Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Борисов, Преобразование Беклунда и одевающие цепочки для уравнения
Ландау–Лифшица, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 226–235

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:30:35

© 2001 г.

А. Б. Борисов*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА И ОДЕВАЮЩИЕ ЦЕПОЧКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ–ЛИФШИЦА

Обсуждается метод одевания для уравнения Ландау–Лифшица, с помощью процедуры размножения получено модифицированное уравнение Ландау–Лифшица. Преобразование Дарбу (“одевание”) найдено для интегрируемого уравнения Ландау–Лифшица анизотропного магнетика. Получены преобразования Беклунда и одевающие цепочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Ландау–Лифшица (ЛЛ) для двухосного магнетика

$$\vec{S}_t = [\vec{S} \times \vec{S}_{xx}] + [\vec{S} \times \hat{J}\vec{S}], \quad (1)$$

где $\vec{S}$ – вектор спина, а $\hat{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$, $J_1 < J_2 < J_3$, – диагональная матрица, является полностью интегрируемой системой с известным спектром элементарных возбуждений [1]. Многочисленные физические приложения этого уравнения и его солитоны подробно рассмотрены в монографии [2]. Оно является наиболее общим интегрируемым уравнением, зависящим от трех постоянных J_1, J_2, J_3 . Уравнение синус-Гордон и нелинейное уравнение Шредингера могут быть получены из уравнения (1) в соответствующем пределе [1], [2]. Так, в случае $J_1 \ll J_2 < J_3$ при обозначениях

$$S_1 = -\frac{\rho}{R}, \quad S_2 = \left(1 - \frac{p^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \phi, \\ S_3 = \left(1 - \frac{p^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \phi, \quad x = \sqrt{R}y$$

в пределе $R \rightarrow \infty$ уравнение ЛЛ переходит в уравнение синус-Гордон

$$p_t = \phi_{yy} - \frac{1}{2} \sin 2\phi, \quad \phi_t = p,$$

---

*Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: Borisov@imp.uran.ru

если комбинации $(J_3 - J_2)R$, $(J_3 - J_1)/R$ и $(J_2 - J_1)/R$ при $R \rightarrow \infty$ стремятся к единице. Подобным образом можно получить нелинейное уравнение Шредингера: в случае $J_1 \approx J_2 \ll J_3$ введем комплексную функцию

$$\begin{aligned}\psi(x, \tau) &= R^{\frac{1}{2}} e^{igR\tau} (S_1(x, t) + iS_2(x, t)), \\ t &= R^{\frac{1}{2}} \tau, \quad J_3 - J_1 = J_3 - J_2 \equiv gR,\end{aligned}$$

удовлетворяющую в пределе $R \rightarrow \infty$ нелинейному уравнению Шредингера

$$i\psi_\tau + \psi_{xx} + \frac{g}{2}|\psi|^2\psi = 0.$$

Уравнение ЛЛ имеет эллиптическую пару Лакса [1], изучение его динамики методом обратной задачи рассеяния привлекало внимание многих исследователей. Обратная задача рассеяния, основанная на матричной задаче Римана на торе, была независимо предложена в работах [3]–[5]. Обратная задача в классической форме, основанная на интегральных уравнениях типа Марченко, была предложена в работе [6]. Тем не менее ни в одной из указанных работ не были получены преобразования Беклунда для уравнения (1). Согласно определению такие преобразования реализуются системой уравнений в частных производных для двух решений $\vec{S}'$ и $\vec{S}$ уравнения ЛЛ таких, что исключение $\vec{S}'$ (или $\vec{S}$) из этой системы дает уравнение (1) для поля $\vec{S}$ (или $\vec{S}'$). Преобразования Беклунда позволяют не только достаточно просто получать широкий класс точных решений, включая многосолитонные, но и находить новые интегрируемые динамические системы (одевающие цепочки) [7]. Их замыкание позволяет, в частности, строить конечнозонные решения и решения с бесконечным спектром в обратной задаче рассеяния. Отметим, что цепочки, связанные с уравнениями ЛЛ, рассматривались рядом исследователей [8]–[10]; одевающие цепочки, полученные в настоящей работе, имеют сложный вид.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 обсуждается преобразование Дарбу (“одевание”), позволяющее по частному решению уравнения ЛЛ получить новое решение этого уравнения. Мы используем матричную задачу Римана с нулями, которая является основой метода одевания для получения солитонных решений, а также результаты работ [5]. Однако в отличие от схем, предложенных ранее [3]–[5], мы не конкретизируем вид затравочного решения. В результате мы получаем общую формулу для “нового” решения уравнения ЛЛ, зависящего от “старого” решения и вспомогательного поля τ , удовлетворяющего системе из двух дифференциальных уравнений типа Риккати, коэффициенты которого зависят от “старого” решения. В разделе 3 найдена связь вспомогательного поля τ с двумя решениями уравнения ЛЛ и получено преобразование Беклунда подстановкой выражения для поля τ в систему дифференциальных уравнений, найденных в разделе 2. Построенная система уравнений, определяющих преобразование Беклунда, является одевающими цепочками, ассоциированными с уравнением ЛЛ. Показано, что существуют две одевающие цепочки, связанные с L -оператором спектральной задачи для уравнения ЛЛ. В конце раздела 3 мы используем метод разложения интегрируемых уравнений, предложенный в работе [11], и получаем (возможно, новое) модифицированное уравнение ЛЛ, зависящее от четырех произвольных постоянных; мы выписываем его в явном виде для изотропного случая.

2. ПРОЦЕДУРА ОДЕВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЛ

Известно, что уравнение (1) эквивалентно условию совместности системы линейных дифференциальных уравнений для двумерных матриц [1]

$$\Phi_x = U\Phi = -i(w_1 S_1 \sigma_1 + w_2 S_2 \sigma_2 + w_3 S_3 \sigma_3)\Phi, \quad (2)$$

$$\Phi_t = V\Phi = \sum_{\alpha=1}^3 \left(-i \sum_{\beta, \gamma=1}^3 w_\alpha S_\beta S_{\gamma, x} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} - 2ia_\alpha S_\alpha \right) \sigma_\alpha \Phi, \quad (3)$$

где функции w_α параметризуются эллиптическими функциями:

$$w_1 = \frac{\rho}{\operatorname{sn}(u, k)}, \quad w_2 = \frac{\operatorname{dn}(u, k)\rho}{\operatorname{sn}(u, k)}, \quad w_3 = \frac{\operatorname{cn}(u, k)\rho}{\operatorname{sn}(u, k)},$$

и удовлетворяют соотношениям

$$w_\alpha^2 - w_\beta^2 = -\frac{1}{4}(J_\alpha^2 - J_\beta^2), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Здесь k – модуль эллиптических функций,

$$k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}}, \quad 2\rho = (J_3 - J_1)^{\frac{1}{2}},$$

σ_α – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$a_1 = -w_2 w_3$ (и циклическая перестановка индексов 1, 2, 3). Поэтому матрицы Φ являются двоякопериодическими функциями в комплексной плоскости u с периодами $4K$ и $4K'$ ($K(k)$ – эллиптический интеграл первого рода) и подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} \Phi(u + 2K) &= \sigma_3 \Phi(u) \sigma_3, \\ \Phi(u + 2iK') &= \sigma_3 \Phi^*(u^*) \sigma_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этих ограничений сразу следует, что полюсы матрицы Φ делятся на две группы:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(\alpha)} &= v^{(\alpha)} + i(\theta^{(\alpha)} + 2K'), & \mu_2^{(\alpha)} &= \mu_1^{(\alpha)} + 2K, \\ \mu_3^{(\alpha)} &= \mu_1^{*(\alpha)} + 2iK', & \mu_4^{(\alpha)} &= \mu_3^{(\alpha)} + 2K, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$0 < v^{(\alpha)} < 2K, \quad 0 < \theta^{(\alpha)} < K', \quad \alpha = 1, 2, \dots, N,$$

и

$$\mu_1^{(\alpha)} = v^{(\alpha)} + iK', \quad \mu_2^{(\alpha)} = \mu_1^{(\alpha)} + 2K, \quad (6)$$

где

$$0 < v^{(\alpha)} < 2K, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим преобразования

$$\Psi' = W \Psi,$$

где матрица Ψ' удовлетворяет уравнению (2) с заменой “старого” решения $\vec{S}$ “новым” решением $\vec{S}'$. Матрица W удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$W_x = U'W - WU, \quad W_t = V'W - WV, \quad (7)$$

где U', V' определяются уравнениями (2), (3) с заменой $\vec{S}$ на $\vec{S}'$.

Обсудим сначала процедуру построения матрицы W с полюсами первого типа (5). Для построения мы используем свойство, что эллиптическая функция может быть разложена по ζ -функциям Вейерштрасса $\zeta(u)$ с квазипериодами $4K, 4K'$ в нашем случае. Для наших целей удобно использовать разложение матрицы W по функциям

$$\begin{aligned} f_1(u) &= 2[\xi(u - \mu_1) - \xi(u) + \xi(\mu_1)], \\ f_2(u) &= 2[\xi(u - \mu_1 + 2K) - \xi(u) + \xi(\mu_1) - \xi(2K)], \\ f_3(u) &= 2[\xi(u - \mu_1^* - 2iK') - \xi(u) + \xi(\mu_1^*) + \xi(2iK')], \\ f_4(u) &= 2[\xi(u - \mu_1^* - 2K - 2iK') - \xi(u) + \xi(\mu_1^*) + \xi(2K + 2iK')], \end{aligned}$$

которые, как следует из соотношений

$$\begin{aligned} f_{1,2}(u + 2K) &= f_{2,1}(u) + 2[\xi(u) - \xi(u + 2K) + \xi(2K)], \\ f_{3,4}(u + 2K) &= f_{4,3}(u) + 2[\xi(u) - \xi(u + 2K) + \xi(2K)], \\ f_{1,3}^*(u + 2iK') &= f_{3,1}(u^*) + 2[\xi(u^*) - \xi(u^* - 2iK') - \xi(2iK')], \\ f_{2,4}^*(u + 2iK') &= f_{4,2}(u^*) + 2[\xi(u^*) - \xi(u^* - 2iK') - \xi(2iK')], \end{aligned}$$

образуют с точностью до общего слагаемого представление группы редукций (4). Тогда матрица W имеет вид

$$W = (I + m \cdot X f_1 + \sigma_3 m \cdot X \sigma_3 f_2 + \sigma_3 m^* \cdot X^* \sigma_3 f_3 + m^* \cdot X^* f_4) B$$

с условием периодичности

$$m \cdot X + \sigma_3 m \cdot X \sigma_3 + \sigma_3 m^* \cdot X^* \sigma_3 + m^* \cdot X^* = 0, \quad (8)$$

где $\vec{m}, \vec{X}$ – двумерные векторы, B – диагональная матрица.

Вследствие антиэрмитовости матриц U ($U^+(u) = -U^*(u^*)$) матрица W может быть выбрана унитарной (для вещественных значений u): $W^+(u^*)W(u) = I$. Отсюда получаем уравнение

$$m^* \cdot W|_{u=\lambda_1} = 0 \quad (\lambda_1 \equiv \mu_1^*),$$

из которого определяем компоненты вектора $\vec{X}$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-m_1^*}{|m|^2 f_1(\lambda_1) + (m^* \sigma_3 m) f_2(\lambda_1)}, \\ X_2 &= \frac{-m_2^*}{|m|^2 f_1(\lambda_1) - (m^* \sigma_3 m) f_2(\lambda_1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Введём функции $\alpha(u)$, $\tau(u)$:

$$\begin{aligned} f_1(u) - f_2(u) &\equiv \alpha(u), \\ f_3(u) - f_4(u) &\equiv \alpha^*(u^* + 2iK'), \\ f_1(\lambda_1) + f_2(\lambda_1) - f_1(u) - f_2(u) + f_4(u) + f_3(u) &\equiv \tau(u). \end{aligned}$$

Отметим некоторые важные для дальнейшего соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{u-\mu_1}{2}\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{u-\mu_1}{2}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{u-\mu_1}{2}\right)} = \frac{1 + \operatorname{dn}(u - \mu_1)}{\operatorname{sn}(u - \mu_1)} = \\ &= \frac{w_1 + w_2}{\rho} (u - \mu_1) \alpha^*(u^* + 2iK') \equiv \frac{k^2}{\alpha^*(u^*)} = \frac{k^2 \operatorname{sn}\left(\frac{u-\lambda_1}{2}\right) \operatorname{cn}\left(\frac{u-\lambda_1}{2}\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{u-\lambda_1}{2}\right)} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{dn}(u - \mu_1^*)}{\operatorname{sn}(u - \mu_1^*)} = \frac{w_1 - w_2}{\rho} (u - \mu_1^*), \\ \tau(u) &= \alpha(\lambda_1) \frac{\alpha(u)}{\alpha^*(u^*)}, \end{aligned}$$

которые можно доказать разложением функций w_1, w_2, w_3 по ζ -функциям Вейерштрасса (с периодами $4K, 4K'$). Тогда из соотношений (8), (9) следует, что элементы матрицы W имеют вид

$$\begin{aligned} W_{11} &= c_1 \alpha(\lambda_1) \left[|m_1|^1 \frac{\alpha(u)}{\alpha^*(u^*)} + |m_2|^2 \right], \\ W_{22} &= d_1 \alpha(\lambda_1) \left[|m_2|^2 \frac{\alpha(u)}{\alpha^*(u^*)} + |m_1|^2 \right], \\ W_{12} &= d_1 \left[-m_1 m_2^* \alpha(u) - m_2 m_1^* \frac{k^2}{\alpha^*(u)} \right], \\ W_{21} &= c_1 \left[-m_2 m_1^* \alpha(u) - m_1 m_2^* \frac{k^2}{\alpha^*(u)} \right], \end{aligned}$$

где величины

$$c_1 \equiv \frac{B_{11}}{|m|^2 f_1(\lambda_1) + (m^* \sigma_3 m) f_2(\lambda_1)}, \quad d_1 \equiv \frac{B_{22}}{|m|^2 f_1(\lambda_1) - (m^* \sigma_3 m) f_2(\lambda_1)}$$

определяются из уравнений

$$|c_1|^{-2} = |d_1|^{-2} = |\alpha(\lambda_1)|^2 (|m_1|^4 + |m_2|^4) + k^2 (m_2^2 m_1^{*2} + m_1^2 m_2^{*2}) + 4\delta |m_1 m_2|^2. \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что величина

$$4\delta = |\alpha(u)|^2 + \frac{k^4}{\alpha(u)\alpha^*(u^*)} - \alpha^2(\lambda_1) \left[\frac{\alpha^*(u^*)}{\alpha(u)} + \frac{\alpha(u)}{\alpha^*(u^*)} \right]$$

не зависит от u :

$$4\delta = 2 \frac{d^2 s^2 - c^2}{s^2 c^2} \left(\frac{\lambda_1 - \mu_1}{2} \right) = 2 \left[\frac{d + k^2 c + k'^2}{d + c} - \frac{1 + d}{1 - c} \right] (\lambda_1 - \mu_1).$$

Неоднозначность определения c_1, d_1 из уравнений (10) связана с автоморфизмом оператора U и в дальнейшем не существенна. Поэтому мы выбираем $c_1 = d_1 = ir_1$, $r_1 \in \mathbb{R}$. Тогда прямыми вычислениями находим детерминант W в простой форме $\det W = \alpha(u)/\alpha^*(u^*)$.

На этом мы заканчиваем построение матрицы W и переходим к нахождению преобразований Дарбу. Из уравнений (7) сразу следует, что “новый” потенциал определяется унитарным преобразованием “старого” потенциала:

$$\vec{\sigma} \vec{S}' = W|_{u=0} \vec{\sigma} \vec{S} W^{-1}|_{u=0}. \quad (11)$$

Представим элементы матрицы $W|_{u=0}$ в виде

$$W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{|\alpha(\lambda)|\alpha^{*-1}}{r} [\alpha\beta + \beta^{-1}\alpha^*] = \frac{z_1}{\alpha^*}, & d &= \frac{z_1^*}{\alpha^*}, \\ b &= -\frac{i\alpha}{r} \left[e^{-i\omega} + e^{i\omega} \frac{k^2}{|\alpha|^2} \right] = -i\alpha z_2, & c &= -i\alpha z_2^*, \\ r^2 &= |\alpha(\lambda)|^2 (\beta^2 + \beta^{-2}) + 2k^2 \cos 2\omega + 4\delta \end{aligned} \quad (12)$$

и использованы обозначения $\alpha = \alpha|_{u=0}$ и $\mu^* = \lambda$, $m_2/m_1 = e^{i\omega}/\beta$. Тогда согласно (11), (12) преобразования Дарбу удобно представить в терминах полей $z = (S_1 + iS_2)/(1 + S_3)$:

$$z' = \frac{z_1^* z / \alpha - i \alpha^* z_2^*}{-i \alpha z_2 z + z_1 / \alpha^*}. \quad (13)$$

Найдем дифференциальное уравнение для отношения компонент вектора $\vec{m}$, от которых и зависят элементы матрицы $W|_{u=0}$. При $u = 0$ из уравнений (7) следуют дифференциальные уравнения на проекционные матрицы $P = m \cdot XB$:

$$P_x = U'|_{u=\mu} P - PU|_{u=\mu}, \quad P_t = W'|_{u=\mu} P - PW|_{u=\mu}. \quad (14)$$

Здесь и далее обозначено $\mu_1 = \mu$, а подстрочный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной. Введем поля γ, τ соотношениями

$$\gamma = \frac{m_2}{m_1}, \quad \tau = \frac{X_1 B_{11}}{X_2 B_{22}} = \frac{m_1^*}{m_2^*}.$$

Тогда из уравнений (14) сразу следуют уравнения типа Риккати для полей τ :

$$\tau_x = 2\tau i w_3 S_3 - \tau^2 [i w_1 S_1 + w_2 S_2] - i w_1 S_1 + w_2 S_2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tau_t = & -\frac{(1 + \tau^2)(j_1 S_1 + j_3 S_3)w_2}{S_2} + 2(1 + \tau^2)S_2 w_1 w_3 + \\ & + i((\tau^2 - 1)(j_1 w_1 + 2S_1 w_2 w_3) - 2\tau(2S_3 w_1 w_2 + j_3 w_3)), \end{aligned} \quad (16)$$

где введены компоненты вектора $\vec{j} = \vec{S}_x \times \vec{S}$ и обозначено $w_i = w_i(\mu)$, $i = 1, 2, 3$. Совместность уравнений типа Риккати для полей γ , которые можно получить из уравнений (14), содержащих в качестве коэффициентов компоненты вектора $\vec{S}'$, с уравнениями (15), (16) можно проверить с помощью соотношений

$$\begin{aligned} w_3(\mu) + w_3(\lambda) &= \frac{\alpha(\lambda)}{2} \left(\frac{\alpha}{\alpha^*} - \frac{\alpha^*}{\alpha} \right), \\ w_3(\mu) - w_3(\lambda) &= \frac{1}{2\alpha(\lambda)} \left(|\alpha|^2 - \frac{k^4}{|\alpha|^2} \right), \end{aligned}$$

доказываемых разложением по полюсам.

Уравнения (13), (15), (16) определяют одевание произвольного решения уравнения ЛЛ. При известном решении $\vec{S}$ комплексное поле τ находится в результате решения уравнений (15), (16), и новое решение определяется формулой (13).

Обсудим процедуру одевания для второй группы полюсов (6). В этом случае можно показать, что нетривиальная унитарная матрица W с полюсами μ_1 и $\mu_2 = \mu_1 + 2K$ не существует. Поэтому рассмотрим матрицу W с полюсами в точках $\mu = v + iK'$ ($v \in \mathbb{R}$), $\mu - 2K$, $\mu^* = \mu - 2iK'$, $\mu^* - 2K$. Согласно редукциям (4) матрица W в общем виде представима через двумерные векторы $\vec{m}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{n}$ и диагональную матрицу B :

$$W = (I + m \cdot X g_1(u - \mu) + \sigma_3 m \cdot X \sigma_3 g_2(u - \mu) + n \cdot Y g_1(u - \mu^*) + \sigma_3 n \cdot Y \sigma_3 g_2(u - \mu^*)) B, \quad (17)$$

где $g_1(u - \mu) = 2\zeta(u - \mu)$, $g_2(u - \mu) = 2(\zeta(u - \mu) - \zeta(2K))$. Тогда, используя условия периодичности и унитарности, мы получаем матрицу W в следующем виде:

$$W = \begin{pmatrix} a & \gamma(w_1 - w_2)(u - \mu) \\ \gamma(w_1 + w_2)(u - \mu) & a \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $a = \varepsilon \sqrt{1 + k^2 \gamma^2}$, $\varepsilon = \pm 1$ и поле γ принимает чисто мнимые значения. Отметим, что матрица $P \equiv m \cdot X$ оказывается нильпотентной матрицей ($\det P = \text{Sp } P = 0$) и $\det W = 1$. Преобразование Дарбу полей, которое сразу может быть получено из формул (11), (18), удобно записать для углов θ и ϕ , определенных уравнениями

$$S_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad S_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad S_3 = \cos \theta,$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \theta (1 + 2k^2 \gamma^2) + 2ika\varepsilon_4 \gamma \sin \theta, \\ e^{i\varphi'} &= e^{i\varphi} = \varepsilon_4 \frac{ik}{w_2(\mu) - w_1(\mu)}, \quad \varepsilon_4 = \pm 1, \end{aligned} \quad (19)$$

где поле γ удовлетворяет уравнению

$$\gamma_x = iw_3(\mu)(S'_3 + S_3)\gamma. \quad (20)$$

Рассмотрим для примера одевание тривиального решения $S_1 = S_2 = 0$. Тогда уравнение (20) с учетом соотношений $w_3(\mu) = w_3(v + iK') = -i \operatorname{dn} v$, $w_1(\mu) = k \operatorname{sn} v$, $w_2 = -ik \operatorname{sn} v$ элементарно интегрируется:

$$\gamma = \frac{1}{ik} \frac{e^{2 \operatorname{dn} v(x-x_0)}}{\sqrt{1 + e^{4 \operatorname{dn} v(x-x_0)}}}.$$

Новое решение

$$\frac{S'_1 + iS'_2}{1 + S'_3} = \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} e^{i\varphi'} = -\varepsilon (\operatorname{cn} v + i \operatorname{sn} v) e^{2 \operatorname{dn} v(x-x_0)}$$

при $\varepsilon = 1$ отвечает солитону (доменной границе), а при $\varepsilon = -1$ — антисолитону.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА И МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЛ

Рассмотрим одевающую цепочку, связанную с полюсами второй группы (6). С этой целью представим уравнение (19) в терминах θ, φ, ψ ($\psi = \arcsin ik\gamma$) и используем уравнение (20). В результате получаем уравнение цепочки в следующем виде:

$$\sin \theta' = \sin \theta - 2\varepsilon \varepsilon_4 \sin \psi \cos[\psi - \varepsilon \varepsilon_4 \theta],$$

где

$$\theta = -\varepsilon \varepsilon_4 \psi + \arccos \frac{\psi_x}{2k \sin \psi \operatorname{dn} v}$$

и поле θ' определяется соответствующими заменами. Преобразование Дарбу (“одевание”) дает возможность прямого вывода преобразования Беклунда для уравнения ЛЛ в общем случае. Поскольку окончательные формулы имеют громоздкий вид, мы приведем здесь лишь схему построения и некоторые формулы. Из уравнений (13) мы можем найти поле τ как функцию от z и z' :

$$\tau = \beta e^{i\omega} = \frac{p_1}{(\alpha^* q_1 + z' q_2)}, \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= i(-1 + k^4) \frac{\alpha^2 \beta \alpha^* (-1 + z z^* z'^* z')}{|\alpha(\lambda)|}, \\ q_1 &= -(\alpha + \beta^2 \alpha^*)(k^2 z - z'^*) + z^* (-\alpha^2 \beta^2 + z \beta^2 \alpha^{*2} z'^* + \alpha \alpha^* (-1 + z z'^*)), \\ q_2 &= \alpha z^* (\alpha \beta^2 + \alpha^*)(k^2 z - z'^*) + k^2 (\alpha^2 \beta^2 - z \beta^2 \alpha^{*2} z'^* + \alpha^* (\alpha - z \alpha z'^*)), \end{aligned}$$

а β определяется уравнением четвертой степени $|e^{i\omega}| = 1$. Тогда, подставляя выражение (21) в уравнения (15), (16), мы получаем систему из двух дифференциальных уравнений, связывающих z и z' , которые и являются преобразованиями Беклунда для уравнения ЛЛ.

Одевающую цепочку, ассоциированную с уравнениями ЛЛ, можно получить следующим образом. Из уравнения (15) можно найти поле z , как функцию полей τ и их производных:

$$\begin{aligned} z &= \frac{p}{q}, \\ p &= -\sqrt{g} + 4i\tau w_3 \tau_x^* + \\ &\quad + 2((1 + \tau^2)w_2(-1 + \tau^{*2})w_1^* + (-1 + \tau^2)w_1(1 + \tau^{*2})w_2^*) + 4i\tau_x \tau^* w_3^*, \\ q &= 2i((-1 + \tau^2)w_1 - (1 + \tau^2)w_2)\tau_x^* + 2i\tau_x((-1 + \tau^{*2})w_1^* + (1 + \tau^{*2})w_2^*) + \\ &\quad + 4(-\tau w_3((-1 + \tau^{*2})w_1^* + (1 + \tau^{*2})w_2^*) + \\ &\quad + \tau^2(w_1 - w_2)\tau^* w_3^* - (w_1 + w_2)\tau^* w_3^*), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} g &= (-(-1 + \tau^2)^2 J_{31} + (1 + \tau^2)^2 J_{32})\tau_x^{*2} + \\ &\quad + \tau_x^2(-J_{31}(-1 + \tau^{*2})^2 + J_{32}(1 + \tau^{*2})^2) - \\ &\quad - 8\tau_x \tau_x^*((-1 + \tau^2)w_1(-1 + \tau^{*2})w_1^* + (1 + \tau^2)w_2(1 + \tau^{*2})w_2^* + 4\tau w_3 \tau^* w_3^*) + 4g_1, \\ g_1 &= (-1 + \tau^2)^2 w_1^2 \left(\frac{J_{32}(1 + \tau^{*2})^2}{4} + (-1 + \tau^{*2})^2 w_3^{*2} \right) + \\ &\quad + 2(-1 + \tau^2)w_1(-1 + \tau^{*2})w_1^*((1 + \tau^2)w_2(1 + \tau^{*2})w_2^* + 4\tau w_3 \tau^* w_3^*) + \\ &\quad + 4(\tau w_3(1 + \tau^{*2})w_2^* + (1 + \tau^2)w_2 \tau^* w_3^*)^2 + \\ &\quad + \left(\frac{(1 + \tau^2)^2 J_{32}}{4} + (-1 + \tau^2)^2 w_3^2 \right) (-1 + \tau^{*2})^2 w_1^{*2} \end{aligned}$$

и введены следующие обозначения: $J_{31} = J_3 - J_1$, $J_{32} = J_3 - J_2$, $w_n(\mu) = w_n$, $w_n(\lambda) = w_n^*$ ($n = 1, 2, 3$). Подставляя представление (22) в преобразования Дарбу (13), мы получаем одевающую x -цепочку, ассоциированную с уравнением ЛЛ. Подобным образом из соотношений (22), (13) и (16) можно получить одевающую t -цепочку, включающую поля τ , τ' и их производные по переменной t . Эти x , t -одевающие цепочки являются, в свою очередь, преобразованием Беклунда для модифицированного уравнения ЛЛ, возможно, ранее неизвестного. Согласно работе [11] для вывода этого уравнения нужно подставить представление (22) в уравнение (16). Полученное уравнение, содержащее четыре произвольных постоянных $J_3 - J_1$, $J_3 - J_2$, $\text{Re}(w_3(\mu))$, $\text{Im}(w_3(\mu))$, имеет, к сожалению, громоздкий вид. Его упрощение с помощью локальных и нелокальных замен переменных, используемых при классификации интегрируемых уравнений [12], и сравнение с результатами работы [13] будут проведены в последующих публикациях. Приведем лишь вид модифицированного уравнения ЛЛ для изотропного случая $J_1 = J_2 = J_3$, $w_n(\mu) = 1/b$ с комплексным параметром b для векторных полей $\vec{T}$

$(\tau = (T_1 + iT_2)/(1 + T_3))$:

$$\vec{T}_t = -\frac{1}{4}(\vec{T}_x^2)(b + b^*)\vec{T}_x - \frac{r}{4}[\vec{T}\vec{T}_{xx}] - \frac{bb^*}{r}[\vec{T}\vec{T}_x](\vec{T}_x\vec{T}_{xx}), \quad r = \sqrt{16 - 4bb^*(\vec{T}_x^2)}.$$

Отметим, что при $b \rightarrow 0$ оно совпадает с изотропной моделью Гейзенберга.

Благодарности. Автор признателен С. А. Зыкову за полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 00-01-00366) и фонда INTAS (грант INTAS-99-1782).

Список литературы

- [1] *Е. К. Склянин.* О полной интегрируемости уравнения Ландау–Лифшица. Препринт Е-3-79. Л.: ЛОМИ, 1979.
- [2] *А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев.* Нелинейные волны намагнитченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983.
- [3] *A. V. Mikhailov.* Phys. Lett. A. 1982. V. 92. P. 51.
- [4] *Yu. L. Rodin.* Lett. Math. Phys. 1983. V. 7. P. 3.
- [5] *А. Б. Борисов.* ФММ. 1983. Т. 55. С. 230; *A. B. Borisov.* Lett. Math. Phys. 1983. V. 7. P. 195.
- [6] *А. Б. Борисов.* ДАН СССР. 1986. Т. 288. С. 1339.
- [7] *А. П. Веселов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. С. 3.
- [8] *Е. К. Склянин.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27.
- [9] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183.
- [10] *В. В. Адлер.* Частное сообщение. 2000.
- [11] *А. Б. Борисов, С. А. Зыков.* ТМФ. 1998. Т. 115. № 2. С. 199.
- [12] *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, В. В. Соколов.* Симметричный подход к классификации интегрируемых уравнений. В сб.: Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Ред. В. Г. Барьяхтар, В. Е. Захаров, В. М. Черноусенко. Киев: Наукова думка, 1990. С. 213.
- [13] *A. V. Mikhailov, A. B. Shabat.* Phys. Lett. A. 1986. V. 116. № 4. P. 191.

Поступила в редакцию 28.XII.2000 г.