Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, О построении переменных разделения для конечномерных интегрируемых систем, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 205–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:37:56

© 2001 г.

А. В. Цыганов*

О ПОСТРОЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗДЕЛЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Рассматривается класс интегрируемых систем, для которых решения уравнения Гамильтона–Якоби зависят от $(n + m)$ произвольных параметров и представляются в виде произведения плоских кривых. Первые n параметров отождествляются со значениями интегралов движения. Остаточные параметры входят в определение интегралов движения как произвольные константы (заряды) и могут быть использованы для нахождения переменных разделения. Показано, что на орбитах коприсоединенного представления групп Ли операторы Казимира не только порождают семейство интегралов, но и позволяют построить переменные разделения.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $(\mathcal{M}, \Omega)$ – симплектическое многообразие размерности $2n$. Уравнение Гамильтона–Якоби

$$\mathcal{Q}^{2n-1} : H - E = 0, \quad E \in \mathbb{R},$$

определяет гиперповерхность $\mathcal{Q}^{2n-1}$ размерности $(2n - 1)$ в многообразии $\mathcal{M}$ [1], [2]. Произвольное n -мерное лагранжево многообразие $\mathcal{C}^{(n)} \in \mathcal{Q}^{2n-1}$, является решением уравнения Гамильтона–Якоби. По теореме Лиувилля для интегрируемых систем соответствующее лагранжево многообразие зависит по крайней мере от n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, которые отождествляются со значениями интегралов движения $I_j = \alpha_j$ [1], [2].

В методе разделения переменных лагранжево многообразие ищется в виде произведения плоских кривых

$$\mathcal{C}^{(n)} : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_n. \quad (1.1)$$

Соответствующие кривые $\mathcal{C}_j$ на плоскости могут быть заданы либо параметрически, либо с помощью уравнений вида

$$\mathcal{C}_j : \Phi_j(\mu_j, \lambda_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

Здесь модули кривых α_j являются значениями заданного набора интегралов движения $I_j = \alpha_j$, а (μ_j, λ_j) – некоторые координаты на j -й плоскости, для которых в дальнейшем будем опускать индекс j .

Возможность представления лагранжева многообразия $\mathcal{C}^{(n)}$ в виде произведения плоских кривых не зависит от способа задания этих кривых (1.2) и выбора локальных координат фазового пространства. Однако об общем инвариантном анализе данного геометрического свойства лагранжевых многообразий нам не известно.

Будем называть интегрируемую систему *однородной*, если соответствующее лагранжево многообразие

$$\mathcal{C}^{(n)} : \overbrace{\mathcal{C} \times \dots \times \mathcal{C}}^{n \text{ раз}}$$

представляется в виде произведения n копий одной единственной плоской кривой $\mathcal{C}$.

Для некомпактных поверхностей уровня интегралов будем называть интегрируемую систему *квазиоднородной*, если соответствующее лагранжево многообразие

$$\mathcal{C}^{(n)} : \overbrace{\mathcal{C} \times \dots \times \mathcal{C}}^{(n-k) \text{ раз}} \times \overbrace{\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}}^{k \text{ раз}}$$

представляется в виде произведения $(n - k)$ копий единственной кривой $\mathcal{C}$ и k копий $\mathbb{C}$.

Мы выделили эти два класса интегрируемых систем потому, что в большинстве современных методов построения и изучения вполне интегрируемых систем интегралы движения определяются как модули одной единственной плоской кривой $\mathcal{C}$. При этом данная кривая может быть либо спектральной кривой матрицы Лакса [3], либо функций Казимира для пуассонова пучка, зависящего от параметра [4].

Перейдем теперь к обычному координатному описанию метода разделения переменных. Пусть на многообразии $\mathcal{M}$ задана система канонических координат $\{p_i, q_i\}_{i=1}^n$. Интегралы движения $I_j(p, q)$ являются функциями этих исходных физических переменных. Предположим, что существует каноническое преобразование $(p, q) \mapsto (P, Q)$ фазового пространства $\mathcal{M}$ такое, что пары канонических переменных разделения (P_j, Q_j) являются точками плоских кривых $\mathcal{C}_j$ (1.2), т.е.

$$\Phi_j(P_j, Q_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Модули кривых отождествляются со значениями интегралов движения $\alpha_j = I_j$. Подставляя в уравнения плоских кривых вместо значений интегралов движения сами функции, получим уравнения

$$\Phi_j(P_j, Q_j, I_1(P, Q), \dots, I_n(P, Q)) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.4)$$

которые называются разделенными уравнениями.

Переменные разделения могут быть введены явно, например как функции от исходных физических переменных

$$Q_i = f_i(p, q), \quad P_i = g_i(p, q), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

или с помощью производящей функции соответствующего канонического преобразования. С другой стороны, переменные разделения могут быть заданы неявно, например как полюсы функции Бейкера–Ахиезера [5] или собственные значения тензора Нийенхейса [6].

Подчеркнем, что величины μ и λ являются комплексными переменными, связанными соотношением (1.2), в которое входят числа α_j . Переменные разделения P_i и Q_i в уравнении (1.3) являются каноническими переменными в пространстве $\mathcal{M}$. Необходимо помнить, что при переходе от уравнений плоских кривых (1.2) к разделенным уравнениям (1.4) координаты $\lambda = \psi(P_i, Q_i)$ и $\mu = \phi(P_i, Q_i)$ должны быть функциями от P_i, Q_i . Всюду далее мы не будем выделять это в обозначениях.

Таким образом, в методе разделения переменных существуют две взаимосвязанные проблемы. Во-первых, необходимо представить лагранжево многообразие $\mathcal{C}^{(n)}$ в виде произведения (1.1) плоских кривых. Во-вторых, необходимо ввести канонические переменные разделения, удовлетворяющие разделенным уравнениям (1.4).

В данной работе предложен метод явного построения переменных разделения (1.5) для тех интегрируемых систем, для которых известны уравнения плоских кривых (1.2). Эти уравнения можно получить, например, используя сингулярный анализ уравнений движения [7], [8], бигамильтонову структуру интегрируемых систем [8], [9], представление уравнений движения в форме Лакса [5] и некоторые другие методы [10].

2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗДЕЛЕНИЯ

Начнем с простого примера. Для задачи Кеплера лагранжево многообразие $\mathcal{C}^{(2)} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ зависит от значений интегралов движения

$$I_1 = p_x^2 + p_y^2 + \frac{Z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad I_2 = 2p_x(p_xy - p_yx) + \frac{Zy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и величины заряда Z . Подставим в уравнения кривых

$$\mathcal{C}_{1,2}: \quad \Phi_{1,2}(\mu, \lambda) = (\mu^2 + \alpha_1\lambda + Z \pm \alpha_2) = 0, \quad I_1 = \alpha_1, \quad I_2 = \alpha_2$$

функции $I_k(p_x, x, p_y, y)$ вместо их значений α_k и про дифференцируем эти уравнения по Z . Решения полученных уравнений являются искомыми переменными разделения,

$$\frac{\partial}{\partial Z} \Phi_{1,2}(\mu, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = y \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Таким образом, в данном примере переменные разделения не зависят от заряда Z и их можно построить, используя этот параметр.

Предположим сначала, что у нас есть некоторое семейство лагранжевых многообразий, зависящее от $(n + m)$ параметров. Произвольные n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ отождествляются со значениями интегралов движения $I_j = \alpha_j$ [1]. Остающиеся константы

$a_1, \dots, a_m$ входят в определение интегралов движения I_j как произвольные параметры (заряды):

$$I_j(p, q, a) = I_j(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_m), \quad a_k \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Основная идея предлагаемого метода состоит в использовании остающихся произвольных параметров $a_1, \dots, a_m$ при построении переменных разделения для выбранного нами семейства интегралов движения $I_j = \alpha_j$.

Предположим теперь, что нам известно представление многообразия $\mathcal{C}^{(n)}$ в виде произведения (1.1) плоских кривых. Подставим функции $I_j(p, q)$ вместо их значений α_j в уравнения кривых (1.2),

$$\Phi_j(\mu, \lambda, I_1(p, q, a), \dots, I_n(p, q, a), a_1, \dots, a_m) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Получающиеся уравнения можно дополнить, дифференцируя данные уравнения по параметрам a_k ,

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \Phi_j(\mu, \lambda, I_1(p, q, a), \dots, I_n(p, q, a), a_1, \dots, a_m) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.3)$$

или подставляя в них другие значения параметров, например $a_k = 0$,

$$\Phi_j(\mu, \lambda, I_1(p, q, a), \dots, I_n(p, q, a), a_1, \dots, a_m) \big|_{a=0} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если каноническое преобразование $(p, q) \mapsto (P, Q)$ не зависит от произвольных параметров a_k , то решения систем уравнений (2.2), (2.3) или (2.2)–(2.4) являются координатами разделения $\{P_j, Q_j\}$, выраженными в виде функций (1.5) от исходных физических переменных $\{p_j, q_j\}$.

Обсудим возможность использования данного свойства переменных разделения для явного построения этих переменных.

Пусть рассматриваемая интегрируемая система не зависит от дополнительных параметров, но нам известны и уравнения плоских кривых (1.2), и каноническое преобразование $(p, q) \rightarrow (P, Q)$. Введем новые плоские кривые вида

$$\mathcal{C}_j^a : \quad \Phi_j^a(\lambda, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n, a_1, \dots, a_n) = \Phi_j(\lambda, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n) + a_j \lambda = 0,$$

где $\Phi(\lambda, \mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – функции, определяющие исходные кривые (1.2). Произведение данных кривых $\mathcal{C}_1^a \times \dots \times \mathcal{C}_n^a$ является $2n$ -параметрическим лагранжевым многообразием. Применяя обратное каноническое преобразование $(P, Q) \rightarrow (p, q)$, которое не зависит от параметров a_j , можно отождествить параметры a_k с новыми функциями I_k^a на пространстве $\mathcal{M}$.

Таким образом, для любой интегрируемой системы с интегралами I_j , допускающей разделение переменных, существует семейство интегрируемых обобщений такое, что $\lim_{a \rightarrow 0} I_j^a = I_j$. Это семейство можно использовать для нахождения переменных разделения с помощью уравнений (2.2), (2.3).

Итак, мы доказали существование интегрируемых обобщений исходной системы, позволяющих находить переменные разделения. Основной вопрос состоит в том, как построить эти обобщения в исходных физических переменных. Ответа на этот вопрос мы не знаем. Однако можно добавлять параметры, используя канонические преобразования исходных переменных. Можно также рассматривать построенные другими методами обобщения данной системы, которые зависят от параметров и не сильно изменяют уравнения плоских кривых.

Пусть нам известно некоторое обобщение исходной интегрируемой системы, в которое входят параметры a_k . Необходимо проверить, что искомое каноническое преобразование не зависит от этих параметров. Для этого достаточно решить уравнения (2.2), (2.3) и проверить независимость решений от параметров a_k .

В некоторых частных случаях ситуация упрощается. Например, если уравнения кривых имеют вид

$$\Phi_j(\mu, \lambda, \alpha, a) = G_j(\mu, \lambda) + F_j(\lambda, \alpha, a), \quad (2.5)$$

то для того чтобы искомое каноническое преобразование не зависело от параметра a_k , необходимо выполнение дополнительного условия

$$\frac{\partial^2 \Phi_j(\mu, \lambda)}{\partial a_k^2} = \frac{\partial^2 F_j(\lambda, I, a)}{\partial a_k^2} = 0. \quad (2.6)$$

С другой стороны, как мы покажем далее, для квазиоднородных интегрируемых систем на орбитах коприсоединенного представления групп Ли ситуация также упрощается. В этом случае операторы Казимира не только порождают семейство интегралов в инволюции, но и позволяют построить переменные разделения для данного семейства интегралов.

3. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

3.1. Система Энона–Эйлеса. Начнем с рассмотрения интегрируемой системы Энона–Эйлеса, которая неоднократно использовалась как модельный пример в рамках различных подходов к построению решений уравнения Гамильтона–Якоби [8], [9], [11].

Рассмотрим однородную интегрируемую систему с функцией Гамильтона

$$H = T + V = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} - x \left(y^2 + \frac{1}{3} x^2 \right). \quad (3.1)$$

Соответствующая плоская кривая $\mathcal{C}_{1,2}$ (1.2) в разложении двумерного лагранжева многообразия $\mathcal{C}^{(2)} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ определяется уравнением

$$\mathcal{C}: \quad \Phi(\lambda, \mu) = \mu^2 - \lambda^3 - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{4\lambda} = 0. \quad (3.2)$$

Эта гиперэллиптическая кривая совпадает со спектральной кривой (2×2) -матрицы Лакса [11] и может быть получена либо методами сингулярного анализа [8], либо при изучении бигамильтоновой структуры данной системы [9].

Соответствующее двумерное лагранжево многообразие $\mathcal{C}^{(2)}$ зависит только от значений двух интегралов движения. Используя масштабное преобразование переменных $(x, y) \mapsto (ax, ay)$, можно построить функцию Гамильтона и второй интеграл движения

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} - ax(y^2 + 2x^2), \quad I = (xp_y - yp_x)p_y + a\frac{y^2}{4}(4x^2 + y^2), \quad (3.3)$$

которые зависят от одного параметра a . Данное преобразование не изменяет рода и положения особых точек исходной гиперэллиптической кривой первого рода

$$\mathcal{C}^a : \quad \Phi(\lambda, \mu) = \mu^2 - a\lambda^3 - \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4\lambda} = 0. \quad (3.4)$$

Подставляя функцию Гамильтона и второй интеграл движения вместо модулей $\alpha_1 = H$ и $\alpha_2 = I$ гиперэллиптической кривой (3.4) и дифференцируя полученное уравнение (2.2) по параметру a , построим уравнение вида (2.3),

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu)}{\partial a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4x^2 + y^2 + 4x\lambda + 4\lambda^2)(4\lambda^2 - 4x\lambda + y^2) = 0, \quad (3.5)$$

которое не зависит от параметра a и поэтому определяет координаты разделения. Однако уравнение (3.5) имеет четыре различных решения вместо необходимых двух. Подставив данные решения в уравнение кривой и вычислив соответствующие импульсы μ_j , можно выделить две искомые координаты $\lambda_j = Q_j$, используя условие независимости получаемых импульсов от параметра a .

Можно рассмотреть и другое интегрируемое обобщение исходной системы

$$H_g = H - b\left(2x^2 - \frac{y^2}{2}\right) - 2cx, \quad I_g = I + bxy^2 + cy^2, \quad (3.6)$$

которое связано с другой реализацией исходной гиперэллиптической кривой $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}^{abc} : \quad \mu^2 - a\lambda^3 - b\lambda^2 - c\lambda - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{4\lambda} = 0. \quad (3.7)$$

Подставляя в уравнение (3.7) интегралы движения и дифференцируя по параметрам b и c , дополним единственное уравнение (3.5) до системы уравнений (2.3),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\lambda, \mu)}{\partial b} = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + x)(4\lambda^2 - 4x\lambda - y^2) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(\lambda, \mu)}{\partial c} = 0 &\quad \Leftrightarrow \quad 4\lambda^2 - 4x\lambda - y^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Нули наибольшего общего делителя полученных уравнений

$$e(\lambda) = \lambda - x - \frac{y^2}{4\lambda} = 0$$

не зависят от параметров и являются переменными разделения $Q_{1,2}$. Таким образом, для определения переменных разделения необходимо использовать как минимум два дополнительных параметра.

В функцию Гамильтона H_g (3.6) можно добавить еще одно слагаемое,

$$H_g \mapsto H_g - \frac{ad}{2}y^2,$$

которое приводит к изменению соответствующей гиперэллиптической кривой

$$\mathcal{C}^d: \mu^2 = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + \frac{2\alpha_1\lambda - \alpha_2}{4(\lambda - d)}.$$

При этом уравнения вида (2.3) явно зависят от параметра d , т.е. нарушается условие (2.6). Таким образом, надо исключить соответствующее уравнение из системы (2.3). Нули наибольшего общего делителя оставшихся уравнений типа (2.3) определяются уравнением

$$e(\lambda) = \lambda - x - \frac{y^2}{\lambda - d} = 0, \quad (3.9)$$

и точечное преобразование $(x, y) \mapsto (Q_1, Q_2)$ явно зависит от параметра d .

3.2. Штеккелевские системы. Напомним, что для всех штеккелевских систем уравнения кривых имеют вид (2.5) [10], и все интегрируемые системы на римановых пространствах постоянной кривизны, допускающие разделение переменных в криволинейных ортогональных системах координат, принадлежат штеккелевскому семейству интегрируемых систем [12].

Вполне интегрируемые штеккелевские системы [10] в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ однозначно определяются невырожденной $(n \times n)$ -матрицей Штеккеля $\mathbf{S}$, элементы j -го столбца которой s_{kj} зависят лишь от координаты q_j ,

$$\det \mathbf{S} \neq 0, \quad \frac{\partial s_{kj}}{\partial q_m} = 0, \quad j \neq m.$$

Данной матрице $\mathbf{S}$ сопоставим n квадратичных по импульсам функционально независимых интегралов движения I_k , $k = 1, \dots, n$, находящихся в инволюции $\{I_k, I_j\} = 0$, по правилу

$$I_k = \sum_{j=1}^n c_{jk}(p_j^2 + U_j(q_j)), \quad c_{jk} = \frac{\mathbf{S}^{kj}}{\det \mathbf{S}}. \quad (3.10)$$

Здесь $\mathbf{C} = [c_{jk}]$ — матрица, обратная к матрице Штеккеля $\mathbf{S}$, а $\mathbf{S}^{kj}$ — алгебраическое дополнение элемента s_{kj} в определителе $\det \mathbf{S}$.

Совместная поверхность уровня интегралов I_k (3.10)

$$M_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^{2n}: I_k(z) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n\} \quad (3.11)$$

диффеоморфна n -мерному тору [2], откуда сразу же следует, что

$$p_j^2 = \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_j} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k s_{kj}(q_j) - U_j(q_j), \quad (3.12)$$

где $\mathcal{S}_0(q_1, \dots, q_n)$ – функция укороченного действия [2]. Римановы поверхности (3.12) изоморфны каноническим гиперэллиптическим кривым

$$\mathcal{C}_j : \quad \mu^2 - F_j(\lambda) = \mu^2 - \prod_{i=1}^k (\lambda - e_i) = 0, \quad (3.13)$$

где модули кривой e_i являются функциями от значений интегралов движения α_i . Все вместе алгебраические кривые $\mathcal{C}_j$ определяют n -мерное лагранжево подмногообразие полного симплектического многообразия

$$\mathcal{C}^{(n)} : \quad \mathcal{C}_1(p_1, q_1) \times \mathcal{C}_2(p_2, q_2) \times \dots \times \mathcal{C}_n(p_n, q_n), \quad (3.14)$$

где импульсы находятся из уравнения (3.12).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Разложим штеккелевские потенциалы $U_j(q_j)$ в ряд Лорана:*

$$U_j(q_j) = \sum a_{kj} q_j^k, \quad a_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Так как интегралы движения I_i (3.10) зависят от коэффициентов ряда a_{kj} , то переменные разделения q_i являются решениями системы уравнений (2.3), которая в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial F_j}{\partial a_{kj}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^k - q_j^k = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Сопряженные им импульсы находятся из уравнений (2.2), которые в данном случае имеют вид (3.12).

Элементы матрицы Штекеля также могут зависеть от произвольных параметров $d_1, \dots, d_m$. Однако при этом не выполняется необходимое для штеккелевских кривых дополнительное условие (2.6), и тем самым искомое каноническое преобразование явно зависит от параметров d .

3.3. Периодическая D_n -цепочка Тоды. Рассмотрим обобщенную цепочку Тоды, связанную с системой корней D_n . Соответствующая функция Гамильтона имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} p_j^2 + e^{q_{j+1} - q_j} \right) + e^{-q_{n-1} - q_n} + e^{q_1 + q_2}. \quad (3.16)$$

Уравнения движения обладают n интегралами движения, которые были получены как спектральные инварианты матрицы Лакса размерности $(2n \times 2n)$ [13], [14]. Интегралы движения и спектральная кривая матрицы Лакса зависят только от n значений интегралов движения,

$$\mathcal{C} : \quad \mu + \frac{\lambda^4}{\mu} + \lambda^{2n} + 2\alpha_1 \lambda^{2n-2} + \alpha_2 \lambda^{2n-4} + \dots = 0, \quad \alpha_1 = H. \quad (3.17)$$

Перейдем к рассмотрению обобщенной цепочки Тоды типа D_n , предложенной Иноземцевым [14],

$$H_g = H + \frac{a}{\operatorname{sh}^2 q_n} + \frac{b}{\operatorname{sh}^2 \frac{q_n}{2}} + \frac{c}{\operatorname{sh}^2 q_1} + \frac{d}{\operatorname{sh}^2 \frac{q_1}{2}}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Новое уравнение плоской кривой имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \lambda) = \mu + \frac{\lambda^2(\lambda^4 + (2b - a)\lambda^2 + b^2)(\lambda^4 + (2c - d)\lambda^2 + d^2)}{\mu} + \\ + \lambda^{2n+2} + 2\alpha_1\lambda^{2n} + \alpha_2\lambda^{2n-2} + \dots = 0, \quad \alpha_1 = H_g. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Дифференцируя данное уравнение по a и b или по c и d , получим две системы уравнений

$$\Phi(\mu, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(\mu, \lambda)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(\mu, \lambda)}{\partial b} = 0 \quad (3.19)$$

или

$$\Phi(\mu, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(\mu, \lambda)}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(\mu, \lambda)}{\partial d} = 0. \quad (3.20)$$

Решения первой системы зависят явно от параметров c и d , а решения второй системы зависят, в свою очередь, от параметров a и b .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Решения систем уравнений (3.19), (3.20) определяют два семейства переменных разделения $\lambda = Q_j$ и $\mu = \phi(P_j)$ для цепочки Тоды. Эти семейства связаны каноническим преобразованием, индуцированным автоморфизмом второго порядка пополненного графа Дынкина D_n -типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения состоит в проверке совпадения решений данных уравнений с полюсами функции Бейкера–Ахизера с нестандартной динамической нормировкой, которые использовались в работе [15] для построения переменных разделения.

4. КВАЗИОДНОРОДНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

4.1. Цепочка Тоды. Обычная периодическая цепочка Тоды – это система n взаимодействующих частиц с гамильтонианом

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i^2 + e^{q_i - q_{i+1}}). \quad (4.1)$$

Здесь p_i, q_i – координата и импульс i -й частицы, т.е. канонические координаты фазового пространства $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$. Условия периодичности имеют вид $q_{i+n} = q_i$ и $p_{i+n} = p_i$ для любого индекса i .

Соответствующие уравнения движения обладают n интегралами движения, которые были получены впервые из матриц Лакса размерности $(n \times n)$ [13]. В данной работе

мы будем использовать эквивалентное представление Лакса в виде матриц размерности (2×2)

$$T(\lambda) = L_n(\lambda) \dots L_2(\lambda) L_1(\lambda), \quad L_i = \begin{pmatrix} \lambda + p_i & -e^{q_i} \\ e^{-q_i} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Уравнение спектральной кривой $\mathcal{C}: \det(T(\lambda) + \mu) = 0$ матрицы Лакса (4.2) зависит только от n интегралов движения и не зависит от дополнительных параметров,

$$\Phi(\mu, \lambda) = \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) + \lambda^n + \lambda^{n-1} I_1 + \lambda^{n-2} I_2 + \dots = 0. \quad (4.3)$$

Здесь $I_1 = \sum p_i$ — полный импульс, описывающий движение центра масс, а второй интеграл $I_2 = I_1^2/2 - H$ определяет функцию Гамильтона. Эта же гиперэллиптическая кривая может быть получена методами сингулярного анализа [7], [8], а также при исследовании бигамильтоновой геометрии цепочки Тоды [6].

Так как полный импульс системы $I_1 = \sum p_i$ является интегралом движения, то данная система принадлежит к классу квазиоднородных интегрируемых систем

$$\mathcal{C}^{(n)} : \overbrace{\mathcal{C} \times \dots \times \mathcal{C}}^{(n-1) \text{ раз}} \times \mathbb{R}^2. \quad (4.4)$$

Для данной модели, используя полюсы функции Бейкера–Ахиезера [5], преобразование Беклунда [16] или собственные значения тензора Нийенхейса [6], можно построить только $2(n-1)$ переменных разделения. Оставшиеся две переменные нам приходится вводить исходя из некоторых дополнительных предположений.

Рассмотрим поверхность уровня S_a интеграла $I_1 = a$, т.е. цепочку Тоды в системе центра масс, которая принадлежит к классу однородных интегрируемых систем. Соответствующее $(n-1)$ -мерное лагранжево многообразие зависит от $(n-1)$ значений интегралов движения и от одного дополнительного параметра a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Переменные разделения для цепочки Тоды в системе центра масс являются решениями системы уравнений (2.2), (2.3),*

$$\Phi(\mu, \lambda, a, \hat{I}_2, \dots, \hat{I}_n) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\mu, \lambda, a, \hat{I}_2, \dots, \hat{I}_n) = 0, \quad (4.5)$$

где функция Φ определена в (4.3), а $\hat{I}_j$ — ограничения интегралов I_j на поверхность уровня S_a общего положения, т.е. при произвольных значениях параметра a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя работе [17], перепишем матрицу Лакса в виде

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{Q}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{Q}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - P + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{p}_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} \lambda + \hat{p}_i & -e^{\hat{q}_i} \\ e^{-\hat{q}_i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{Q}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{Q}{2}} \end{pmatrix}.$$

Здесь Q и P — координата и импульс центра масс, а $\hat{q}_i$ и $\hat{p}_i$ — соответствующие переменные Якоби. Ограничение данной матрицы и интегралов движения на S_a достаточно

очевидно, и второе из уравнений (4.5) приводится к виду

$$T_{1,2}(\lambda) = 0,$$

где $T_{1,2}$ – внедиагональный элемент матрицы Лакса $T(\lambda)$. Решения этого уравнения совпадают с полюсами функции Бейкера–Ахиезера, нормированной на вектор $\vec{\alpha} = (1, 0)$ [5], [18].

Теперь мы можем вернуться к исходному симплектическому многообразию. Так как по определению интегралы движения находятся в инволюции $\{I_j, I_k\} = 0$, то скобки Пуассона между полным импульсом $I_1 = \sum p_i$ и решениями системы уравнений (4.5) равны нулю. Добавляя координату Q и импульс P центра масс к решениям системы уравнений (4.5), получаем $2n$ переменных разделения. При этом дополнительное n -е разделенное уравнение имеет вид $P = I_1$.

4.2. Старшие стационарные потоки уравнения КдФ. Следуя работе [19], рассмотрим старшие потоки эволюционных уравнений. Хотя все результаты будут справедливы для всех рассмотренных в [19] иерархий эволюционных уравнений, мы ограничимся изучением стационарных потоков уравнения КдФ, которые связаны с однородными системами типа Штеккеля [20], [21].

Пусть $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$ – базис в алгебре Ли $sl(2)$,

$$[\mathbf{h}, \mathbf{e}] = \mathbf{e}, \quad [\mathbf{h}, \mathbf{f}] = -\mathbf{f}, \quad [\mathbf{e}, \mathbf{f}] = 2\mathbf{h}, \quad (4.6)$$

а элемент

$$\Delta = \mathbf{h}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{e}\mathbf{f} + \mathbf{f}\mathbf{e}) \quad (4.7)$$

обертывающей алгебры является оператором Лапласа на группе $SL(2)$. Определим представление $\mathcal{W}$ алгебры $sl(2)$ в линейном пространстве V так, что

$$\mathcal{W} : \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\} \rightarrow \{e, f, h\} \in \text{End}(V).$$

Используя прямую сумму $(n+1)$ экземпляра алгебры петель $\widetilde{sl(2)}$, мы можем построить многополюсную матрицу Лакса

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2(\lambda - d_j)} \begin{pmatrix} h_j & e_j \\ f_j & -h_j \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

в рамках метода классической r -матрицы [3]. Здесь $\{e_j, f_j, h_j\}$ – элементы представления в некотором пространстве V_j . Например, следующая реализация бесконечномерного представления алгебры $sl(2)$ вида

$$h_j = x_j p_j, \quad e_j = x_j^2, \quad f_j = -p_j^2 + \frac{a_j}{x_j^2}, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

связана с обычными стационарными потоками и движением по геодезическим на римановых пространствах со штеккелевской метрикой [20], [21].

Чтобы ввести старшие потоки, достаточно использовать так называемую m -бозонную реализацию бесконечномерного представления алгебры $sl(2)$ вместо однобозонной реализации (4.9). Например, двухбозонная реализация имеет вид

$$h_j = \frac{1}{2}(x_j p_{x,j} - y_j p_{y,j}), \quad e_j = x_j p_{y,j}, \quad f_j = y_j p_{x,j} \quad (4.10)$$

и связана с так называемыми бинарными стационарными потоками [19].

Одновременно с движением по геодезическим можно рассмотреть и потенциальное движение. Соответствующая матрица Лакса записывается в виде

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} h & e \\ f & -h \end{pmatrix}(\lambda) = L_0(\lambda) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [\phi(\lambda)e^{-1}(\lambda)]_{MN} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Здесь параметрическая функция

$$\phi(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_k \lambda^k, \quad \phi_k \in \mathbb{R},$$

определяет потенциал $U(x)$, а скобки $[z]_{MN}$ обозначают линейную комбинацию лорановских проекций [21],

$$[z]_{MN} = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k \lambda^k \right]_{MN} \equiv \sum_{k=-M}^N z_k \lambda^k. \quad (4.12)$$

Для коэффициентов параметрической функции ϕ_k система уравнений (2.3) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \phi_k} \Phi(\mu, \lambda, \alpha, \phi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \phi_k} e(\lambda) = 0.$$

Нули наибольшего общего делителя $e(\lambda)$ совпадают с полюсами функции Бейкера–Ахиезера, нормированной на вектор $\vec{\alpha} = (1, 0)$, и определяют $2n$ переменных разделения. Эта конструкция матриц Лакса и переменных разделения не зависит от конкретной реализации представлений алгебры $sl(2)$.

Тот же самый результат можно получить, используя элементы Казимира Δ_j (4.7). Для первой реализации (4.9) операторы Δ_j равны произвольным параметрам a_j . Соответствующая система уравнений (2.3) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \Phi(\mu, \lambda, \alpha, a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f(\lambda)}{\partial a_k} e(\lambda) = 0.$$

Подставляя вторую реализацию (4.10) в определения матриц Лакса (4.11), мы определим интегрируемые системы на $4n$ -мерном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ с каноническими координатами $\{x_j, p_{x,j}, y_j, p_{y,j}\}_{j=1}^n$. Первые n штеккелевских интегралов $I_1, \dots, I_n$ квадратичны по импульсам (3.10), а оставшиеся n интегралов

$$I_{n+j} = \frac{(x_j p_{x,j} + y_j p_{y,j})^2}{4}, \quad j = 1, \dots, n,$$

совпадают со значениями операторов Казимира Δ_j (4.7). Тем не менее на пространстве $\mathcal{M}$ величины I_{n+j} являются интегралами движения, описывающими нетривиальную динамику. Так как мы рассматриваем бесконечномерные представления, для которых спектр оператора Казимира непрерывен, то соответствующее $2n$ -мерное лагранжево многообразие имеет вид

$$\mathcal{C}^{(2n)} : \overbrace{\mathcal{C} \times \dots \times \mathcal{C}}^{n \text{ раз}} \times \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{n \text{ раз}}.$$

Здесь $\mathcal{C}$ – спектральная кривая матрицы Лакса вида

$$\mathcal{C} : \mu^2 + P(\lambda, I_1, \dots, I_n, \phi_1, \dots, \phi_m) + \sum_{j=1}^n \frac{I_{n+j}}{(\lambda - d_k)^2} = 0,$$

где функция P и интегралы $I_1, \dots, I_n$ определяются параметрической функцией $\phi(\lambda)$. Явный вид некоторых кривых можно найти в работе [19].

Соответствующая пуассонова структура вырожденна, и функция Бейкера–Ахиезера имеет только n полюсов. Однако на поверхности уровня S_b функций $I_{n+j} = b_j$ пуассонова структура становится невырожденной, а интегрируемая система – однородной. После редукции n -мерное лагранжево многообразие зависит от n значений интегралов $\hat{I}_j$, а также от m параметров ϕ_k и n параметров b_j .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Решения системы уравнений*

$$\Phi(\mu, \lambda, \hat{I}_1, \dots, \hat{I}_n, \phi, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b_k} \Phi(\mu, \lambda, \hat{I}_1, \dots, \hat{I}_n, \phi, b) = 0$$

являются переменными разделения. Здесь $\hat{I}_j$ – ограничения интегралов I_j на поверхность уровня S_b общего положения, т.е. при произвольных b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенствами $\{I_{n+j}, e(\lambda)\} = \{I_{n+j}, h(\lambda)\} = 0$, установленными в работе [19]. Используя затем редукцию матрицы Лакса на поверхность уровня S_b , можно доказать, что система уравнений (2.3) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial b_k} \Phi(\mu, \lambda, \alpha, b) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(\lambda)}{\partial b_k} e(\lambda) = 0.$$

Как и ранее, наибольший общий делитель полученной системы уравнений совпадает с внедиагональным элементом $e(\lambda)$ матрицы Лакса [19].

Так как для построения переменных разделения мы использовали только интегралы движения (2.2), (2.3), то скобки Пуассона между интегралами I_{n+j} и переменными разделения равны нулю. Таким образом, на исходном $4n$ -мерном симплектическом многообразии $2n$ решений уравнений (2.2), (2.3) и $2n$ интегралов I_{n+j} вместе с сопряженными величинами образуют полный набор переменных разделения. Для этих дополнительных переменных разделенные уравнения имеют вид $P_{n+j} = I_{n+j}$.

4.3. Волчок Горячева–Чаплыгина. отождествим шестимерное пространство $e^*(3)$ с пространством $e(3) = so(3) \oplus \mathbb{R}^3$, которое является полупрямой суммой алгебры $so(3)$ и абелева идеала $\mathbb{R}^3$. Введем $J \in so(3) \simeq \mathbb{R}^3$ и $x \in \mathbb{R}^3$ – координаты в пространстве $e^*(3)$, снабженном естественной скобкой Ли–Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad (4.13)$$

где ε_{ijk} – стандартный полностью кососимметричный тензор. Представления алгебры Ли $e(3)$ фиксируются значениями двух операторов Казимира

$$I_1 = (x, x) = x_i x_i, \quad I_2 = (J, x) = J_i x_i. \quad (4.14)$$

В отличие от двух предыдущих примеров эти операторы описывают тривиальную динамику $\{I_{1,2}, x_k\} = \{I_{1,2}, J_k\} = 0$. Напомним, что орбиты $\mathcal{O}$ ($I_1 = c_1$, $I_2 = c_2$) коприсоединенного представления $E(3)$ в $e^*(3)$ являются четырехмерными симплектическими многообразиями, инвариантными относительно уравнений Эйлера–Пуассона [2]. Данные многообразия топологически эквивалентны кокасательному расслоению T^*S^2 к двумерной сфере S^2 .

На исходном шестимерном пространстве $e^*(3)$ определим интегралы движения для волчка Горячева–Чаплыгина:

$$I_3 = J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2 + x_2, \quad I_4 = 2J_3(J_1^2 + J_2^2) - x_3 J_2. \quad (4.15)$$

Данная система является полностью интегрируемой только на однопараметрическом семействе орбит $\mathcal{O}$ ($I_1 = \text{const}$, $I_2 = 0$).

В исходном шестимерном пространстве соответствующее некомпактное лагранжево многообразие имеет вид

$$\mathcal{C}^{(3)} = \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R} \cup \{0\},$$

а единственная гиперэллиптическая кривая задается уравнением

$$\mathcal{C}: \quad \mu\lambda^2 + \frac{\alpha_1\mu + 2x_3\alpha_2}{\lambda^2} + \mu^3 - 2\alpha_3\mu - \alpha_4 = 0, \quad \alpha_j = I_j, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (4.16)$$

Уравнение плоской кривой (4.16) было получено методами сингулярного анализа [8], [22] и в виде спектральной кривой различных матриц Лакса [23], [24].

Поскольку в данной задаче оператор Казимира I_2 имеет конкретное значение, а второй оператор I_1 квадратичен, построить редукцию остающихся интегралов I_3 и I_4 на четырехмерные симплектические листы $\mathcal{O}$ достаточно сложно. Поэтому рассмотрим масштабное преобразование $x \rightarrow ax$, которое связывает различные симплектические листы $\mathcal{O}$ так, что $I_1 \rightarrow a^2 I_1$ и $I_2 \rightarrow a I_2$. Дополнительно будем использовать симметрию данной задачи относительно вращения плоскости, перпендикулярной третьей оси, вида $x_{1,2} \rightarrow x_1 \sin \phi \pm x_2 \cos \phi$.

Итак, масштабное преобразование и вращение переводят исходные интегралы (4.15) в интегралы

$$I_3 = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2) + ax_1 + bx_2, \quad I_4 = 2J_3(J_1^2 + J_2^2) - (aJ_1 + bJ_2)x_3. \quad (4.17)$$

Соответствующая матрица Лакса

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -2J_3 & -\frac{x_3}{\lambda} & -b_+\lambda + \frac{x_+}{\lambda} \\ \frac{x_3}{\lambda} & 0 & J_+ \\ b_-\lambda - \frac{x_-}{\lambda} & J_- & 2J_3 \end{pmatrix},$$

где

$$x_{\pm} = x_1 \pm ix_2, \quad J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2, \quad b_{\pm} = a \pm ib,$$

является обобщением матрицы Лакса, построенной в работе [24]. Спектральная кривая C^{ab} данной матрицы имеет вид

$$\Phi(\mu, \lambda) = \mu\lambda^2(a^2 + b^2) + \frac{I_1\mu + 2x_3I_2}{\lambda^2} + \mu^3 - 2I_3\mu - I_4 = 0. \quad (4.18)$$

Таким образом, на каждом симплектическом листе $\mathcal{O}$ ($I_1 = \text{const}$, $I_2 = 0$) двумерное лагранжево многообразие зависит от двух значений интегралов движения I_3 , I_4 и двух свободных параметров b_+ и b_- .

Предложение 6. *Решения системы уравнений*

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \lambda, I_1(J, x), \dots, I_4(J, x), b_+, b_-) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(\mu, \lambda, I_1(J, x), \dots, I_4(J, x), b_+, b_-)}{\partial b_+} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(\mu, \lambda, I_1(J, x), \dots, I_4(J, x), b_+, b_-)}{\partial b_-} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

являются переменными разделения.

Доказательство. Решая последние два уравнения относительно переменной λ и подставляя полученные решения в первое уравнение, получим два уравнения, в которые входит только переменная μ ,

$$\begin{aligned} (\mu^2 x_- + \mu(J_- x_3 - 2x_- J_3) - 2J_- J_3 x - 3 + b_- x_3^2)(\mu^2 - 2J_3\mu - J_1^2 - J_2^2) &= 0, \\ (\mu^2 x_+ + \mu(J_+ x_3 - 2x_+ J_3) - 2J_+ J_3 x - 3 + b_+ x_3^2)(\mu^2 - 2J_3\mu - J_1^2 - J_2^2) &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Нули наибольшего общего делителя полученных уравнений

$$e(\mu) = \mu^2 - 2J_3\mu - J_1^2 - J_2^2 = 0 \quad (4.21)$$

совпадают с полюсами соответствующей функции Бейкера–Ахиезера, нормированной на вектор $\vec{\alpha} = (1, 0, 0)$, а система уравнений (4.19) эквивалентна системе уравнений

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \\ L(\mu, \lambda) \end{pmatrix} = 2, \quad (4.22)$$

определяющей переменные разделения в методе Складина [5]. Более того, часть уравнений из системы (4.19) совпадает с уравнениями из системы (4.22).

Заметим, что для определения переменных разделения достаточно использовать только одно из двух последних уравнений (4.19), так как в любом из уравнений (4.20) можно явно выделить два решения, которые не зависят от параметров.

4.4. Система Неймана. Система Неймана описывает движение точки на сфере S^{n-1} в поле квадратичного потенциала (все необходимые ссылки могут быть найдены в работе [3]). В канонических переменных x, p на T^*S^{n-1} соответствующая матрица Лакса имеет вид

$$L(\lambda) = A + J\lambda + bX\lambda^2, \quad J = p \wedge x, \quad X = x \otimes x, \quad b \in \mathbb{R}, \quad (4.23)$$

где A – произвольная симметрическая числовая матрица, а b – радиус сферы S^{n-1} . Используя вращения сферы, можно привести матрицу A к диагональному виду $A = -\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. При этом функция Гамильтона для системы Неймана имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum p_j^2 + b \sum a_j x_j^2.$$

Ограничимся случаем $n = 3$ и отождествим фазовое пространство с объединением однопараметрических орбит $\mathcal{O}$ ($I_1 = \text{const}$, $I_2 = 0$) алгебры $e^*(3)$. Как и для волчка Горячева–Чаплыгина, вместо редукции фазового пространства рассмотрим различные симплектические листы общего положения, отвечающие различным радиусам $I_1 = r^2 = b$ сферы S^2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Решения системы уравнений типа (2.2), (2.3)

$$\det(L(\lambda) - \mu) = 0, \quad \frac{\partial \det(L(\lambda) - \mu)}{\partial b} = 0$$

являются переменными разделения для системы Неймана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо последнего уравнения можно использовать уравнение типа (2.4)

$$\det(L(\lambda) - \mu)|_{b=0} = \det(L(\lambda) - \mu) - b \frac{\partial \det(L(\lambda) - \mu)}{\partial b} = 0.$$

Заметим, что это уравнение определяет спектральную кривую для волчка Эйлера. Исключая переменную λ , получим известное определение

$$\prod_{j=1}^3 (\mu - a_j) \left(\frac{x_1^2}{\mu - a_1} + \frac{x_2^2}{\mu - a_2} + \frac{x_3^2}{\mu - a_3} \right) = 0$$

для эллиптических сфероидальных координат [12], которые являются переменными разделения для системы Неймана [3].

4.5. Стационарные потоки уравнения Буссинеска. Уравнение Буссинеска в рамках общей теории стационарных потоков n -иерархий Гельфанда–Дикого изучалось в работе [25]. Следуя этой работе, рассмотрим стационарный поток пятого порядка t_5 на десятимерном фазовом пространстве $\mathcal{M}$ с координатами $h_1, k_1, h_2, k_2, \dots, h_5, k_5$, для

которых тензор Пуассона имеет вид

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & -h_1 & -2h_1 & -k_1 - h_2 \\ & & & & & 0 & -h_1 & -2k_1 & -k_1 - h_2 & -2k_2 \\ & & & & & & 0 & 0 & -2h_2 & -k_2 \\ & & & & & & & 0 & -k_2 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Данная пуассонова структура вырождена, и функции Казимира

$$I_1 = 3k_5 - 3k_1k_2 - 3k_2h_2, \quad I_3 = -3h_1k_2 + 3k_4 - 3k_1^2 \quad (4.24)$$

описывают тривиальную динамику

$$\{I_{1,3}, h_j\} = \{I_{1,3}, k_j\} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5.$$

Матрица Лакса [3], [25], вычисленная с использованием представления нулевой кривизны для исходных эволюционных уравнений или построенная в рамках метода классической r -матрицы, имеет следующий явный вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ h_2 & h_1 & 0 \\ -h_3 + k_2 & k_1 - h_2 & -h_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -k_3 & -k_2 & -k_1 \\ L_0^{2,1} & -h_2h_1 + h_4 & -h_1^2 + h_3 \\ L_0^{3,1} & L_0^{3,2} & h_2h_1 - h_4 + k_3 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

где

$$L_0^{2,1} = -h_1k_2 + k_4 - k_1^2 - h_1h_3 + h_5, \quad L_0^{3,2} = -k_1h_2 + h_2^2 - h_5 + 2k_4 - k_1^2, \\ L_0^{3,1} = h_1k_3 - 2h_1h_4 + 3k_5 + h_2h_1^2 - 2k_1k_2 - 2k_1h_3 + h_1^2k_1 - 2k_2h_2 + h_2h_3.$$

Уравнение спектральной кривой $\mathcal{C}: \det(\mu - L(\lambda)) = 0$ матрицы Лакса (4.25) зависит от двух функций Казимира и четырех интегралов движения,

$$\Phi(\mu, \lambda) = \mu^3 - \mu(I_1\lambda + I_2) - (\lambda^5 + I_3\lambda^3 + I_4\lambda^2 + I_5\lambda + I_6) = 0. \quad (4.26)$$

Явные выражения для интегралов указаны в работе [25]. В методе Гельфанда-Захаревича [4] эта кривая возникает как функция Казимира для пуассонова пучка $P_\lambda = P_1 - \lambda P_0$, зависящего от параметра λ [25].

В исходном десятимерном пространстве данная интегрируемая система является квазиоднородной, так как соответствующее лагранжево многообразие представимо в виде

$$\mathcal{C}^{(5)} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathbb{R}^2.$$

В отличие от волчка Горячева–Чаплыгина обе функции Казимира I_1 и I_3 произвольны и линейны по переменным k_4 и k_5 . Эти специфические особенности позволяют определить редукцию на поверхность уровня S_{ab} функций Казимира $I_1 = a$ и $I_3 = b$ всех интегралов движения $\hat{I}_j$ [25]. Поверхность S_{ab} – 8-мерный симплектический лист, на котором пуассонова структура становится невырожденной, а интегрируемая система – однородной. Соответствующее редуцированной системе четырехмерное лагранжево многообразие зависит от четырех значений интегралов движения $\alpha_j = \hat{I}_j$ и двух дополнительных параметров a и b .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Переменные разделения являются решениями системы уравнений*

$$\Phi(\mu, \lambda, \hat{I}, a, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\mu, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} \Phi(\mu, \lambda) = 0, \quad (4.27)$$

где функция Φ определяет единственную плоскую кривую $\mathcal{C}$ (4.26), а $\hat{I}_j$ – ограничения интегралов I_j на симплектический лист S_{ab} общего положения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегралы $\hat{I}_j$ в явном виде приведены в работе [25]. Подставляя эти интегралы в уравнения (4.27), можно доказать, что решения этих уравнений совпадают с собственными значениями тензора Нийенхейса. Эти же переменные совпадают с полюсами функции Бейкера–Ахиезера, нормированной на вектор $\vec{\alpha} = (1, 0, 0)$. Напомним, что при такой нормировке система уравнений (4.22), определяющая переменные разделения [5], имеет вид

$$\begin{aligned} L_{2,2}L_{3,3} - \mu(L_{2,2} + L_{3,3}) + \mu^2 - L_{2,3}L_{3,2} &= 0, \\ L_{1,2}L_{3,3} - L_{1,2}\mu - L_{1,3}L_{3,2} &= 0, \\ L_{1,2}L_{2,3} - L_{1,3}L_{2,2} + L_{1,3}\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Здесь $L_{i,j}$ – элементы матрицы Лакса, зависящие от спектрального параметра λ .

Два последних уравнения системы (4.27) совпадают с двумя последними уравнениями системы (4.28). Если решить эти уравнения относительно переменной μ и подставить полученные решения в первые из уравнений систем (4.27) или (4.28), то наибольший общий делитель полученных уравнений будет совпадать с определителем тензора Нийенхейса. Отсюда следует, что решениями системы уравнений (4.27) являются переменные разделения.

С другой стороны, так же как для волчка Горячева–Чаплыгина, можно вместо редукции интегралов движения использовать для нахождения переменных разделения

масштабное преобразование $\phi: S_{ab} \mapsto S_{cd}$, которое связывает симплектические листы с различными значениями операторов Казимира I_1 и I_3 . Подобное преобразование можно определить, изменяя матрицу Лакса по правилу

$$L \mapsto \tilde{L}(\lambda) = L(\lambda) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 I_3 + b_2 & 0 & 0 \\ a_1 I_1 + a_2 & c_1 I_3 + c_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Спектральная кривая новой матрицы сохраняет вид (4.26) после замены коэффициентов $I_k \mapsto \tilde{I}_k$, где

$$\tilde{I}_1 = (a_1 + 1)I_1 + a_2, \quad \tilde{I}_3 = (b_1 + c_1 + 1)I_3 + b_2 + c_2.$$

Выражения для остальных интегралов могут быть получены из определения матрицы Лакса.

Соответствующее лагранжево многообразие зависит от шести произвольных параметров. Однако параметры, отвечающие масштабному преобразованию и сдвигу операторов Казимира, порождают подобные уравнения,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(\mu, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(\mu, \lambda) = 0, \quad x_k = a_k, b_k, c_k.$$

Таким образом, можно построить две различные системы уравнений вида (2.2), (2.3),

$$\Phi(\mu, \lambda, \tilde{I}, a, b, c) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_k} \Phi(\mu, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b_k} \Phi(\mu, \lambda) = 0 \quad (4.29)$$

и

$$\Phi(\mu, \lambda, \tilde{I}, a, b, c) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_k} \Phi(\mu, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c_k} \Phi(\mu, \lambda) = 0. \quad (4.30)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Решения систем уравнений (4.29), (4.30) определяют два различных семейства переменных разделения, которые зависят от параметров $c_{1,2}$ или $b_{1,2}$.*

Эти два семейства переменных связаны друг с другом каноническим преобразованием. Таким образом, мы доказали, что для данной системы можно построить переменные разделения, используя операторы Казимира. При этом необходимо либо определить ограничение всех интегралов движения на поверхность уровня S_{ab} данных операторов, либо построить отображения, связывающие различные поверхности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время существует два основных метода построения переменных разделения, использующих преобразование Беклунда [5], [16] или структуру Пуассона–Нийенхейса [4], [6], [9], [25]. В одном из методов переменные разделения возникают как полюсы функции Бейкера–Ахиезера, в другом – как собственные значения тензора

Нийенхейса. В обоих случаях исходный набор интегралов движения явно не используется при построении переменных разделения, а входит в доказательство разделимости построенных координат только на завершающей стадии.

Преобразования Беклунда сохраняют форму интегралов движения и связаны с автоморфизмами лиувиллева тора $\mathcal{T}^n$. Эти автоморфизмы действуют как композиции сдвигов $\varphi_j \mapsto \varphi_j + \Omega_j(s)$ угловых переменных [16], [26] и порождаются производными по касательным к лиувиллеву тору направлениям. В теории бигамильтоновых систем [4], [6], [25] используются только переменные действия $s_j(\alpha, a)$ и с их помощью определяются переменные разделения.

В данной работе предложен метод построения переменных разделения, в котором используются дополнительные параметры $a_1, \dots, a_m$, входящие в определение переменных действия $s_j(I_1, \dots, I_n, a)$. При этом для построения переменных разделения явно используются интегралы движения и производные по трансверсальным к лиувиллеву тору направлениям, так как уравнения (2.3) можно представить в виде

$$\frac{\partial \Phi(\lambda, \mu)}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial s_j}{\partial a_k} \frac{\partial \Phi(\lambda, \mu)}{\partial s_j} = 0.$$

В силу этого данный метод можно рассматривать как альтернативный к методу, основанному на преобразованиях Беклунда.

Основной проблемой в предлагаемом подходе является построение интегрируемых обобщений исходной системы, которые зависят от дополнительных параметров. Для решения этой проблемы можно использовать канонические преобразования для однородных интегрируемых систем или редукцию на поверхность уровня функций Казимира для квазиоднородных интегрируемых систем. В данной работе для ряда интегрируемых систем на орбитах коприсоединенного представления групп Ли была доказана возможность явного построения переменных разделения с использованием операторов Казимира, определяющих эти орбиты. Было бы интересно рассмотреть эту конструкцию переменных разделения в общей теории интегрируемых систем с фазовыми пространствами такого типа.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00698) и INTAS (грант № 99-01459).

Список литературы

- [1] А. М. Виноградов, Б. А. Купершмидт. УМН. 1977. Т. 32. С. 175.
- [2] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [3] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский. Теоретико-групповые методы в теории интегрируемых систем. В сб.: Динамические системы—VII. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 16. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1987. С. 119.
- [4] I. M. Gel'fand, I. Zakharevich. On the local geometry of a bi-Hamiltonian structure. In: The Gelfand Mathematical Seminars 1990–1992. Eds. L. Corwin et al. Boston: Birkhauser, 1993. P. 51.

- [5] *E. K. Sklyanin.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35.
- [6] *I. M. Gelfand, I. Zakharevich.* Webs, Lenard schemes and the local geometry of bihamiltonian Toda and Lax structures. math.DG/9903080; *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* Bihamiltonian geometry and separation of variables for Toda lattices. Ref. SISSA 139/1999/FM. Trieste: SISSA, 1999.
- [7] *M. Adler, P. van Moerbeke.* Algebraic Completely Integrable Systems: a Systematic Approach. New York: Acad. Press, 1993.
- [8] *P. Vanhaecke.* Integrable Systems in the Realm of Algebraic Geometry. Lect. Notes Math. V. 1638. New York: Springer, 1996.
- [9] *M. Blaszak.* J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7. P. 213.
- [10] *P. Stäckel.* Über die Integration der Hamilton–Jacobischen Differential Gleichung Mittelst Separation der Variabel. Halle: Habilitationsschrift, 1891.
- [11] *A. P. Fordy.* Physica D. 1991. V. 52. P. 204.
- [12] *E. G. Kalnins.* Separation of Variables for Riemann Spaces of Constant Curvature. New York: Wiley, 1986.
- [13] *B. Kostant.* Adv. Math. 1979. V. 34. P. 195.
- [14] *V. I. Inozemtsev.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 629.
- [15] *V. B. Kuznetsov.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2127.
- [16] *E. K. Sklyanin.* Bäcklund transformations and Baxter's Q -operator. nlin.si/0009009.
- [17] *A. V. Tsiganov.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 196.
- [18] *E. K. Sklyanin.* The quantum Toda chain. In: Nonlinear Equations in Classical and Quantum Field Theory (Proc. Seminar Series Held at the Observatoire de Mendon, Mendon, and at the Univ. Pierre and Marie Curie, Paris, Oct. 1983 – Oct. 1984). Lect. Notes Phys. V. 226. Ed. N. Sanchez. Berlin: Springer, 1985. P. 196.
- [19] *Y. Zeng.* J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 621.
- [20] *A. B. Цыганов.* ТМФ. 1998. Т. 115. С. 3.
- [21] *A. B. Цыганов.* ТМФ. 1999. Т. 120. С. 27.
- [22] *C. Bechlivanidis, P. van Moerbeke.* Commun. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 317.
- [23] *E. K. Sklyanin.* J. Sov. Math. 1985. V. 31. P. 3417.
- [24] *A. I. Bobenko, V. Kuznetsov.* J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 1999.
- [25] *Г. Фальки, Ф. Магри, Г. Тондо.* ТМФ. 2000. Т. 122. С. 219.
- [26] *А. П. Веселов.* УМН. 1991. Т. 46. № 5. С. 3.

Поступила в редакцию 10.I.2001 г.