Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Асимптотические разложения для частных решений шестого уравнения Пенлеве, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 193–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 11:16:18

© 2001 г.

В. Л. Верещагин*

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ШЕСТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Развит формализм метода усреднения для уравнений Пенлеве, в частности для шестого уравнения. Поставлена задача описания асимптотического поведения шестого трансцендента Пенлеве при условии стремления модуля независимой переменной к бесконечности. Соответствующие разложения имеют в главном члене эллиптическую функцию (анзац), чьи параметры зависят от переменной из-за уравнения модуляций. Для шестого уравнения Пенлеве явно выписаны эллиптический анзац и уравнение модуляций. Найдено частное решение уравнения модуляций, дающее не известное ранее асимптотическое разложение для частного решения шестого уравнения Пенлеве.

1. ВВЕДЕНИЕ

В середине 19-го века в число наиболее насущных задач анализа входили исследование и классификация обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы для такого исследования были разработаны Фуксом и Пуанкаре и основываются на изучении особенностей общих решений. Так, имея дело с линейным уравнением, мы можем получить нужную информацию об особенностях общего решения из вида коэффициентов уравнения. Ситуация коренным образом меняется, когда в качестве объекта изучения взяты нелинейные дифференциальные уравнения. Теперь для определения положения особенности и ее типа недостаточно знать вид коэффициентов уравнения, так как в общем случае характеристики особых точек зависят от начальных данных. Нам интересна зависимость особенностей от уравнения, а не от начальных данных, поэтому естественным выглядит желание ограничить рассмотрение лишь теми нелинейными уравнениями, чьи решения имеют критические точки, не зависящие от начальных условий (как это было для всех линейных уравнений).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка, в которой решение уравнения имеет особенность, называется подвижной (неподвижной), если ее положение зависит (не зависит) от начальных данных этого решения.

*Институт математики с вычислительным центром УрО РАН, Уфа, Россия.
E-mail: vadim@imat.rb.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка называется критической точкой дифференциального уравнения, если общее решение неоднозначно в любой ее окрестности.

Для построения классификации дифференциальных уравнений естественно считать эквивалентными уравнения, переводимые друг в друга дробно-рациональными преобразованиями. Таким образом Фукс, Пуанкаре и позже Пенлеве сформулировали и решали следующую задачу: описать все классы эквивалентности нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\Omega(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где Ω — некоторая функция без подвижных критических точек относительно групп преобразований вида

$$\tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{y} = \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)}, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi \in \mathbf{C}$ — голоморфные функции.

Классификация всех алгебраических уравнений (1) первого порядка с алгебраической функцией Ω и $n = 1$ была получена Фуксом и Пуанкаре: каждое алгебраическое дифференциальное уравнение первого порядка без подвижных критических точек эквивалентно одному из следующих двух уравнений:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - g_2y - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbf{C}, \quad (3)$$

— уравнение на $\wp$ -функцию Вейерштрасса и

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (4)$$

— уравнение Риккати, где a, b, c — голоморфные функции.

Многочисленные попытки построить подобную классификацию для уравнений второго порядка ($n = 2$) были безуспешными, до того как Пенлеве ограничил рассмотрение рациональными уравнениями вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(x, y, y') \quad (5)$$

с фиксированными критическими точками. Результатом огромного количества вычислений, проведенных Пенлеве и его учениками, явился список из 50 классов эквивалентности. Из этих 50 уравнений лишь 6 имеют общие решения, не представимые в терминах известных спецфункций. Решения упомянутых шести дифференциальных уравнений являются новыми функциями и по праву носят название трансцендентов Пенлеве (см. [1]). В последние годы традиционный интерес к этим уравнениям как объекту классической теории дифференциальных уравнений был значительно усилен появлением их многочисленных приложений в различных областях науки.

Главным объектом рассмотрения в данной работе является шестое уравнение (PVI) этого семейства

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) (y')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{x}{y^2} + \gamma \frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right), \quad (6)$$

где греческие буквы обозначают независимые параметры. Цель работы – исследовать асимптотические свойства шестого трансцендента $y(x)$ для больших значений $|x|$.

2. ИЗОМОНОДРОМНЫЕ И ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Одним из важнейших свойств уравнений Пенлеве является свойство изомонодромности.

Рассмотрим проколотую комплексную сферу $\mathbf{CP}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_{2g+1}, t_{2g+2} = \infty\}$ и $2g+1$ (2×2) -матриц A_j . Тогда представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbf{CP}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_{2g+1}, \infty\})$ может быть получено с помощью решений системы Фукса

$$\frac{dY(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{2g+1} \frac{A_j}{\lambda - t_j} Y(\lambda) \quad (7)$$

на (2×2) -матрицы $Y(\lambda)$. Зафиксируем начальную точку $t_0 \in \mathbf{CP}^1 \setminus \{t_1, \dots, t_{2g+1}, \infty\}$ и традиционным образом определим π_1 как множество петель $\gamma = \gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma(0) = \gamma(1) = t_0$. Возьмем невырожденную матрицу Y_0 и предположим, что $Y(\lambda)$ – решение (7) такое, что $Y(t_0) = Y_0$. Для каждого $\gamma \in \pi_1$ положим

$$M(\gamma) = M(\gamma; t_0, Y_0) \equiv Y_0^{-1} Y(\gamma(1)),$$

где $Y(\gamma(1))$ обозначает аналитическое продолжение решения $Y(\lambda)$ вдоль петли γ , $t_0 = \gamma(0) \mapsto \gamma(1) = t_0$. Тогда простое вычисление показывает, что отображение

$$\pi_1 \ni \gamma \mapsto M(\gamma)$$

задает линейное представление π_1 , которое называется монодромным представлением для системы (7). Соответствующая данным A_j, t_j подгруппа $M(\gamma)$, $\gamma \in \pi_1$, называется группой монодромии системы Фукса (7). Все эти группы изоморфны по отношению к сопряжению, т.е. $M(\gamma; t_0, Y_0) = Y_0^{-1} M(\gamma; t_0, Y_0) Y_0$, поэтому под группой монодромии следует понимать соответствующий класс эквивалентности по отношению к сопряжению.

Шлезингер [2] поставил следующий вопрос: каким образом матрицы A_j должны зависеть от величин t_i , для того чтобы элементы описанной выше группы монодромии были интегралами системы (7)? Ответ на него таков: матричные коэффициенты A_j должны удовлетворять системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial A_i}{\partial t_j} = (1 - \delta_{ij}) \frac{[A_i, A_j]}{t_i - t_j} - \delta_{ij} \sum_{k \neq i} \frac{[A_i, A_k]}{t_i - t_k}, \quad (8)$$

называемых уравнениями Шлезингера. Таким образом, система (8) является условием изомонодромности (изомонодромных деформаций) для системы линейных уравнений (7).

Несколько позже Гарнье [3] сделал следующее наблюдение. Рассмотрим систему (8), в правой части которой переменные величины t_j заменены на постоянные параметры T_j . Такое автономное уравнение

$$\frac{\partial A_i}{\partial t_j} = (1 - \delta_{ij}) \frac{[A_i, A_j]}{T_i - T_j} - \delta_{ij} \sum_{k \neq i} \frac{[A_i, A_k]}{T_i - T_k} \quad (9)$$

определяет изоспектральные деформации для $M(\lambda)$, т.е. многочлен $\det(M(\lambda) - \mu I)$ инвариантен вдоль потока t . Риманова поверхность (λ, μ) , задаваемая характеристическим уравнением $\det(M(\lambda) - \mu I) = 0$, называется спектральной кривой. Гарнье также доказал интегрируемость автономной системы (9) в терминах абелевых функций на римановой кривой. Таким образом, устанавливается прямая связь между изомонодромными и изоспектральными системами.

Шестое уравнение Пенлеве является частным случаем уравнения Шлезингера, что позволяет интерпретировать в асимптотическом смысле связь самого PVI (уравнение изомонодромных деформаций) с его автономным аналогом – уравнением изоспектральных деформаций (9), явно интегрируемым в терминах нелинейных спецфункций. В следующем разделе мы рассмотрим основанный на этих соображениях подход, общий для всех шести уравнений Пенлеве.

3. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Уравнения Пенлеве являются интегрируемыми, и для них существуют коммутативные матричные представления (пары Лакса). Имеются шесть матричных уравнений

$$D_z L_j - D_x A_j + [L_j, A_j] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (10)$$

где $D_x = d/dx$; $L_j = L_j(y, y', x, z)$, $A_j = A_j(y, y', x, z)$ – (2×2) -матрицы, рациональным образом зависящие от спектрального параметра z , и j -е уравнение Пенлеве $y'' - P_j(y, y', x) = 0$ эквивалентно (10). Матрицы L_j, A_j приведены в статье [4].

Целью данной работы является исследование асимптотического поведения шестого трансцендента Пенлеве с помощью метода усреднения Уизема, идейно сходного с упомянутым в предыдущем разделе наблюдением Гарнье. Метод применим ко всем уравнениям Пенлеве, однако из-за громоздкости вычислений для случая шестого уравнения PVI целесообразно основные положения метода проиллюстрировать на технически простейшем первом уравнении PI.

Матрицы L_1 и A_1 выглядят следующим образом:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y - z & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -y' & 2y + 4z \\ -x - y^2 + 2yz - 4z^2 & y' \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Введем новую переменную X и формально заменим все переменные x , явным образом входящие в формулу (11), на X : $L_j = L_j(y, y', X, z)$, $A_j = A_j(y, y', X, z)$. Для таких матриц получаем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть ϵ – некоторое положительное число. Тогда система

$$\epsilon D_z L_j - D_x A_j + [L_j, A_j] = 0 \quad (12)$$

эквивалентна системе

$$D_x X = \epsilon, \quad y'' - P_j(y, y', X) = 0. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается путем прямого вычисления. Так, для РІ система (13) принимает вид

$$D_x X = \epsilon, \quad y'' - 3y^2 - X = 0.$$

Вычисления для остальных уравнений Пенлеве принципиально аналогичны и были проведены в работе [5].

ЛЕММА 2. Решение уравнения (12) при $\epsilon = 0$ и $X = \text{const}$ представлено следующей формулой:

$$y_0(x) = f_j(\tau + \Phi; \vec{a}), \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (14)$$

где $\tau = xU$, $U = U(\vec{a})$; f_j – периодические функции, представимые явно в терминах эллиптических функций Вейерштрасса или Якоби для каждого из шести уравнений Пенлеве. Вектор $\vec{a}(X)$ состоит из параметров, определяющих эллиптическую функцию f_j , Φ – некоторый сдвиг фазы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует второе уравнение системы (13), где величина X принимает постоянное значение. Для первого уравнения Пенлеве функция f_1 – это $\wp$ -функция Вейерштрасса:

$$f_1 = 2\wp(x + \Phi; g_2, g_3), \quad g_2 = -X, \quad g_3 = -\frac{F_1}{4}, \quad (15)$$

где F_1 – некоторый параметр. Формула (15) впервые была приведена в статье [6].

Теперь предположим, что величина ϵ положительна и мала. Мы будем искать решения уравнения (12) в виде формальных рядов по малому параметру ϵ :

$$y(x) = y_0(x) + \epsilon y_1(x) + \dots \quad (16)$$

Параметры, определяющие эллиптическую функцию $y_0 = f_j$, подчиняются нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению, обычно называемому уравнением Уизема, или уравнением модуляций. Таким образом, мы ищем главный член ряда (16) в следующей форме:

$$y_0(\tau, X) = f_j(\epsilon^{-1}S(X) + \Phi(X); \vec{a}(X)), \quad D_X S = U.$$

ЛЕММА 3. Уравнение Уизема может быть записано следующим образом:

$$D_X \det A_j = \overline{a_{22} D_z l_{11}} + \overline{a_{11} D_z l_{22}} - \overline{a_{12} D_z l_{21}} - \overline{a_{21} D_z l_{12}}, \quad (17)$$

где $A_j = (a_{mn})$, $L_j = (l_{mn})$, $m, n = 1, 2$, черта сверху означает усреднение по периоду эллиптической функции (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко убедиться, что уравнение (12) при $\epsilon = 0$ означает независимость спектральных характеристик матрицы A_j от переменной x , и выполняется условие $D_x \det A_j = 0$. Введение формальной переменной X приводит к замене правила дифференцирования: $D_x \rightarrow UD_\tau + \epsilon D_X$, где параметр ϵ считается малым. Далее, условие (12) дает уравнение

$$a'_{n,m} = \epsilon D_z l_{n,m} + [L_j, A_j]_{n,m}, \quad n, m = 1, 2.$$

Подставив его в равенство

$$D_x \det A_j = a'_{11} a_{22} + a'_{22} a_{11} - a'_{12} a_{21} - a'_{21} a_{12},$$

мы заменяем правило дифференцирования и получаем соотношение

$$(UD_\tau + \epsilon D_X) \det A_j = \epsilon (a_{22} D_z l_{11} + a_{11} D_z l_{22} - a_{12} D_z l_{21} - a_{21} D_z l_{12}) + O(\epsilon^2).$$

Его усреднение, т.е. интегрирование по периоду (по “быстрой” переменной τ), уничтожает полные производные по τ , что заканчивает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существует единственный коэффициент многочлена $\det A_j$, чья динамика по X в силу уравнения модуляций нетривиальна. Обозначим этот коэффициент через F_j . Таким образом, система Уизема может быть записана в виде одного дифференциального уравнения на F_j .

Истинность замечания может быть проверена с помощью прямых вычислений для всех шести уравнений Пенлеве. Так, для P I имеем

$$\det A_1 = 16z^3 + 4Xz - F_1,$$

где $F_1 = (y')^2 - 2y^3 - 2yX$. Уравнение модуляций (17) принимает вид

$$D_X \det A_1 = 4z + 2\bar{y}$$

и переписывается как $D_X F_1 = -2\bar{y}$. Принимая во внимание решение (15), получаем

$$D_X F_1 = -\frac{2\eta}{\omega} = 2e_1 + \frac{2(e_3 - e_1)E}{K},$$

где $E = E(k)$, $K = K(k)$ – полные эллиптические интегралы:

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz, \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

$e_{1,2,3}$ – корни многочлена Вейерштрасса $R_3(t) = 4t^3 - g_2t - g_3$; $g_2 = -X$, $g_3 = -F_1/4$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Простейшим способом получения эллиптического анзаца f_j является решение уравнения

$$F_j = \text{const}_1, \quad X = \text{const}_2. \quad (18)$$

ЛЕММА 4. Эллиптический анзац (14) задает главный член y_0 ряда по малому параметру ϵ (16) для решения системы (12).

Для доказательства леммы нужно убедиться в том, что возмущение решения системы (12) при $\epsilon = 0$ происходит непрерывно, по мере того как ϵ приобретает малое ненулевое значение. Соответствующие элементарные вычисления проиллюстрированы ниже на простейшем примере PI. Так, для $\epsilon > 0$ система (12) есть $y'' = 3y^2 + X_0 + \epsilon x$, где X_0 – константа. С помощью простых преобразований это уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$2dx = \frac{dy}{\sqrt{2y^3 + X_0 + \text{const}}} + O(\epsilon),$$

т.е. главный член ряда (16) представлен функцией f_1 (см. (15)) при условии, что x не лежит в малых окрестностях сингулярностей эллиптической функции f_1 .

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Функция y_0 , определенная формулами (14) и (17), дает главный член асимптотического ряда для решения соответствующего уравнения Пенлеве при устремлении $|x|$ в бесконечность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Масштабное преобразование $x \rightarrow \epsilon x$ ведет к замене $D_x X = \epsilon \mapsto D_x X = 1$ в формуле (13). Поэтому разложение (16) по малому параметру ϵ переходит в ряд по отрицательным степеням большой переменной x .

4. PVI И МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ УИЗЕМА

Шестое уравнение Пенлеве

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) (y')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha + \beta \frac{x}{y^2} + \gamma \frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right), \quad (19)$$

где греческими буквами обозначены свободные параметры, может быть получено как условие совместности следующей системы линейных уравнений:

$$D_z Y = A_6(z, x)Y(z, x), \quad D_x Y = L_6(z, x)Y(z, x), \quad (20)$$

здесь

$$A_6(z, x) = \begin{pmatrix} a_{11}(z, x) & a_{12}(z, x) \\ a_{21}(z, x) & a_{22}(z, x) \end{pmatrix} = \frac{A^0}{z} + \frac{A^1}{z-1} + \frac{A^x}{z-x},$$

$$A^i = \begin{pmatrix} u_i + \theta_i & -\omega_i u_i \\ \omega_i^{-1}(u_i + \theta_i) & -u_i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, x, \quad L_6(z, x) = -A^i \frac{1}{z-x}. \quad (21)$$

Положим

$$A^\infty = -(A^0 + A^1 + A^x) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix},$$

$$k_1 + k_2 = -(\theta_0 + \theta_1 + \theta_x), \quad k_1 - k_2 = \theta_\infty,$$

$$a_{12}(z) = -\frac{\omega_0 u_0}{z} - \frac{\omega_1 u_1}{z-1} - \frac{\omega_x u_x}{z-x} = \frac{k(z-y)}{z(z-1)(z-x)}, \quad (22)$$

$$u = a_{11}(y) = \frac{u_0 + \theta_0}{y} + \frac{u_1 + \theta_1}{y-1} + \frac{u_x + \theta_x}{y-x},$$

$$\hat{u} = -a_{22}(y) = u - \frac{\theta_0}{y} - \frac{\theta_1}{y-1} - \frac{\theta_x}{y-x}.$$

Тогда

$$u_0 + u_1 + u_x = k_2, \quad \omega_0 u_0 + \omega_1 u_1 + \omega_x u_x = 0,$$

$$\frac{u_0 + \theta_0}{\omega_0} + \frac{u_1 + \theta_1}{\omega_1} + \frac{u_x + \theta_x}{\omega_x} = 0,$$

$$(x+1)\omega_0 u_0 + x\omega_1 u_1 + \omega_x u_x = k, \quad x\omega_0 u_0 = k(x)y.$$

Решение имеет следующий вид:

$$\omega_0 = \frac{ky}{xu_0}, \quad \omega_1 = -\frac{k(y-1)}{(x-1)u_1}, \quad \omega_x = \frac{k(y-x)}{x(x-1)u_x},$$

$$u_0 = \frac{y}{x\theta_\infty} S_0,$$

где

$$S_0 = y(y-1)(y-x)\hat{u}^2 + [\theta_1(y-x) + x\theta_x(y-1) - 2k_2(y-1)(y-x)]\hat{u} +$$

$$+ k_2^2(y-x-1) - k_2(\theta_1 + x\theta_x),$$

$$u_1 = -\frac{y-1}{(x-1)\theta_\infty} S_1.$$

Здесь

$$S_1 = y(y-1)(y-x)\hat{u}^2 + [(\theta_1 + \theta_\infty)(y-x) + x\theta_x(y-1) - 2k_2(y-1)(y-x)]\hat{u} +$$

$$+ k_2^2(y-x) - k_2(\theta_1 + x\theta_x) - k_1 k_2, \quad (23)$$

$$u_x = \frac{y-x}{x(x-1)\theta_\infty} S_\infty,$$

где

$$S_\infty = y(y-1)(y-x)\hat{u}^2 + [\theta_1(y-x) + x(\theta_x + \theta_\infty)(y-1) - 2k_2(y-1)(y-x)]\hat{u} + k_2^2(y-1) - k_2(\theta_1 + x\theta_x) - xk_1k_2.$$

Условие совместности для системы (20) предполагает

$$y' = \frac{y(y-1)(y-x)}{x(x-1)} \left(2u - \frac{\theta_0}{y} - \frac{\theta_1}{y-1} - \frac{\theta_x-1}{y-x} \right). \quad (24)$$

Таким образом, y удовлетворяет PVI с параметрами

$$\alpha = \frac{1}{2}(\theta_\infty - 1)^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}\theta_0^2, \quad \gamma = \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \delta = \frac{1}{2}(1 - \theta_x^2).$$

Теперь мы применим идеи, изложенные в предыдущем разделе, к асимптотическому анализу свойств шестого трансцендента Пенлеве. Сначала вычислим определитель матрицы A_6 . Используя формулы (22), (23), получим

$$a_{11}(z) = -R^{-1}(z)S,$$

где

$$S = k_1z^2 + z[x(u_0 + u_1 + \theta_0 + \theta_1) + u_0 + \theta_0 + u_x + \theta_x] + O(z^0),$$

$$a_{22}(z) = -R^{-1}(z)\{k_2z^2 - z[(x+1)u_0 + xu_1 + u_x] + O(z^0)\},$$

$R(t) = t(t-1)(t-x)$; $O(z^j)$ означает степени z порядка не выше чем j . Матричные элементы a_{12} , a_{21} дают члены меньшего порядка по z , поэтому их можно игнорировать при вычислении двух старших членов многочлена $\det A_6$. Таким образом получаем

$$\det A_6 = R^{-2}(z)S,$$

где

$$S = k_1k_2z^4 - z^3[k_1(u_0(x+1) + u_1x + u_x) - k_2(x(u_0 + u_1 + \theta_0 + \theta_1) + u_0 + \theta_0 + u_x + \theta_x)] + O(z^2).$$

Полагая

$$\det A_6 = R^{-2}(z)[k_1k_2z^4 + F_6z^3 + O(z^2)], \quad (25)$$

найдем коэффициенты F_6 , определяющие уиземову динамику:

$$F_6 = (k_1 - k_2)(u_1 + xu_x) - x(2k_1k_2 + \theta_x) - 2k_1k_2 - k_2\theta_1. \quad (26)$$

Теперь нужно вывести условие на эллиптическую функцию из уравнения (26). Используя (23), получим соотношение

$$\theta_\infty(u_1 + xu_x) = -R(y)\hat{u}^2 + \hat{u}[(y-1)(y-x)(2k_2 + \theta_\infty) - \theta_1(y-x) - x\theta_x(y-1)] + k_1k_2(x+1-y) + k_2(\theta_1 + x\theta_x),$$

которое с учетом (24) и (22) переходит в следующее:

$$\begin{aligned}\theta_\infty(u_1 + xu_x) = & -\frac{x^2(x-1)^2}{4R(y)}(y')^2 + \\ & + \frac{1}{2}y'x(x-1) \left(B + \frac{1}{R(y)}[(y-1)(y-x)(2k_2 + \theta_\infty) - \theta_1(y-x) - x\theta_x(y-1)] \right) - \\ & - \frac{1}{4}R(y)B^2 + \frac{1}{2}B[x\theta_x(y-1) - (y-1)(y-x)(2k_2 + \theta_\infty) + \theta_1(y-x)] + \\ & + k_1k_2(x-y+1) + k_2(\theta_1 + x\theta_x),\end{aligned}$$

где

$$B = \frac{\theta_0}{y} + \frac{\theta_1}{y-1} + \frac{\theta_x + 1}{y-x}.$$

Подставив полученное выражение в (26), находим окончательное условие на риманову поверхность (y', y) рода 1 и соответствующую эллиптическую униформизацию (считаем x и F_6 параметрами):

$$\begin{aligned}& x^2(x-1)^2(y')^2 - 2y'x(x-1)y(y-1) + y^4[1 - (k_1 - k_2)^2] + \\ & + 2y^3[(k_1 + k_2)C - 1 + 2x\theta_x(1 - k_2) + 2F_6] - y^2S + \\ & + 2yx[2k_1k_2(x+1) + 2x\theta_x(1 - k_2) + 2F_6 - \theta_0C] - x^2\theta_0^2 = 0,\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$\begin{aligned}C &= (x+1)(k_1 + k_2) + x\theta_x + \theta_1, \\ S &= C^2 - 1 - 2x\theta_0(k_1 + k_2) + 4k_1k_2(x^2 + x + 1) + 4x(x+1)(1 - k_2)\theta_x + 4(x+1)F_6.\end{aligned}$$

Чтобы начать процедуру уиземова асимптотического исследования, необходимо вывести уравнение модуляций в дополнение к анзацу (27). Для этого заменим переменные x на X в формуле (25) и продифференцируем ее по X :

$$D_X \det A_6 = \frac{z^4}{(z-X)R^2(z)}(2k_1k_2 + D_X F_6) + O(z^3). \quad (28)$$

Воспользуемся условием (17). Итак, выполняется

$$D_z L_6(z, x) = \frac{A_x}{(z-X)^2}, \quad D_z l_{22} = -\frac{u_x}{(z-X)^2},$$

откуда следуют соотношения

$$\begin{aligned}a_{11}D_z l_{22} &= \frac{u_x}{R(z)(z-X)^2}[z^2k_1 + O(z)], \\ a_{22}D_z l_{11} &= -\frac{u_x + \theta_x}{R(z)(z-X)^2}[z^2k_2 + O(z)],\end{aligned}$$

подставляя которые в (17), получаем

$$D_X \det A_6 = \frac{z^2[\bar{u}_x(k_1 - k_2) - k_2\theta_x] + O(z)}{R(z)(z-X)^2}, \quad (29)$$

где черта сверху означает усреднение. Сравнение формул (28) и (29) дает уравнение модуляций:

$$D_X F_6 = \bar{u}_x(k_1 - k_2) - k_2 \theta_x - 2k_1 k_2. \quad (30)$$

Перепишем (30) в исходных координатах y, X . Для этого используем равенство

$$u_x(k_1 - k_2) = \frac{y - X}{X(X - 1)} S, \quad (31)$$

где

$$S = R(y) \hat{u}^2 + \hat{u} [\theta_1(y - X) + X(\theta_x + \theta_\infty)(y - 1) - 2k_2(y - 1)(y - X)] + \\ + k_2^2(y - 1) - k_2(\theta_1 + X\theta_x) - Xk_1 k_2.$$

Подставим (31) в (30), снова используем (22)–(24) и после упрощения получаем уравнение модуляций в виде

$$D_X F_6 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) D_X \bar{y} + \frac{(k_2 - k_1)(k_2 - k_1 + 1)}{2X(X - 1)} \bar{y}^2 + \frac{\bar{y}}{X(X - 1)} S + \\ + \frac{1}{2(X - 1)} [\theta_0(k_2 - k_1) + 2X(2k_1 k_2 + \theta_x) + 2k_2(k_1 + k_2 + \theta_1) + 2F_6] - \\ - k_2 \theta_x - 2k_1 k_2, \quad (32)$$

где

$$S = \frac{1}{2}(k_2 - k_1) [X(k_2 - k_1 - \theta_x) + \theta_0 + \theta_x + 1] - \\ - X(2k_1 k_2 + \theta_x) - k_2(k_1 + k_2 + \theta_1) - F_6.$$

Здесь $\bar{y}$ обозначает среднее эллиптической функции y , задаваемой уравнением (27), F_6 и X (вместо x) считаются параметрами.

5. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ МОДУЛЯЦИЙ И РVI

Исследование систем (27), (32) в общем виде затруднительно, более того, остается открытым вопрос о фазовом сдвиге Φ в эллиптическом анзаце (14). Поэтому мы остановимся на простейшем решении, соответствующем сильно вырожденной кривой (27). Если искать частные решения (27)–(32) в классе элементарных функций, то нетрудно отметить наличие асимптотической однородности формулы (27) для больших x . Обозначим $y = x\xi$ и перепишем (27) в переменных $x\xi'$ и ξ . Дискриминант этого многочлена выглядит следующим образом:

$$D = \xi^4(k_2 - k_1)^2 - 2\xi^3[(k_2 + k_1)^2 + 2\theta_x(1 - k_2) + 2F_6 x^{-1} + O(x^{-1})] + \\ + \xi^2[(k_2 + k_1)^2 + 4k_1 k_2 + 4\theta_x(1 - k_2) + 4F_6 x^{-1} + O(x^{-1})] - \\ - 2\xi[2F_6 x^{-2} + O(x^{-2})] + O(x^{-2}). \quad (33)$$

Рассмотрим условие сильного вырождения для римановой кривой (27). Многочлен (33) имеет корни, асимптотически сливающиеся в два двойных корня, если

$$\begin{aligned}\theta_x = 0 \quad F_6 &= -2k_1k_2X + o(X), \quad X \rightarrow \infty, \\ D &= \xi^2(\xi - 1)^2(k_2 - k_1)^2 + O(X^{-1}).\end{aligned}\tag{34}$$

Этот случай мы назовем двойным или сильным вырождением. Подставляя условие (34) в (27), легко получаем соответствующую асимптотику для решения: $\xi = 1 + o(1)$ и, следовательно,

$$y = x + o(x), \quad x \rightarrow \infty,\tag{35}$$

где $o(x)$ обозначает члены, растущие не быстрее чем $\ln x$. Нетрудно также убедиться, что решение (34), (35) удовлетворяет уравнению модуляций (32).

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. В случае $\theta_x = 0$ ($\delta = 1/2$) шестое уравнение Пенлеве имеет решение с асимптотикой (35)¹⁾.

Для доказательства теоремы в дополнение к упомянутому выше следует отметить, что сильное вырождение эллиптического анзаца (27) преобразует фазовый сдвиг Φ в формуле (14) в сдвиг по переменной x , который может быть найден при помощи простой итеративной процедуры, вычисляющей члены разложения (35).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантов INTAS № 99-01782 и РФФИ № 99-0100656.

Список литературы

- [1] *P. Painlevé.* Acta Math. 1902. V. 25. P. 1–86.
- [2] *L. Schlesinger.* J. für Math. 1912. V. 141. P. 96–145.
- [3] *R. Garnier.* Ann. Sci. École Norm. Supér. (3). 1917. V. 34. P. 239–353.
- [4] *M. Jimbo, T. Miwa.* Phys. D. 1981. V. 3. P. 407–448.
- [5] *В. Л. Верещагин.* Дифф. уравнения. 1999. Т. 35. Вып. 6. С. 837–839.
- [6] *С. П. Новиков.* Функц. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. Вып. 4. С. 43–53.
- [7] *M. Mazzocco.* Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation. math.AG/9901054.

Поступила в редакцию 29.XII.2000 г.

¹⁾ Частный случай этого решения для PVI при условии $\alpha = (2\mu - 1)/2$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta = 1/2$ и полуцелого μ был описан в работе [7]