В. Лосик.* Функц. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 4. С. 44.
- [9] *В. Н. Решетников.* ДАН СССР. 1973. Т. 208. № 5. С. 1041.

Поступила в редакцию 15.I.2001 г.