Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Вирченко, О. Л. Шпилинская, Стохастические фракталы с марковскими измельчениями, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 178–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:28:11

© 2001 г.

Ю. П. Вирченко*, О. Л. Шпилинская†

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ С МАРКОВСКИМИ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯМИ

Рассмотрены введенные ранее авторами точечные случайные поля с марковскими измельчениями. Для этого класса неупорядоченных структур при наличии у них масштабной и пространственной однородности дано полное доказательство теоремы о самоусредняемости фрактальной размерности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе мы исследуем стохастические фракталы, которые конструируются посредством клеточных измельчений пространства погружения на основе метода, предложенного в статье [1]. Этот метод является развитием метода итерированных функций [2] в применении к проблеме построения реалистических моделей сред, неупорядоченность которых характеризуется широким спектром масштабов размерности длины. В этом случае при переходе от одного масштаба к другому усредненные по областям с соответствующими размерами статистические характеристики рассматриваемых сред изменяются самоподобным образом. Данную работу следует рассматривать как продолжение работы [1]. В связи с этим мы сохраняем все обозначения и терминологию статьи [1]. В разделе 2 дается только краткое описание основной конструкции *точечных случайных полей с марковскими измельчениями*, постановки проблемы самоусредняемости фрактальной размерности стохастических фракталов и неслучайности типа определяемой на них фрактальной меры. В разделе 3 строится пример стохастических фракталов со случайной фрактальной размерностью. В разделе 4 дано полное доказательство теоремы о неслучайности фрактальной размерности полей из класса $F[q]$. В статье [1] такое доказательство было сделано при том ограничении, что распределение вероятностей π_l , $l = 1, 2, \dots, N^d$, “развала” каждой клетки с размером L/N^{md} (L, N – параметры модели, d – размерность пространства), содержащей точки фрактала, на l клеток с размерами $L/N^{(m+1)d}$ таково, что $\pi_1 = 0$. Это ограничение не является физическим, и возникает вопрос о его снятии.

*Институт монокристаллов НАН Украины, Харьков, Украина

†Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

2. ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Клеточным измельчением куба $\Lambda = [0, L]^D$ – пространства погружения фрактала – мы называем последовательность разбиений

$$\mathfrak{K}_m = \{A_{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m}^{(m)}; \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d, \mathbf{n}_j \in \mathcal{I}_N^d, j = 1, 2, \dots, m\},$$

где $\mathcal{I}_N = \{0, \dots, N-1\}$, $m = 1, 2, \dots$, на непересекающиеся полуоткрытые справа d -мерные кубы (клетки). Клетки $A_{\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m}^{(m)}$ разбиения m -го порядка имеют длину ребра L/N^m , где степень дробления $N > 1$. Множество $\mathfrak{K}_m$ всех клеток разбиения порядка m описывается всевозможными упорядоченными наборами $\xi = [\mathbf{n}, \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m]$. Каждая же случайная реализация $\mathfrak{X}$ определяется последовательностью $\mathfrak{X}^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, клеточных покрытий, где $\mathfrak{X}^{(m)}$ – множества, построенные из клеток разбиения порядка m , пересечение которых с $\mathfrak{X}$ непусто. При этом $\mathfrak{X}^{(m+1)} \subset \mathfrak{X}^{(m)}$. Оказывается полезным введение операции проецирования $K_m(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^{(m)}$.

Для каждой случайной реализации $\mathfrak{X}$ фрактала (в каждой ее точке) определена фрактальная размерность

$$D = \sup\{\alpha: \lim_{m \rightarrow \infty} N^{-\alpha m} |\mathfrak{X}^{(m)}| = 0\}, \quad (1)$$

где $|\cdot|$ – число клеток, входящих в покрытие порядка m . Таким образом, размерность D , вообще говоря, является случайной величиной. Точно так же для каждой реализации $\mathfrak{X}$ и области $G \subset \Lambda$ определена мера Хаусдорфа–Каратеодори

$$\mu(X \cap G; s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\xi: A_{\xi}^{(m)} \in \text{пок. } \mathfrak{X} \cap G} s\left(\frac{L}{N^m}\right), \quad (2)$$

где $s(\cdot)$ – положительная возрастающая функция на $[0, \infty)$, определяющая тип меры (см. [3]). В нашем случае это означает, что для фиксированных реализации $\mathfrak{X}$ и области G подбирается убывающая последовательность $0 < s_m = s(L/N^m)$ такая, что предел в формуле (2) конечен и не равен нулю. Эта последовательность определена однозначно с точностью до асимптотической эквивалентности ($s'_m \sim s_m$, если $\lim(s'_m/s_m) = \text{const}$). Соответствующий класс эквивалентности $\{s_m\}$ является характеристикой меры. После определения этой характеристики формула (2) задает случайную величину, определяемую выбором реализации $\mathfrak{X}$. Однако характеристика $\{s_m\}$, вообще говоря, зависит от $\mathfrak{X}$ и от выбора области G . Стохастические фракталы, для которых выбор класса $\{s_m\}$ с вероятностью 1 не зависит от $\mathfrak{X}$ и от G , мы называли ранее [1] фракталами с однородной фрактальной стохастической (так как принимаемые ею значения случайны) мерой *неслучайного типа*. Именно такого рода структуры имеют первостепенное значение для описания фрактально-неупорядоченных физических сред и построения на них статистической механики флуктуирующих физических полей.

Вероятностное описание случайных множеств $\{\mathfrak{X}\}$ в кубе Λ (стохастических фракталов) осуществляется посредством последовательности распределений вероятностей $\{P_m(\cdot); m = 1, 2, \dots\}$ для случайных реализаций проекций $\mathfrak{X}^{(m)}$ [1], где

$$P_m(H) = \mathbf{P}\{\mathfrak{X}: K_m(\mathfrak{X}) = H\}, \quad H \subset \mathfrak{K}_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Функции $P_m(\cdot)$ нормированы,

$$\sum_{H \in \mathfrak{K}_m} P_m(H) = 1, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и подчиняются условию согласованности [1]

$$\sum_{\{S_m(\xi, G); \xi \in \mathfrak{K}_m(G)\}} P_{m+1}(G) = P_m(\mathfrak{K}_m(G)),$$

где $S_l(\xi, H) = \{\eta \in H : \mathfrak{K}_l(\eta) = \xi\}$.

В работе [1] был введен класс $\mathbb{F}[q]$ таких случайных точечных множеств, для которых члены последовательности $\{P_m(H); H \in \mathfrak{K}_m\}; m = 1, 2, \dots\}$ связаны соотношением

$$P_{m+1}(H) = Q_m(H | \mathfrak{K}_m(H)) P_m(\mathfrak{K}_m(H)), \quad (4)$$

где условная вероятность $\mathbf{P}\{\mathfrak{X} : \mathfrak{K}_{m+1}(\mathfrak{X}) = H | \mathfrak{K}_m(\mathfrak{X}) = \mathfrak{K}_m(H)\} = Q_m(H | \mathfrak{K}_m(H))$ представима в форме

$$Q_m(H | \mathfrak{K}_m(H)) = \prod_{\xi \in \mathfrak{K}_m(H)} q(\mathfrak{T}_m(\xi; H)), \quad H \in \mathfrak{K}_{m+1}. \quad (5)$$

Здесь функция $q(\cdot)$ представляет собой распределение вероятностей на множестве $2^{\mathfrak{I}_N^d}$, причем $q_m(\emptyset, \xi) = 0$,

$$\sum_{\emptyset \neq \sigma \subset \mathfrak{I}_N^d} q_m(\sigma, \xi) = 1$$

и $\mathfrak{T}_m(\xi; H) = \{\mathbf{n}_{m+1} : [\xi, \mathbf{n}_{m+1}] \in S_m(\xi, H)\}$ (см. [1]). Такие случайные множества были названы точечными случайными полями с марковскими измельчениями.

3. ФРАКТАЛЫ СО СЛУЧАЙНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

Построим пример стохастических фракталов, размерность которых является случайной величиной. Воспользуемся результатами работы [1]. Фрактальная размерность случайных множеств с марковскими измельчениями определяется формулой $D = \ln a / \ln N$, где $a = \Pi'(1)$,

$$\Pi(x) = \sum_{\sigma \subset \mathfrak{I}_N^d} q(\sigma) x^{|\sigma|} \equiv \sum_{l=1}^{N^d} x^l \pi_l \quad (6)$$

— производящая функция распределения вероятностей

$$\pi_l = \sum_{\sigma : \sigma \subset \mathfrak{I}_N^d, |\sigma|=l} q(\sigma)$$

случайной величины $\tilde{l}$ с набором значений $\{l = |\sigma|; \sigma \subset \mathfrak{I}_N^d\}$.

Введем случайный процесс $\{\tilde{q}_m(\cdot); m = 1, 2, \dots\}$ со значениями в форме распределений на $2^{\mathfrak{J}_N^d}$. Точная структура вероятностного пространства этого процесса несущественна (физически он может быть интерпретирован как стохастическая динамическая система, формирующая фрактал). Поэтому мы его не указываем явно. Все случайные величины, относящиеся к этому вероятностному пространству, будем отмечать тильдой. Построим условные вероятности перехода $\tilde{Q}_m(\cdot | \cdot)$ по формуле, аналогичной (5):

$$\tilde{Q}_m(H | K_m(H)) = \prod_{\xi \in K_m(H)} \tilde{q}_m(\mathsf{T}_m(\xi; H)), \quad H \in \mathfrak{K}_{m+1},$$

и на их основе представим по формуле (4) распределения $\tilde{P}_m(\cdot)$, аналогичные (3),

$$\tilde{P}_{m+1}(H) = \tilde{Q}_m(H | K_m(H)) \tilde{P}_m(K_m(H)).$$

Каждый набор этих распределений задает вероятностную меру для стохастического фрактала. Эта мера является условной. Она получается фиксацией реализации процесса $\{\tilde{q}_m(\cdot)\}$. Тогда “истинное” распределение вероятностей конструируемого стохастического фрактала определяется набором безусловных распределений $\{P_m(\cdot) = \langle \tilde{P}_m(\cdot) \rangle; m = 1, 2, \dots\}$ средних значений по распределению процесса $\{\tilde{q}_m(\cdot)\}$.

Положим, что процесс $\{\tilde{q}_m(\cdot)\}$ таков, что каждая траектория с вероятностью 1 сходится к финальному состоянию $\tilde{q}(\cdot)$, которое в общем случае для процессов такого типа является случайным. Тогда $\tilde{a}_m \rightarrow \tilde{a}$, где $\tilde{a}_m = \tilde{\Pi}'_m(1)$ и аналогично (6)

$$\tilde{\Pi}_m(x) = \sum_{\sigma \subset \mathfrak{J}_N^d} \tilde{q}(\sigma) x^{|\sigma|}.$$

Следовательно, величина $\tilde{a}$ в общем случае не является достоверной. Поэтому размерность фрактала, которая определяется ввиду независимости величины $\tilde{a}$ от m при $m \rightarrow \infty$ выражением $\ln \tilde{a} / \ln N$, также не является достоверной и имеет вполне определенное распределение вероятностей. Конкретная реализация описанной конструкции осуществляется, например, на основе *схемы разорения* [4], когда имеется два возможных финальных состояния, реализующихся с вероятностями, отличными от 0 и 1.

Заметим, что при моделировании процессов формирования стохастического фрактала на основе случайных процессов $\{\tilde{q}_m(\cdot)\}$ со случайными финальными состояниями, вообще говоря, нарушается условие стохастического самоподобия (понимаемого физически) формируемой структуры. Поэтому можно думать, что описанный выше класс стохастических фракталов не имеет физической интерпретации. Но так как стохастическое самоподобие при наличии пространственной однородности является довольно деликатным с математической точки зрения понятием, то задача о выделении наиболее широкого семейства случайных точечных множеств, обладающих неслучайной фрактальной размерностью, является актуальной.

4. ТЕОРЕМА О САОУСРЕДНЯЕМОСТИ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Как и в работе [1], инструментом доказательства самоусредняемости фрактальной размерности служит марковский *ветвящийся процесс* $\{\mathfrak{k}_m = |\mathfrak{X}^{(m)}|; m = 0, 1, 2, \dots\}$ – число клеток покрытия фрактала клетками разбиений на шаге m . Распределение вероятностей $\{P_m(\cdot); m = 1, 2, \dots\}$ определяет распределение вероятностей этого процесса [1], а именно выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = i\} = \sum_{j=0}^{N^{md}} \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = i \mid \mathfrak{k}_m = j\} \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_m = j\}.$$

При этом условная вероятность перехода на основании равенства (5) имеет вид

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = i \mid \mathfrak{k}_m = j\} = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_j \geq 1 \\ l_1 + \dots + l_j = i}}^{N^d} \prod_{k=1}^j \pi_{l_k}. \quad (7)$$

С введенным случайным процессом связана случайная последовательность $\{\mathfrak{c}_m; m = 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathfrak{c}_m = \mathfrak{k}_m / a^m$. В работе [1] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность $\{\mathfrak{c}_m; m = 0, 1, 2, \dots\}$ имеет с вероятностью 1 предел – некоторую случайную величину $\mathfrak{c}$.*

Более того, было доказано, что при ограничении $\pi_1 = 0$ на распределение π_l выполняется неравенство $\mathfrak{c} \neq 0$, и, как следствие этих двух фактов, фрактальная размерность оказывается неслучайной.

Далее мы устанавливаем самоусредняемость фрактальной размерности для любого случайного множества с марковским измельчением. Основным при этом является доказательство того, что с вероятностью 1 для любых распределений вероятностей $\pi_l \neq \delta_{1l}$ выполняется неравенство $\mathfrak{c} \neq 0$. Сформулируем и докажем предварительно ряд вспомогательных утверждений.

Введем вспомогательный случайный процесс. Пусть $\{\mathfrak{i}_m\}$ – случайная последовательность, число постоянств в цепи $\{\mathfrak{k}_m\}$. Она определяется равенством

$$\mathfrak{i}_m = \sum_{l=1}^m \delta(\mathfrak{k}_l - \mathfrak{k}_{l-1}), \quad \delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Последовательность пар $\{(\mathfrak{k}_m, \mathfrak{i}_m); m = 0, 1, 2, \dots\}$ является марковской цепью, так как таковой является случайная последовательность $\{\mathfrak{k}_m\}$. В самом деле,

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = k_{m+1} \mid \mathfrak{E}_m = \{\mathfrak{k}_m = k_m, \dots, \mathfrak{k}_0 = 1\}\} = \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = k_{m+1} \mid \mathfrak{k}_m = k_m\}.$$

В свою очередь, это влечет за собой с учетом равенства (8) соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = k_{m+1}, \mathfrak{i}_{m+1} = i_{m+1} \mid \mathfrak{E}_m\} &= \\ &= \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = k_{m+1}, i_m + \delta(k_{m+1} - k_m) = i_{m+1} \mid \mathfrak{E}_m\} = \\ &= \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = k_{m+1}, i_m + \delta(k_{m+1} - k_m) = i_{m+1} \mid (\mathfrak{k}_m = k_m, \mathfrak{i}_m = i_m)\}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{E}_m = \{(\mathfrak{k}_m = k_m, \mathfrak{i}_m = i_m), \dots, (\mathfrak{k}_0 = 1, \mathfrak{i}_0 = 0)\}$, указывающее на марковость цепи $\{(\mathfrak{k}_m, \mathfrak{i}_m); m = 0, 1, 2, \dots\}$.

Введем функцию

$$\mu(k \mid s) = \begin{cases} \frac{k}{s}, & k = 0 \pmod{s}, \\ \left[\frac{k}{s}\right] + 1, & k \neq 0 \pmod{s}. \end{cases}$$

Тогда уравнение марковской цепи $\{(\mathfrak{k}_m, \mathfrak{i}_m); m = 0, 1, 2, \dots\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\mathfrak{i}_{m+1} = i + 1, \mathfrak{k}_{m+1} = k\} &= \pi_1^k \mathbf{P}\{\mathfrak{i}_m = i, \mathfrak{k}_m = k\} + \\ &+ \sum_{k'=\mu(k \mid N^d)}^{k-1} \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_{m+1} = k \mid \mathfrak{k}_m = k'\} \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_m = k', \mathfrak{i}_m = i + 1\} (1 - \delta_{k1}). \end{aligned} \quad (9)$$

Определим далее производящую функцию $\{\Psi_m(x \mid z)\}$ одноточечного распределения вероятностей цепи $\{(\mathfrak{k}_m, \mathfrak{i}_m); m = 0, 1, 2, \dots\}$ соотношением

$$\Psi_m(x \mid z) = \sum_{k=1}^{N^{dm}} \sum_{i=0}^m x^k z^i \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_m = k, \mathfrak{i}_m = i\}. \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что $\Psi_m(x \mid 1) = \Psi_m(x)$, где $\Psi_m(\cdot)$ – производящая функция одноточечного распределения вероятностей процесса $\{\mathfrak{k}_m\}$, определяемая формулой

$$\Psi_m(x) = \sum_{k=1}^{N^{dm}} x^k \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_m = k\}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Производящая функция $\Psi_m(x \mid z)$ удовлетворяет разностному уравнению*

$$\begin{aligned} \Psi_{m+1}(x \mid z) - \Psi_{m+1}(x) &= [z - 1] \Psi_m(\pi_1 x \mid z) + \Psi_m(\Pi(x) \mid z) - \\ &- (\Psi_m(\Pi(x) \mid 0) - \Psi_m(\pi_1 x \mid 0)). \end{aligned} \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании определения (10) и формулы (9) имеем

$$\begin{aligned}\Psi_{m+1}(x | z) - \Psi_{m+1}(x | 0) &= \sum_{k=1}^{N^{d(m+1)}} \sum_{i=1}^{m+1} z^i x^k \mathbf{P}\{\mathbf{i}_{m+1} = i, \mathbf{k}_{m+1} = k\} = \\ &= \sum_{k=1}^{N^{d(m+1)}} \sum_{i=0}^m z^{i+1} x^k \mathbf{P}\{\mathbf{i}_{m+1} = i+1, \mathbf{k}_{m+1} = k\}.\end{aligned}$$

Используя уравнение (11), получим

$$\begin{aligned}\Psi_{m+1}(x | z) - \Psi_{m+1}(x | 0) &= z\Psi_m(\pi_1 x | z) + \\ &+ \sum_{k=2}^{N^{d(m+1)}} x^k \sum_{i=0}^{m-1} z^{i+1} \sum_{l=\mu(k|N^d)}^{k-1} \mathbf{P}\{\mathbf{k}_{m+1} = k | \mathbf{k}_m = l\} \mathbf{P}\{\mathbf{k}_m = l, \mathbf{i}_m = i+1\},\end{aligned}\quad (12)$$

так как при $i = m$ имеем $\mathbf{P}\{\mathbf{k}_m = l, \mathbf{i}_m = m+1\} = \delta_{l1}$. Воспользовавшись явным представлением (7), запишем

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{N^{d(m+1)}} x^k \sum_{i=0}^{m-1} z^{i+1} \sum_{l=\mu(k|N^d)}^{k-1} \mathbf{P}\{\mathbf{k}_m = l, \mathbf{i}_m = i+1\} \sum_{\substack{s_1+s_2+\dots+s_l=k \\ s_j \leq 1}} \prod_{j=1}^l \pi_{l_j} = \\ &= \sum_{i=0}^m z^{i+1} \sum_{l=1}^{N^{dm}} \mathbf{P}\{\mathbf{k}_m = l, \mathbf{i}_m = i+1\} \sum_{k=l+1}^{lN^{dm}} x^k \sum_{\substack{s_1+s_2+\dots+s_l=k \\ s_j \leq 1}} \prod_{j=1}^l \pi_{s_j}.\end{aligned}\quad (13)$$

Преобразуя внутреннюю сумму в правой части этого равенства

$$\begin{aligned}&\sum_{k=l+1}^{lN^{dm}} x^k \sum_{\substack{s_1+s_2+\dots+s_l=k \\ s_j \geq 1}} \prod_{j=1}^l \pi_{s_j} = \sum_{k=l}^{lN^{dm}} x^k \sum_{\substack{s_1+s_2+\dots+s_l=k \\ s_j \geq 1}} \prod_{j=1}^l \pi_{s_j} - (x\pi_1)^l, \\ &\sum_{\substack{s_1+s_2+\dots+s_l \leq lN^{dm} \\ s_j \geq 1}} \prod_{j=1}^l x^{s_j} \pi_{s_j} = \prod_{j=1}^l \sum_{s_j=1}^{N^d} \pi_{s_j} x^{s_j} = (\Pi(x))^l\end{aligned}\quad (14)$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\pi_l = 0$, $l > N^d$), с учетом (12)–(14) получим окончательно

$$\begin{aligned}\Psi_{m+1}(x | z) - \Psi_{m+1}(x | 0) &= z\Psi_m(\pi_1 x | z) + \\ &+ \sum_{i=0}^m z^{i+1} \sum_{l=1}^{N^{dm}} \mathbf{P}\{\mathbf{k}_m = l, \mathbf{i}_m = i+1\} ((\Pi(x))^l - (\pi_1 x)^l) = \\ &= z\Psi_m(\pi_1 x | z) + \Psi_m(\Pi(x) | z) - \Psi_m(\pi_1 x | z) - (\Psi_m(\Pi(x) | 0) - \Psi_m(\pi_1 x | 0)),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из уравнения (11) непосредственно вытекает выражение для среднего числа постоянств $\langle \mathbf{i}_m \rangle$.

ЛЕММА 1. *Имеет место формула*

$$\langle i_m \rangle = \sum_{l=0}^{m-1} \Psi_l(\pi_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\langle i_m \rangle = \sum_{i=1}^m i \mathbf{P}\{i_m = i\} = \left(\frac{\partial \Psi_m(1 | z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=1}.$$

Так как $\Pi(1) = 1$, то из уравнения (11) следует, что

$$\langle i_{m+1} \rangle = \Psi_m(\pi_1) + \left(\frac{\partial \Psi_m(1 | z)}{\partial z} \right) \Big|_{z=1} = \Psi_m(\pi_1) + \langle i_m \rangle.$$

Решением полученного разностного уравнения при условии $\langle i_0 \rangle = 0$ является

$$\langle i_m \rangle = \sum_{l=0}^{m-1} \Psi_l(\pi_1). \quad (15)$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Среднее значение предельной случайной величины $i_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} i_m$ определяется формулой*

$$\langle i_\infty \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \Psi_l(\pi_1). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность i_m монотонно не убывает. Поэтому существует i_∞ (при этом бесконечное значение не исключается). Предельным переходом в (15) получаем (16), что и требовалось доказать.

Докажем теперь одно свойство случайной последовательности $\{i_m; m = 0, 1, 2, \dots\}$, используемое нами далее при доказательстве основной теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Случайная величина i_∞ при $\Pi(x) \not\equiv x$ имеет конечный первый момент*

$$\langle i_\infty \rangle < \infty.$$

Поэтому, в частности, она конечна с вероятностью 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать сходимости ряда $\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(\pi_1)$. Ввиду неравенства $x\Pi'(x) > \Pi(x)$ имеем $(\Pi(x)/x)' > 0$. Тогда для $y < x$ выполняется неравенство $\Pi(y)/y < \Pi(x)/x$, используя которое, получаем

$$\frac{\Pi^{(k)}(\pi_1)}{\Pi^{(k-1)}(\pi_1)} = \frac{\Pi(\Pi^{(k-1)}(\pi_1))}{\Pi^{(k-1)}(\pi_1)} \leq \frac{\Pi(\Pi^{(k-2)}(\pi_1))}{\Pi^{(k-2)}(\pi_1)} \leq \dots \leq \frac{\Pi(\pi_1)}{\pi_1}.$$

Отсюда следует, что

$$\Pi^{(l)}(\pi_1) = \pi_1 \prod_{k=1}^l \frac{\Pi^{(k)}(\pi_1)}{\Pi^{(k-1)}(\pi_1)} < \pi_1 \left(\frac{\Pi(\pi_1)}{\pi_1} \right)^l.$$

Так как $\Pi(x) \neq x$, то на основании полученной оценки и очевидного при $x \leq 1$ свойства $\Pi(x) \leq x$ полинома $\Pi(x)$ имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m(\pi_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pi^{(m)}(\pi_1) \leq \pi_1 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Pi(\pi_1)}{\pi_1} \right)^m = \frac{\pi_1}{1 - \frac{\Pi(\pi_1)}{\pi_1}} < \infty.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай, когда $\Pi(x) = x$, имеет место при $\pi_l = 0, l > 1, \pi_1 = 1$, и в этом случае фрактальная размерность $D = 0$.

Доказанное утверждение означает, в частности, что с вероятностью 1 существует только конечный набор номеров постоянства случайной последовательности $\{\mathfrak{E}_m\}$.

Введем числовые последовательности $\{r_{l,m}; m = 1, 2, \dots\}$, $l = 1, 2, \dots$,

$$r_{l,m} = a^m \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{l-1}} \Psi_m(x_l) dx_l,$$

где $a = \Pi'(1)$. Тогда $r_{l,m}/a^m = \langle [(\mathfrak{E}_m + 1)(\mathfrak{E}_m + 2) \dots (\mathfrak{E}_m + l)]^{-1} \rangle$.

ЛЕММА 2. Для последовательностей $\{r_{l,m}; m = 1, 2, \dots\}$, $l = 1, 2, \dots$, справедлива рекуррентная оценка

$$r_{l,m+1} \leq a^{1-l} r_{l,m} + C_l r_{l+1,m}, \quad (17)$$

где

$$C_l = \frac{a}{(l-1)!} \left(r_{l,l}(1) + \int_0^1 |r_{l+1,l}(x)| dx \right).$$

Оценка (17) получена в теореме 2 из работы [1].

Из леммы 2 и теоремы 3 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Справедлива оценка $\langle \mathfrak{E}_m^{-1} \rangle < \text{const} \cdot a^{-m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в (17) $l = 1$, имеем

$$\langle (\mathfrak{k}_{m+1} + 1)^{-1} \rangle = a^{-(m+1)} r_{1,m+1} \leq a^{-1} (a^{-m} r_{1,m}) + a^{-1} C_1 a^{-m} r_{2,m},$$

где

$$C_1 = a \left(r_{1,1}(1) + \int_0^1 |r_{2,1}(x)| dx \right), \quad r_{1,1}(y) = \frac{d}{dy} \Pi^{(-1)}(y) > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\langle (\mathfrak{k}_{m+1} + 1)^{-1} \rangle < a^{-1} \langle (\mathfrak{k}_m + 1)^{-1} \rangle + a^{-1} C_1 \langle [(\mathfrak{k}_m + 1)(\mathfrak{k}_m + 2)]^{-1} \rangle. \quad (18)$$

В силу теоремы 3 ряд $\sum_{m=0}^{\infty} \langle [(\mathfrak{k}_m + 1)(\mathfrak{k}_m + 2)]^{-1} \rangle$ сходится. В самом деле,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M \langle [(\mathfrak{k}_m + 1)(\mathfrak{k}_m + 2)]^{-1} \rangle < \\ & < \left\langle \sum_{\substack{m=0, \\ \mathfrak{k}_m \neq \mathfrak{k}_{m+1}}}^M [(\mathfrak{k}_m + 1)(\mathfrak{k}_m + 2)]^{-1} + i_M \right\rangle < \langle i_M \rangle + \sum_{m=0}^M [(m+1)(m+2)]^{-1}, \end{aligned}$$

так как $\mathfrak{k}_m \geq m$. Переходя к пределу $M \rightarrow \infty$, получаем требуемую сходимость ряда.

Применяя полученное неравенство (18), найдем

$$\langle \mathfrak{k}_m^{-1} \rangle < a^{-m} \left(\langle \mathfrak{k}_0^{-1} \rangle + a^{-1} C_1 \sum_{n=0}^{m-1} \langle [(\mathfrak{k}_n + 1)(\mathfrak{k}_n + 2)]^{-1} \rangle \right),$$

что приводит к искомой оценке с постоянной

$$\text{const} = \langle \mathfrak{k}_0^{-1} \rangle + a^{-1} C_1 \sum_{n=0}^{m-1} \langle [(\mathfrak{k}_n + 1)(\mathfrak{k}_n + 2)]^{-1} \rangle,$$

что и требовалось доказать.

Среди всех последовательностей $\{r_{l,m}; m = 0, 1, 2, \dots\}$ особое значение имеет последовательность с $l = 2$.

ЛЕММА 3. Если ряд $S_2 = \sum_{m=0}^{\infty} r_{2,m}$ сходится, то с вероятностью 1 $\mathfrak{c}^{-1} < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае сходимости ряда S_2 , используя неравенства (17) при $l = 1$,

$$r_{1,m+1} < r_{1,m} + C_1 r_{2,m},$$

последовательно при $m = 0, 1, 2, \dots, n$ получим индукцией по n , что

$$r_{1,n+1} < r_{1,0} + C_1 \sum_{m=0}^n r_{2,m}.$$

Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$, получаем $\sup_n r_{1,n} < r_{1,0} + C_1 S_2$. Следовательно, существует конечная верхняя грань $\sup_m a^m \langle \mathfrak{k}_m^{-1} \rangle = \sup_m r_{1,m}$. Тогда

$$\langle \mathfrak{c}^{-1} \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathfrak{c}_m^{-1} \rangle \leq \sup_m a^m \langle \mathfrak{k}_m^{-1} \rangle.$$

Конечность среднего в правой части доказывает лемму.

Итак, для установления основного результата достаточно доказать сходимость ряда S_2 . Это доказательство при любом распределении π_l (исключая тривиальное, когда $\pi_l = \delta_{1l}$) довольно громоздко, и мы его разобьем на ряд лемм.

ЛЕММА 4. Пусть α_m — монотонно убывающая последовательность и f_n — случайная последовательность, для которой с вероятностью 1 существует такой случайный номер m , что при $n > m$ выполняется условие $f_n < \alpha_m$. Тогда последовательность $\langle f_m \rangle$ начиная с некоторого неслучайного номера n также подчинена неравенству

$$\langle f_m \rangle < \alpha_m. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. предположим, что существует бесконечный набор таких номеров $m_1, m_2, \dots$, что имеют место неравенства $\langle f_{m_i} \rangle \geq \alpha_{m_i}$. Тогда для каждого m_i , $i = 1, 2, \dots$, вероятность выполнения неравенства не равна нулю, что противоречит (19). Лемма доказана.

Введем случайную последовательность

$$\frac{\mathfrak{f}_{m+1}}{\mathfrak{f}_m} = \mathfrak{b}_m. \quad (20)$$

ЛЕММА 5. Справедлива формула

$$\langle |\mathfrak{b}_m - a|^2 \rangle = (a + a' - a^2) \langle \mathfrak{f}_m^{-1} \rangle. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим левую часть равенства (21) в виде

$$\langle |\mathfrak{b}_m - a|^2 \rangle = \langle \mathfrak{b}_m^2 \rangle - 2a \langle \mathfrak{b}_m \rangle + a^2. \quad (22)$$

Напомним (см. [1]), что двухточечная производящая функция $\Psi_{m,m+1}(x, y)$, определяемая формулой

$$\Psi_{m,m+1}(x, y) = \sum_{k=1}^{N^{md}} \sum_{l=k}^{kN^d} x^k y^l \mathbf{P}\{\mathfrak{f}_m = k, \mathfrak{f}_{m+1} = l\}, \quad (23)$$

связана с одноточечной функцией,

$$\Psi_{m,m+1}(x, y) = \Psi_m(x\Pi(y)).$$

Так как среднее $\langle \mathfrak{b}_m \rangle$ определяется формулой

$$\langle \mathfrak{b}_m \rangle = \sum_{k=1}^{N^{md}} \sum_{l=k}^{kN^d} \frac{l}{k} \mathbf{P}\{\mathfrak{f}_m = k, \mathfrak{f}_{m+1} = l\} = \left(\frac{d}{dy} \int_0^1 \frac{\Psi_{m,m+1}(x, y)}{x} dx \right) \Big|_{y=1},$$

то, используя (23), получаем

$$\langle \mathfrak{b}_m \rangle = \left(\frac{d}{dy} \int_0^1 \Psi_m(x\Pi(y)) \frac{dx}{x} \right) \Big|_{y=1}. \quad (24)$$

Поскольку

$$\langle \mathfrak{k}_m^{-1} \rangle = \int_0^1 \Psi_m(x) \frac{dx}{x}$$

и $\Pi'(1) = a$, то из (24) находим

$$\langle \mathfrak{b}_m \rangle = a \int_0^1 \Psi'_m(x) dx = a.$$

Несколько сложнее вычисляется величина $\langle \mathfrak{b}_m^2 \rangle$. Воспользовавшись определением

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{b}_m^2 \rangle &= \sum_{k=1}^{N^d} \sum_{l=k}^{N^d} \frac{l^2}{k^2} \mathbf{P}\{\mathfrak{k}_m = k, \mathfrak{k}_{m+1} = l\} = \\ &= \left(\frac{d}{dy} y \frac{d}{dy} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \Psi_{m,m+1}(x', y) \frac{dx'}{x'} \right) \Big|_{y=1}, \end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{b}_m^2 \rangle &= \left(\frac{d}{dy} y \frac{d}{dy} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \Psi_m(x' \Pi(y)) \frac{dx'}{x'} \right) \Big|_{y=1} = \\ &= \left[\frac{d}{dy} (y \Pi'(y)) \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \Psi'_m(x' \Pi(y)) dx' \right] \Big|_{y=1} = \\ &= \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{y \Pi'(y)}{\Pi(y)} \right) \int_0^1 \Psi_m(x \Pi(y)) \frac{dx}{x} \right] \Big|_{y=1} = \\ &= \left[\frac{y (\Pi'(y))^2}{\Pi(y)} \right] \Big|_{y=1} + \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{y (\Pi'(y))^2}{\Pi(y)} \right) \right] \Big|_{y=1} \langle \mathfrak{k}_m^{-1} \rangle. \end{aligned}$$

Используя равенства $\Pi'(1) = a$, $\Pi''(1) = a'$ и выполняя дифференцирования, получаем

$$\langle \mathfrak{b}_m^2 \rangle = a^2 + (a' + a - a^2) \langle \mathfrak{k}_m^{-1} \rangle.$$

Подстановка этого выражения в (22) приводит к (21). Лемма доказана.

Теперь докажем утверждение, которое является ключом к получению основного результата.

ТЕОРЕМА 4. *С вероятностью 1 случайная величина $\mathfrak{s}$ не равна нулю.*

Доказательство состоит из нескольких пунктов.

1. Покажем, что при выполнении условий леммы 4 сходится ряд S_2 . В самом деле, на основании леммы 4 имеем, что для достаточно больших l сходится ряд S_{l+1} . Тогда, используя лемму 3, получим последовательно, что сходятся ряды S_j с $j = l, l-1, \dots, 2$. Это следует из рекуррентного неравенства

$$r_{j,m+1} \leq a^{1-j} r_{j,m} + C_j r_{j+1,m}$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$. Суммируя эти неравенства по m , получаем при $j > 1$ оценку

$$(1 - a^{1-j})S_j \leq r_{j,0} + C_j S_{j+1},$$

из которой и следует требуемое утверждение.

2. Покажем, что с вероятностью 1 существует такой случайный номер n , что при $n > n$ выполняется неравенство

$$|b_n - a| \leq \sigma, \quad a - 1 > \sigma > 0. \quad (25)$$

Из леммы 5 на основании неравенства Чебышева следует, что

$$P\{|b_m - a| > \sigma\} \leq \varepsilon_m, \quad \varepsilon_m = \frac{(a + a' - a)}{\sigma^2} \langle \mathfrak{t}_m^{-1} \rangle.$$

С другой стороны, используя следствие леммы 2, имеем $\sum_m \varepsilon_m < \infty$. Наконец, привлекая теорему, приведенную в приложении, получаем, что последовательность b_m сходится с вероятностью 1 к a , что и приводит к нужному утверждению.

3. Пусть число σ таково, что $0 < \sigma < a - 1$. Из п. 2 следует, что с вероятностью 1 существует такой случайный номер m , для которого при $n > m$ выполняется неравенство (25) и, следовательно (см. (20)),

$$\mathfrak{t}_n^{-1} = \mathfrak{t}_m^{-1}(b_m b_{m+1} \dots b_{n-1}) < \mathfrak{t}_m^{-1}(a - \sigma)^{-(n-m)}.$$

Увеличивая номер m , всегда можно добиться выполнения неравенства $\mathfrak{t}_n^{-1} < (a - \sigma)^{-n}$. Отсюда следует, что для этих значений n выполняется неравенство $a^n / \mathfrak{t}_n^l < (a^{1/l} / (a - \sigma))^{ln}$. Выберем теперь l так, чтобы $a^{1/l} / (a - \sigma) < 1$, и положим $[a / (a - \sigma)^l]^n = \alpha_n$. Тогда с вероятностью 1 выполняется неравенство $a^n / \mathfrak{t}_n^l < \alpha_n$ для всех достаточно больших n . Следовательно, применима лемма 6, согласно которой $r_{l,n} < \alpha_n$ начиная с некоторого номера.

4. Из п. 3 следует, что существует номер l , для которого ряд $S_l < \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ сходится. В п. 1 было показано, что сходится ряд S_2 . Это, в свою очередь, с учетом леммы 3 приводит к тому, что $\mathfrak{c}^{-1} < \infty$ с вероятностью 1. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что можно было ограничиться величиной $l = 2$, так как при $a > 1$ для достаточно малого σ можно добиться выполнения неравенства $a^{1/2} / (a - \sigma) < 1$.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Случайные множества с марковским измельчением имеют неслучайную фрактальную размерность D , вычисляемую по формуле*

$$D = \frac{\ln a}{\ln N}.$$

На этих множествах с вероятностью 1 существует стохастическая D -мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО эквивалентно заключительным рассуждениям доказательства теоремы 2 из работы [1]. Из существования ненулевого предела $\mathfrak{c}$ (теоремы 1 и 4) следует, что, во-первых, нижняя грань (см. (1))

$$D = \inf \left\{ \alpha: \lim_{m \rightarrow \infty} N^{-\alpha m} |K_m(\mathfrak{X})| = 0 \right\}$$

определяется из уравнения $N^D = a$ и поэтому не является случайной. Во-вторых, выбрав это значение D , мы получаем, что с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} N^{-mD} |K_m(\mathfrak{X})| = \mathfrak{c} \neq 0.$$

Это означает существование с вероятностью 1 стохастической D -меры (см. (2)) на реализациях случайного множества.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема о неслучайности фрактальной размерности и типа фрактальной меры на фракталах с марковскими измельчениями позволяет ввести стохастический интеграл, что, в свою очередь, приводит к возможности вводить феноменологические гамильтонианы флуктуирующих полей, распределенных на этих фракталах. В то же время следует заметить, что рассмотренный в этой работе класс стохастических фракталов недостаточен для моделирования любых фрактально неупорядоченных сред. Это связано с тем, что соответствующие точечные случайные поля анизотропны. Вместе с тем желательно было бы иметь модели стохастически изотропных, однородных фракталов, которые бы обладали неслучайной размерностью и определенным типом фрактальной меры. Доказанная основная теорема, по-видимому, должна допускать обобщение на более широкий класс точечных случайных множеств, которые являются стохастически однородными и для которых допустимо введение понятия стохастического самоподобия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сходимость почти наверное случайных последовательностей

Доказываемое ниже утверждение является одним из вариантов “закона 0 и 1” и представляет собой переформулировку соответствующего утверждения в теории абстрактного интеграла Лебега [5].

ТЕОРЕМА. Пусть имеется последовательность случайных величин $\{c^{(n)}(\mathfrak{X}); n = 1, 2, \dots\}$ таких, что выполняются следующие оценки для вероятностей:

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{X}: \exists(k > 0)(|c^{(n)}(\mathfrak{X}) - c^{(n+k)}(\mathfrak{X})| \geq \sigma_n)\} < \varepsilon_n,$$

где последовательность $\{\varepsilon_n > 0: n = 1, 2, \dots\}$ суммируема, т.е. $\sum_n \varepsilon_n < \infty$, а последовательность $\{\sigma_n > 0: n = 1, 2, \dots\}$ стремится к нулю. Тогда последовательность случайных величин $\{c^{(n)}(\mathfrak{X}); n = 1, 2, \dots\}$ сходится с вероятностью 1 к $c(\mathfrak{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $\mathfrak{C}_n$, $n = 1, 2, \dots$, – такие события, что $\mathbf{P}\{\mathfrak{C}_n\} < \varepsilon_n$ и

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathfrak{C}_n. \quad (\text{П.1})$$

События $\mathfrak{B}_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathfrak{C}_n$ обладают свойством $\mathfrak{B}_{m+1} \subset \mathfrak{B}_m$ и, следовательно, в силу непрерывности вероятности выполняется равенство $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\mathfrak{B}_m\} = \mathbf{P}(\mathfrak{A})$. С другой стороны,

$$\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_m\} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mathbf{P}\{\mathfrak{C}_n\} < \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon_n.$$

Следовательно, $\mathbf{P}\{\mathfrak{B}_m\} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и поэтому $\mathbf{P}\{\mathfrak{A}\} = 0$.

2. Положим $\mathfrak{C}_n = \{\mathfrak{X}: \mathfrak{I}^{(n)}(\mathfrak{X})\}$, где $\mathfrak{I}^{(n)}(\mathfrak{X})$ – высказывательные формы, зависящие от случайной реализации. Рассмотрим соответствующее событие $\mathfrak{A}$. Согласно п. 1 событие $\overline{\mathfrak{A}}$ имеет вероятность 1. В силу закона двойственности

$$\overline{\mathfrak{A}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \overline{\mathfrak{C}}_n.$$

Событие $\bigcap_{n=m}^{\infty} \overline{\mathfrak{C}}_n$ имеет эквивалентное описание $\{\mathfrak{X}: \forall(n \geq m)(\neg \mathfrak{I}^{(n)}(\mathfrak{X}))\}$. Тогда $\overline{\mathfrak{A}}$ имеет эквивалентное описание $\{\mathfrak{X}: \exists(m \geq 1)(\neg \mathfrak{I}^{(n)}(\mathfrak{X}), n \geq m)\}$.

3. Определим последовательность высказывательных форм

$$\mathfrak{I}^{(n)}(\mathfrak{X}) = \exists(k > 0)(|c^{(n)}(\mathfrak{X}) - c^{(n+k)}(\mathfrak{X})| \geq \sigma_n),$$

для которых отрицание $\neg \mathfrak{I}^{(n)}(\mathfrak{X})$ формулируется в виде

$$\forall(k > 0)(|c^{(n)}(\mathfrak{X}) - c^{(n+k)}(\mathfrak{X})| < \sigma_n). \quad (\text{П.2})$$

Посредством этих форм определим события $\mathfrak{C}_n$ так, как это указано в п. 2. Следовательно, событие $\{\mathfrak{X}: \exists(m \geq 0)(\neg \mathfrak{I}^{(n)}(\mathfrak{X}), n \geq m)\}$ имеет вероятность 1. Если реализация $\mathfrak{X}_0$ принадлежит этому событию, то это означает, что найдется такое число m , начиная с которого, т.е. при $n \geq m$, выполняются все неравенства (П.2) сразу для всех k . Тогда последовательность величин $\{c^{(n)}(\mathfrak{X}_0); n = 1, 2, \dots\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится к некоторой величине $c(\mathfrak{X}_0)$.

Список литературы

- [1] Ю. П. Вирченко, О. Л. Шпилинская. ТМФ. 2000. Т. 124. № 3. С. 490–505.
- [2] P. R. Massopust. Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets. New York: Academic Press, 1994.
- [3] Г. Федерер. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
- [4] Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1969.
- [5] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 18.XII.2000 г.