Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Павлов, Размерная регуляризация и n -волновая процедура для скалярных полей в многомерных квазиевклидовых пространствах, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 236–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:07:25

РАЗМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И n -ВОЛНОВАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ В МНОГОМЕРНЫХ КВАЗИЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Получены выражения для вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярного поля с произвольной связью с кривизной в N -мерном квазиевклидовом пространстве-времени для вакуума, определяемого методом диагонализации гамильтониана. n -Волновая процедура обобщена для многомерных пространств. Найдены все контрчлены для $N = 5$ и для конформного скалярного поля в $N = 6, 7$. Определена геометрическая структура первых трех контрчленов для N -мерных пространств. Показано, что все вычитания в 4-мерном пространстве-времени и первые 3 вычитания в многомерных пространствах соответствуют перенормировке констант затравочного гравитационного лагранжиана. Обсуждается геометрическая структура других контрчленов в многомерном случае и вопрос об устранении конформной аномалии в 4-мерном пространстве-времени.

1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщение результатов квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени (см. монографии [1], [2]) на случай произвольной размерности может представлять самостоятельный интерес в связи с исследованиями многомерных теорий [3]. В то же время явная зависимость от размерности пространства в исследуемых выражениях необходима при последовательном проведении размерной регуляризации даже в случае 4-мерного пространства-времени.

Одним из центральных объектов квантовой теории в искривленном пространстве являются вакуумные средние тензора энергии-импульса. В соответствии с полуклассическим подходом они являются источниками гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна и их учет необходим при исследовании обратного влияния квантованного поля на геометрию пространства-времени. При их вычислении необходимо, во-первых, корректно определить вакуумное состояние и, во-вторых, устранить возникающие расходимости. Для скалярного поля с произвольной связью с кривизной определение вакуумного состояния, в соответствии с методом диагонализации гамильтониана [1], было дано в [4].

*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: pavlov@ipme.ru

При устранении возникающих расходимостей используются различные вычитательные процедуры (см. обзоры в [1], [2]). Наиболее эффективной в вычислительном плане является n -волновая процедура, предложенная в [5]. В работе [6] для 4-мерного случая была дана интерпретация всех бесконечных и частичных вычитаний n -волновой процедуры в терминах перенормировок констант в затравочном лагранжиане гравитационного поля.

В случае размерности $N > 4$ отсутствует (в нечетномерных пространствах) аналог теоремы Гаусса–Бонне и в квазиевклидовом случае нет линейной зависимости между тензорами, соответствующими вариационным производным квадратичных по скалярной кривизне и тензору Риччи слагаемых. Поэтому можно ожидать появления в затравочном гравитационном лагранжиане дополнительных по сравнению с 4-мерным случаем квадратичных по кривизне выражений.

В предлагаемой работе метод размерной регуляризации используется для выяснения геометрической интерпретации вычитаемых при помощи n -волновой процедуры выражений в квазиевклидовом N -мерном пространстве-времени. Рассматривается случай скалярного поля с произвольной связью с кривизной. Вакуумное состояние определяется в соответствии с методом диагонализации гамильтониана. В разделе 2 проведено квантование скалярного поля в квазиевклидовом пространстве и приведены выражения для вакуумных средних тензора энергии-импульса. В разделе 3 установлена структура расходимостей в N -мерном пространстве и представлены первые три контрчлена n -волновой процедуры для скалярного поля с произвольной связью с кривизной и контрчлены четвертого порядка для конформного поля. В разделе 4 даются сведения, необходимые для обобщения вычитательной процедуры на случай пространства-времени произвольной комплексной размерности $N - 2\epsilon$, установлена геометрическая структура вычитаемых контрчленов и построен соответствующий затравочный гравитационный лагранжиан. Обсуждается вопрос о поляризации вакуума и конформной аномалии в случае $N = 4$. В приложении приведены выражения для встречающихся в работе геометрических величин в N -мерном пространстве-времени.

В статье используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

2. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ В N -МЕРНОМ КВАЗИЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим комплексное скалярное поле $\phi(x)$ массы m с лагранжианом

$$L(x) = \sqrt{|g|} [g^{ik} \partial_i \phi^* \partial_k \phi - (m^2 + \xi R) \phi^* \phi] \quad (1)$$

и уравнением движения

$$(\nabla^i \nabla_i + \xi R + m^2) \phi(x) = 0, \quad (2)$$

где ∇_i — ковариантные производные в метрике g_{ik} , $g = \det(g_{ik})$, R — скалярная кривизна, ξ — константа связи с кривизной. В пространстве-времени размерности N значение $\xi = \xi_c = (N - 2)/[4(N - 1)]$ соответствует конформной связи ($\xi_c = 1/6$ при $N = 4$).

При $\xi = \xi_c$ и $m = 0$ уравнение (2) является конформно-инвариантным. Значение $\xi = 0$ соответствует случаю минимальной связи.

Метрический тензор энергии-импульса (ТЭИ), получаемый варьированием действия по метрике, имеет вид (см. [7])

$$T_{ik} = \partial_i \phi^* \partial_k \phi + \partial_k \phi^* \partial_i \phi - g_{ik} |g|^{-\frac{1}{2}} L(x) - 2\xi [R_{ik} + \nabla_i \nabla_k - g_{ik} \nabla^j \nabla_j] \phi^* \phi, \quad (3)$$

где R_{ik} – тензор Риччи.

Метрика N -мерного квазиевклидова пространства с одномерным временем и $(N-1)$ -мерным плоским пространством может быть записана как

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - d\mathbf{x}^2). \quad (4)$$

Полная система решений уравнения (2) в метрике (4) имеет вид

$$\phi(x) = a^{-\frac{N-2}{2}}(\eta) g_\lambda(\eta) \Phi_J(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где

$$\Phi_J(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{N-1}{2}} \exp(-i\lambda_\alpha x^\alpha), \quad (6)$$

$$J = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}, \quad -\infty < \lambda_\alpha < +\infty, \quad \lambda = \left(\sum_{\alpha=1}^{N-1} \lambda_\alpha^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$g_\lambda''(\eta) + \Omega^2(\eta) g_\lambda(\eta) = 0, \quad (7)$$

штрих означает производную по конформному времени η , $\Omega(\eta)$ – осцилляторная частота,

$$\Omega^2(\eta) = m^2 a^2 + \lambda^2 - \Delta \xi a^2 R, \quad \Delta \xi \equiv \xi_c - \xi. \quad (8)$$

В соответствии с методом диагонализации гамильтониана [4] и с учетом нормировки $g_\lambda g_\lambda^{*'} - g_\lambda' g_\lambda^* = -2i$ функции $g_\lambda(\eta)$ должны удовлетворять начальным условиям

$$g_\lambda'(\eta_0) = i\Omega(\eta_0) g_\lambda(\eta_0), \quad |g_\lambda(\eta_0)| = \frac{1}{\sqrt{\Omega(\eta_0)}}. \quad (9)$$

Отметим, что используемые в [6] начальные условия соответствуют диагональной форме гамильтониана, только если $\xi = \xi_c$ или $R = 0$.

Для квантования разложим поле $\phi(x)$ по полной системе решений уравнения (2):

$$\phi(x) = \int d\mu(J) [\phi_J^{(+)} a_J^{(+)} + \phi_J^{(-)} a_J^{(-)}], \quad (10)$$

где

$$\phi_J^{(+)}(x) = \frac{a^{-\frac{N-2}{2}}(\eta)}{\sqrt{2}} g_\lambda(\eta) \Phi_J^*(\mathbf{x}), \quad \phi_J^{(-)}(x) = (\phi_J^{(+)}(\mathbf{x}))^*, \quad (11)$$

$d\mu(J) = \prod_{\alpha=1}^{N-1} d\lambda_{\alpha}$, и потребуем выполнения коммутационных соотношений

$$[a_J^{(-)}, a_{J'}^{(+)}] = [a_J^{*(-)}, a_{J'}^{(+)}] = \delta_{JJ'}, \quad [a_J^{(\pm)}, a_{J'}^{(\pm)}] = [a_J^{*(\pm)}, a_{J'}^{(\pm)}] = 0. \quad (12)$$

Средние от оператора ТЭИ по вакууму, уничтожаемому операторами $a_J^{(-)}$, удобно выражать через билинейные комбинации функций g_{λ} и g_{λ}^* :

$$S = \frac{|g'_{\lambda}|^2 + \Omega^2 |g_{\lambda}|^2}{4\Omega} - \frac{1}{2}, \quad U = \frac{\Omega^2 |g_{\lambda}|^2 - |g'_{\lambda}|^2}{2\Omega}, \quad V = -\frac{d(g_{\lambda}^* g_{\lambda})}{2 d\eta}, \quad (13)$$

которые в соответствии с (7) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$S' = \frac{\Omega'}{2\Omega} U, \quad U' = \frac{\Omega'}{\Omega} (1 + 2S) - 2\Omega V, \quad V' = 2\Omega U \quad (14)$$

и начальным условиям, следующим из (9):

$$S(\eta_0) = U(\eta_0) = V(\eta_0) = 0. \quad (15)$$

Подставляя разложение (10) в (3) и проводя вычисления в $(N-1)$ -мерных сферических координатах в пространстве $\{\lambda_{\alpha}\}$, получим для вакуумных средних ТЭИ следующие выражения:

$$\langle 0|T_{ik}|0\rangle = \frac{B_N}{a^{N-2}} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^{N-2} \tau_{ik}, \quad (16)$$

где $B_N = [2^{N-3} \pi^{(N-1)/2} \Gamma((N-1)/2)]^{-1}$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, а “спектральные плотности” τ_{ik} равны

$$\tau_{00} = \Omega \left(S + \frac{1}{2} \right) + \Delta \xi (N-1) \left[cV + (c' + (N-2)c^2) \frac{1}{\Omega} \left(S + \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\lambda^2}{(N-1)\Omega} \left(S + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Omega^2 - \lambda^2}{2(N-1)\Omega} U - \right. \\ \left. - \Delta \xi \left[(N-1) \frac{c'}{\Omega} \left(S + \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} \right) + 2\Omega U - (N-1)cV \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

и введено обозначение $c = a'/a$. (При получении выражения для пространственных компонент (18) использованы уравнения движения.)

Приведем также формулу для следа вакуумного ТЭИ:

$$\begin{aligned} \langle 0|T_i^i|0\rangle = \frac{B_N}{a^N} \int_0^{\infty} d\lambda \lambda^{N-2} \left\{ \frac{1}{\Omega} \left(S + \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times (m^2 a^2 + \Delta \xi (N-1)(N-2)c') + \Delta \xi (N-1) [2\Omega U - (N-2)cV] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что вакуумные средние ТЭИ, представленные в [1], [6], вычислены по вакуумному состоянию, не соответствующему (при $\xi \neq \xi_c$ и $R \neq 0$) диагональной форме гамильтониана, а представленные в [8] выражения для вакуумного ТЭИ справедливы только в размерности $N = 4$.

3. РАСХОДИМОСТИ ТЭИ И n -ВОЛНОВАЯ ПРОЦЕДУРА

Приведенные выражения для вакуумного ТЭИ расходятся на верхнем пределе по λ . Для анализа расходимостей запишем систему дифференциальных уравнений (14) с начальными условиями (15) в виде системы интегральных уравнений Вольтерра

$$U(\eta) + iV(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} w(\eta_1)(1 + 2S(\eta_1))e^{2i\Theta(\eta_1, \eta)} d\eta_1, \quad (20)$$

$$S(\eta) = \frac{1}{2} \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta_1 w(\eta_1) \int_{\eta_0}^{\eta_1} w(\eta_2)(1 + 2S(\eta_2)) \cos[2\Theta(\eta_2, \eta_1)] d\eta_2, \quad (21)$$

где $w(\eta) = \Omega'(\eta)/\Omega(\eta)$, $\Theta(\eta_1, \eta_2) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Omega(\eta) d\eta$.

Используя первую итерацию в уравнениях (20), (21) и учитывая, что $\Theta(\eta_1, \eta_2) \rightarrow \lambda(\eta_2 - \eta_1)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, получим

$$U + iV \approx \int_{\eta_0}^{\eta} w(\eta_1)e^{2i\lambda(\eta - \eta_1)} d\eta_1, \quad (22)$$

$$S \approx \frac{1}{4} \left| \int_{\eta_0}^{\eta} w(\eta_1)e^{2i\lambda\eta_1} d\eta_1 \right|^2. \quad (23)$$

Поэтому $S \sim \lambda^{-6}$, $U \sim \lambda^{-4}$, $V \sim \lambda^{-3}$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Из (17), (18) и свойств функций S, U, V относительно замены $\lambda \rightarrow -\lambda$ следует, что в асимптотических разложениях τ_{ik} будут присутствовать только нечетные степени λ .

Таким образом, вакуумный ТЭИ (16) имеет в N -мерном квазиевклидовом пространстве $[N/2] + 1$ различных типов расходимостей ($[b]$ обозначает целую часть числа b), которые растут как $\lambda^N, \lambda^{N-2}, \dots, \ln \lambda$ при четном N и как $\lambda^N, \lambda^{N-2}, \dots, \lambda$ при нечетном N .

n -Волновая процедура, предложенная в [5], является одной из наиболее эффективных при вычислении перенормированных значений вакуумного ТЭИ:

$$\langle 0|T_{ik}|0\rangle_{\text{ren}} = \frac{B_N}{a^{N-2}} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{N-2} \tau_{ik}^{\text{reg}}, \quad (24)$$

где

$$\tau_{ik}^{\text{reg}} = \tau_{ik} - \sum_{l=0}^r \tau_{ik}[l], \quad \tau_{ik}[l] = \frac{1}{l!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^l}{\partial (n^{-2})^l} \left(\frac{1}{n} \tau_{ik}(n\lambda, nm) \right), \quad (25)$$

$r = [N/2]$ в соответствии с проведенным подсчетом типов расходимостей.

Для получения явного вида контрчленов $\tau_{ik}[l]$ найдем разложение S, U, V по обратным степеням n при замене $\lambda \rightarrow n\lambda$, $m \rightarrow nm$ и $n \rightarrow \infty$:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k} S_k, \quad U = \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k} U_k, \quad V = \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k} V_k. \quad (26)$$

Используя последовательные итерации в интегральных уравнениях (20), (21) и метод стационарной фазы, получим для первых отличных от нуля членов разложений

$$V_1 = W, \quad U_2 = DW, \quad S_2 = \frac{1}{4}W^2, \quad V_3 = \frac{1}{2}W^3 - D^2W - \frac{\omega}{2}D\left(\frac{q}{\omega^3}\right), \quad (27)$$

$$U_4 = \frac{3}{2}W^2DW - D^3W - D\left(\frac{\omega}{2}D\left(\frac{q}{\omega^3}\right)\right) + \frac{q}{2\omega^2}DW, \quad (28)$$

$$S_4 = \frac{3}{16}W^4 + \frac{1}{4}(DW)^2 - \frac{1}{2}WD^2W - \frac{1}{4}\omega WD\left(\frac{q}{\omega^3}\right), \quad (29)$$

где

$$q = \Delta\xi a^2 R, \quad \omega = (m^2 a^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}, \quad W = \frac{\omega'}{2\omega^2}, \quad D = \frac{1}{2\omega} \frac{d}{d\eta}. \quad (30)$$

В случае конформного скалярного поля ($q = 0$) имеем

$$V_5 = \frac{3}{8}W^5 - \frac{5}{2}W(DW)^2 - \frac{5}{2}W^2D^2W + D^4W, \quad (31)$$

$$U_6 = \frac{15}{8}W^4DW - \frac{5}{2}(DW)^3 - 10WDWD^2W - \frac{5}{2}W^2D^3W + D^5W, \quad (32)$$

$$S_6 = \frac{5}{32}W^6 - \frac{5}{8}W^2(DW)^2 - \frac{5}{4}W^3D^2W - \frac{1}{2}DWD^3W + \frac{1}{2}WD^4W + \frac{1}{4}(D^2W)^2. \quad (33)$$

Необходимо отметить, что при вычислении величин S_k , U_k , V_k мы, как и в [1], [5], [6], пренебрегаем зависящими от начального момента времени η_0 слагаемыми, т.е. ограничиваемся случаем контрчленов, локальных по времени η .

Используя (27)–(29), для величин $\tau_{ik}[l]$ получим

$$\tau_{00}[0] = \frac{\omega}{2}, \quad \tau_{\alpha\beta}[0] = \delta_{\alpha\beta} \frac{\lambda^2}{2(N-1)\omega}, \quad (34)$$

$$\tau_{00}[1] = \omega S_2 + \Delta\xi(N-1) \left[cV_1 + \frac{N-2}{4\omega} c^2 \right], \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}[1] = & \frac{\delta_{\alpha\beta}}{N-1} \left[\frac{\lambda^2}{\omega} S_2 - \frac{m^2 a^2}{2\omega} \left(U_2 + \frac{q}{2\omega^2} \right) \right] + \Delta\xi \left[(N-1)cV_1 - \right. \\ & \left. - 2\omega \left(U_2 + \frac{q}{2\omega^2} \right) + \frac{1}{4\omega} (-4\xi a^2 R + (N-1)(N-2)c^2) \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tau_{00}[2] = & \omega \left(S_4 + \frac{q}{4\omega^2} U_2 + \frac{q^2}{16\omega^4} \right) + \\ & + \Delta\xi(N-1) \left[cV_3 + \frac{N-2}{2\omega} c^2 \left(S_2 + \frac{1}{2} U_2 + \frac{q}{4\omega^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}[2] = & \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{1}{N-1} \left[\frac{\lambda^2}{\omega} \left(S_4 + \frac{q}{4\omega^2} U_2 + \frac{q^2}{16\omega^4} \right) - \frac{m^2 a^2}{2\omega} \left(U_4 + \frac{q^2}{4\omega^4} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{q}{\omega^2} S_2 \right) \right] + \Delta\xi \left[(N-1)cV_3 - 2\omega \left(U_4 + \frac{q^2}{4\omega^4} + \frac{q}{\omega^2} S_2 \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2\omega} (-4\xi a^2 R + (N-1)(N-2)c^2) \left(S_2 + \frac{1}{2} U_2 + \frac{q}{4\omega^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Из приведенных выражений видно, что структура контрчленов такая же, как и в [6], где при вычислении использованы начальные условия, отличные от (9). Это отмечено в [8] (для случая $N = 4$) и согласуется с тем, что при вычислении S_k, U_k, V_k не учитываются слагаемые, зависящие от начального момента времени η_0 .

Заметим, что перенормированный ТЭИ ковариантно сохраняется. Это следует из равенства $\nabla^i(\tau_{ik}^{\text{reg}}/a^{N-2}) = 0$, которое можно проверить, используя (34)–(38).

Формулы (34)–(38) определяют все контрчлены в случаях $N = 4, 5$. При $N \geq 6$ в соответствии с (25) имеются дополнительные контрчлены. Приведем их для $N = 6, 7$, ограничиваясь случаем конформного скалярного поля:

$$\tau_{00}[3] = \omega S_6, \quad \tau_{\alpha\beta}[3] = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(N-1)\omega} \left[\lambda^2 S_6 - \frac{m^2 a^2}{2} U_6 \right]. \quad (39)$$

4. РАЗМЕРНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА КОНТРЧЛЕНОВ

Для установления геометрической структуры выражений, вычитаемых в соответствии с (24), (25) из вакуумного ТЭИ, проведем размерную регуляризацию, заменив N на $N - 2\varepsilon$, где ε – комплексный параметр. Тогда для размерно регуляризованных вычитаемых величин получим

$$T_{ik,\varepsilon}[l] = \frac{B_{N-2\varepsilon}}{a^{N-2}} (Ma)^{2\varepsilon} \int_0^\infty d\lambda \lambda^{N-2\varepsilon} \tau_{ik,\varepsilon}[l], \quad (40)$$

где $\tau_{ik,\varepsilon}[l]$ определяются по формулам (34)–(39) с заменой $N \rightarrow N - 2\varepsilon$, а M – константа размерности массы, введенная для сохранения обычной размерности величин $T_{ik,\varepsilon}$ при $\varepsilon \neq 0$ [9].

Интегралы в (40) вычислим, используя равенство

$$\int_0^\infty x^k (1+x^2)^{-p} dx = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2}) \Gamma(p - \frac{k+1}{2})}{2\Gamma(p)} \quad (41)$$

и аналитическое продолжение выражения в правой части. В результате для 0-го и 1-го вычитаний получим выражения

$$\begin{aligned} T_{ik,\varepsilon}[0] &= -\frac{m^N}{2^N \pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{M^2 4\pi}{m^2} \right)^\varepsilon \Gamma\left(\varepsilon - \frac{N}{2}\right) g_{ik}, \\ T_{ik,\varepsilon}[1] &= \frac{m^{N-2}}{2^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) \left(\frac{M^2 4\pi}{m^2} \right)^\varepsilon \Gamma\left(1 - \frac{N}{2} + \varepsilon\right) G_{ik} = \frac{m^{N-2}}{2^{N-1} \pi^{\frac{N}{2}}} \times \\ &\times \left(\frac{M^2 4\pi}{m^2} \right)^\varepsilon \left[\frac{-\Gamma(3 - \frac{N}{2} + \varepsilon)}{3(N-1-2\varepsilon)(N-2-2\varepsilon)} + \Delta \xi \Gamma\left(1 - \frac{N}{2} + \varepsilon\right) \right] G_{ik}, \end{aligned} \quad (42)$$

где G_{ik} – тензор Эйнштейна.

Общие формулы (42), (43) при $N = 4$, $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствуют выражениям (50), (51), приведенным в [6] (дополнительный множитель 2 в нашем случае объясняется тем, что мы рассматриваем комплексное скалярное поле). При $N - 2\varepsilon = 5$ имеем

$$T_{ik,\varepsilon}[0] = \frac{m^5}{60\pi^2} g_{ik}, \quad T_{ik,\varepsilon}[1] = -\frac{m^3}{576\pi^2} (1 - 48\Delta\xi) G_{ik}. \quad (44)$$

Для $N = 6$, сохраняя только ненулевые при $\varepsilon \rightarrow 0$ слагаемые, получим

$$T_{ik,\varepsilon}[0] = \frac{m^6}{384\pi^3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + b - \frac{1}{6} \right) g_{ik}, \quad (45)$$

$$T_{ik,\varepsilon}[1] = -\frac{m^4}{1920\pi^3} \left[\frac{1}{\varepsilon} + b - \frac{11}{10} - 30\Delta\xi \left(\frac{1}{\varepsilon} + b - \frac{1}{2} \right) \right] G_{ik}, \quad (46)$$

где $b = 2 - \ln(m^2/(4\pi M^2)) - C$, C – постоянная Эйлера.

Из выражений (42), (43) следует, что для квазиевклидова пространства произвольной размерности N 0-е вычитание в n -волновой процедуре соответствует перенормировке космологической постоянной, а 1-е вычитание – перенормировке гравитационной постоянной.

Выяснение геометрической структуры контрчлена $T_{ik,\varepsilon}[2]$ представляет значительные вычислительные трудности. Из (37), (38) можно установить, что $T_{ik,\varepsilon}[2]$ представим в виде произведения m^{N-4} на множитель размерности (длина) $^{-2}$, который является ковариантно сохраняющимся тензором (в силу явно проверяемого ковариантного сохранения $T_{ik,\varepsilon}[2]$). Будем искать такой тензор в виде линейной комбинации вариационных производных (деленных на $\sqrt{|g|}$) от квадратичных по кривизне выражений (см. [10]):

$$^{(1)}H_{ik} = \frac{\delta \int d^N x \sqrt{|g|} R^2}{\sqrt{|g|} \delta g^{ik}} = 2(\nabla_i \nabla_k R - g_{ik} \nabla^l \nabla_l R) + 2R \left(R_{ik} - \frac{1}{4} R g_{ik} \right), \quad (47)$$

$$\begin{aligned} ^{(2)}H_{ik} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \int d^N x \sqrt{|g|} R^{lm} R_{lm} = \nabla_i \nabla_k R - \nabla^l \nabla_l R_{ik} - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\nabla^l \nabla_l R + R^{lm} R_{lm}) g_{ik} + 2R^{lm} R_{limk}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} H_{ik} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{ik}} \int d^N x \sqrt{|g|} R^{iklm} R_{iklm} = 2\nabla_i \nabla_k R - 4\nabla^l \nabla_l R_{ik} - \\ &\quad - 4R_{il} R_k^l + 4R^{lm} R_{limk} - \frac{1}{2} g_{ik} R_{lmnp} R^{lmnp} + 2R_{ilmp} R_k^{lmp}. \end{aligned} \quad (49)$$

Данные выражения имеют требуемую размерность (длина) $^{-2}$. Обозначим

$$A_{ik} = ^{(2)}H_{ik} - \frac{N}{4(N-1)} ^{(1)}H_{ik}. \quad (50)$$

Используя формулы приложения (П.6)–(П.18), можно убедиться, что в квазиевклидовом пространстве

$$H_{ik} = \frac{4}{N-2} A_{ik} + \frac{1}{N-1} ^{(1)}H_{ik}. \quad (51)$$

Таким образом, $T_{ik,\varepsilon}[2]$ есть линейная комбинация двух тензоров ${}^{(1)}H_{ik}$ и A_{ik} :

$$T_{ik,\varepsilon}[2] = \frac{m^{N-4}}{2^N \pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{M^2 4\pi}{m^2} \right)^\varepsilon \left[-\frac{2\Gamma(4 - \frac{N}{2} + \varepsilon)}{45(N-2-2\varepsilon)(N-4-2\varepsilon)} A_{ik} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\Gamma(4 - \frac{N}{2} + \varepsilon)}{60(N-1-2\varepsilon)^2} + \Delta\xi \frac{\Gamma(3 - \frac{N}{2} + \varepsilon)}{3(N-1-2\varepsilon)} + (\Delta\xi)^2 \Gamma\left(2 - \frac{N}{2} + \varepsilon\right) \right) {}^{(1)}H_{ik} \right]. \quad (52)$$

Для вычисления предела $T_{ik,\varepsilon}[2]$ при $N = 4$, $\varepsilon \rightarrow 0$ воспользуемся равенством, которое можно проверить с помощью формул (П.17), (П.18):

$${}^{(3)}H_{ik} = \lim_{N \rightarrow 4} \frac{2(N-3)}{N-4} A_{ik}, \quad (53)$$

где ${}^{(3)}H_{ik}$ – тензор, ковариантно сохраняющийся в 4-мерном конформно-плоском пространстве [11],

$${}^{(3)}H_{ik} = R_i^l R_{lk} - \frac{2}{3} R R_{ik} - \frac{1}{2} \left(R^{lm} R_{lm} - \frac{1}{2} R^2 \right) g_{ik}. \quad (54)$$

Сохраняя ненулевые при $\varepsilon \rightarrow 0$ слагаемые, в итоге получим

$$T_{ik}[2] = \frac{1}{1440\pi^2} \left[-{}^{(3)}H_{ik} + \left(\frac{1}{6} + 10\Delta\xi + 90(\Delta\xi)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + b - 2 \right) \right) {}^{(1)}H_{ik} \right], \quad (55)$$

что соответствует результату [6]. Однако необходимо отметить, что в размерности $4-2\varepsilon$ $\Delta\xi = (1-\varepsilon)(6-4\varepsilon)^{-1} - \xi$ и замена $\Delta\xi \rightarrow 6^{-1} - \xi$, используемая в [6], неверна из-за наличия множителя $(1/\varepsilon)$.

При $N - 2\varepsilon = 5$ имеем

$$T_{ik}[2] = \frac{m}{\pi^2 2^4} \left[-\frac{1}{270} A_{ik} + \left(\frac{1}{3840} + \frac{\Delta\xi}{24} - (\Delta\xi)^2 \right) {}^{(1)}H_{ik} \right]. \quad (56)$$

В случае $N = 6$, $\varepsilon \rightarrow 0$

$$T_{ik}[2] = \frac{m^2}{\pi^3 2^6} \left[-\frac{A_{ik}}{180} + \left(\frac{1}{1500} + \frac{\Delta\xi}{15} \left(\frac{1}{\varepsilon} + b - 2 \right) - (\Delta\xi)^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + b - 1 \right) \right) {}^{(1)}H_{ik} \right]. \quad (57)$$

Из выражения (52) следует, что в N -мерном квазиевклидовом пространстве вычитание $T_{ik,\varepsilon}[2]$ соответствует перенормировке констант при R^2 и $R^{ik} R_{ik}$ в затравочном гравитационном лагранжиане.

Таким образом, в квазиевклидовом пространстве размерности N вычитание членов $T_{ik,\varepsilon}[0]$, $T_{ik,\varepsilon}[1]$, $T_{ik,\varepsilon}[2]$ может интерпретироваться в терминах перенормировки констант затравочного гравитационного лагранжиана вида

$$L_{gr,0} = \sqrt{|g|} \left[\frac{1}{16\pi G_0} (R - 2\Lambda_0) + \alpha_0 \left(R^{ik} R_{ik} - \frac{NR^2}{4(N-1)} \right) + \beta_0 R^2 \right]. \quad (58)$$

Подчеркнем, что выражение (58) остается верным и при $N \rightarrow 4$, но в этом случае константа α_0 испытывает в соответствии с (52) бесконечную перенормировку, пропорциональную $(N - 4)^{-1}$. В 4-мерном случае бесконечна перенормировка и других констант: космологической Λ_0 и, для неконформного поля, гравитационной G_0 и константы β_0 . В квантовой теории поля бесконечная перенормировка констант затравочного лагранжиана является стандартной ситуацией. Поэтому можно утверждать, что сделанный в [6] вывод о несоответствии контрчленов, пропорциональных ${}^{(3)}H_{ik}$ (см. (55)), какой-либо перенормировке, является необоснованным, а их интерпретация как “истинной” поляризации вакуума весьма условна.

В пространствах с $N \geq 6$ необходимо учитывать, в соответствии с n -волновой процедурой (24), (25), дополнительные по сравнению с 4-мерным случаем контрчлены (для конформного поля в $N = 6, 7$ они указаны в (39)). Вопрос об их геометрической структуре остается нерешенным. Исходя из соображений размерности и наличия высших производных от метрики в контрчленах можно утверждать, что в затравочном гравитационном лагранжиане в случае многомерных пространств с $N \geq 6$ должны присутствовать скалярные выражения с третьей и более высокими степенями кривизны, тензора Риччи и их ковариантными производными. Например, исходя из (31)–(33) можно ожидать для $N = 6, 7$ появления в затравочном лагранжиане слагаемых вида γR^3 , $\nu R R_i^k R_k^i$, $\mu R_i^l R_l^k R_k^i$, $\rho \nabla^l R \nabla_l R$, $\zeta R \nabla^i \nabla^k R_{ik}$ и т.д. В связи с этим отметим аналогию перенормировки в многомерном пространстве со случаем радиационных поправок высших порядков в 4-мерном пространстве-времени (см., например, [12]).

Приведем также вид первых трех контрчленов для следа вакуумного ТЭИ в N -мерном квазиевклидовом пространстве:

$$T_{i,\varepsilon}^i[0] = \frac{m^N}{2^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{M^2 4\pi}{m^2} \right)^\varepsilon \Gamma \left(1 - \frac{N}{2} + \varepsilon \right), \quad (59)$$

$$T_{i,\varepsilon}^i[1] = \frac{m^{N-2}}{2^{N-1}\pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{M^2 4\pi}{m^2} \right)^\varepsilon \left[\frac{\Gamma(3 - \frac{N}{2} + \varepsilon)}{6(N-1-2\varepsilon)} + \Delta \xi \Gamma \left(2 - \frac{N}{2} + \varepsilon \right) \right] R, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} T_{i,\varepsilon}^i[2] = & \frac{m^{N-4}}{2^N \pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{M^2 4\pi}{m^2} \right)^\varepsilon \left\{ \frac{\Gamma(4 - \frac{N}{2} + \varepsilon)}{90} \left[\frac{2}{N-2-2\varepsilon} R^{lm} R_{lm} - \right. \right. \\ & - \frac{5(N-2\varepsilon)^2 - 20(N-2\varepsilon) + 24}{4(N-1-2\varepsilon)^2(N-2-2\varepsilon)} R^2 - \frac{3}{N-1-2\varepsilon} \square R \left. \right] - \\ & - \left(\Delta \xi \frac{\Gamma(3 - \frac{N}{2} + \varepsilon)}{3(N-1-2\varepsilon)} + (\Delta \xi)^2 \Gamma \left(2 - \frac{N}{2} + \varepsilon \right) \right) \times \\ & \times \left(2(N-1-2\varepsilon) \square R + \frac{1}{2}(N-4-2\varepsilon) R^2 \right) \left. \right\}, \quad (61) \end{aligned}$$

где $\square R \equiv \nabla^l \nabla_l R$. При $N = 4$, $\varepsilon \rightarrow 0$ формулы (59)–(61) соответствуют выражениям (56)–(58) в [6].

Обсудим вопрос об устранении аномального следа ТЭИ перенормировкой констант затравочного гравитационного лагранжиана. Аномальный след ТЭИ в 4-мерном про-

пространстве-времени может быть получен из (61) при $N = 4$, $\Delta\xi = 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Из равенств (П.19), (П.20) и формулы (52) следует, что конформная аномалия может быть устранена перенормировкой константы β_0 (конечной для конформного поля) и константы α_0 (бесконечной, расходящейся как $(N - 4)^{-1}$) в затравочном лагранжиане (58). Однако возможность устранения аномальных слагаемых не означает их отсутствия для квантованного поля в искривленном пространстве. Это может быть выяснено только с помощью эксперимента (см. также обсуждение вопроса об устранении из аномального следа слагаемого, пропорционального $\square R$ в [2], § 6.3).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовалась геометрическая структура контрчленов для вакуумного ТЭИ скалярного поля с произвольной связью с кривизной в N -мерном квазиевклидовом пространстве-времени. Полученные формулы (16)–(18) определяют перенормированные вакуумные средние ТЭИ в N -мерном пространстве по вакууму, определяемому методом диагонализации гамильтониана [4]. Для устранения расходимостей ТЭИ используется n -волновая процедура [5], которая, в соответствии с проведенным анализом расходимостей, обобщена на случай N -мерных пространств. При этом появляются дополнительные по сравнению с 4-мерным случаем контрчлены. В работе они приведены для конформного поля в $N = 6, 7$ (см. (39)). Как видно из (31)–(33), даже для конформного скалярного поля вычисление перенормированного ТЭИ значительно усложняется по сравнению с 4-мерным случаем. Поэтому применение n -волновой процедуры в многомерных пространствах становится чрезвычайно трудоемким.

С помощью размерной регуляризации в работе найдена геометрическая структура трех первых контрчленов (42), (43), (52) n -волновой процедуры для вакуумных средних ТЭИ и (см. (59)–(61)) для следа вакуумного ТЭИ. Последовательное проведение вычислений в N -мерном пространстве позволило сделать вывод, что с использованием размерной регуляризации все вычисления n -волновой процедуры в 4-мерном пространстве можно интерпретировать в терминах перенормировок констант затравочного гравитационного лагранжиана (58). Данный результат противоречит утверждению [6], где такая интерпретация исключалась для конечных вычитаний, пропорциональных тензору ${}^{(3)}H_{ik}$. В то же время в данной работе предельные выражения для $T_{ik,\varepsilon}$ [2] при $N = 4$, $\varepsilon \rightarrow 0$ соответствуют результату в [6]. Парадоксальность ситуации разрешается равенством (53), которое показывает, что в квазиевклидовом пространстве тензор ${}^{(3)}H_{ik}$ является пределом (по размерности) аналитически продолженного по размерности тензора (50), являющегося линейной комбинацией вариационных производных (47), (48) от выражений, квадратичных по скалярной кривизне и тензору Риччи.

Интерпретация всех конечных вычитаний n -волновой процедуры в 4-мерном пространстве как перенормировок констант затравочного гравитационного лагранжиана позволяет сделать вывод о возможности их устранения такой перенормировкой. Аналогична ситуация с конформной аномалией следа вакуумного ТЭИ. Отметим, что физические значения соответствующих констант могут быть определены только из эксперимента.

Согласно n -волновой процедуре в N -мерном пространстве возникают дополнительные контрчлены, которые содержат максимальную степень производной от метрики, равную $2[N/2]$. В этом можно убедиться, рассматривая асимптотические разложения (26) решений интегральных уравнений (20), (21). Поэтому при исследовании квантованных полей в искривленном N -мерном пространстве в затравочном гравитационном лагранжиане следует рассматривать комбинации геометрических величин, содержащие производные от метрики порядка $2([N/2] - 1)$. В задачах об обратном влиянии квантованного поля на метрику N -мерного пространства возникают, следовательно, дифференциальные уравнения для метрики порядка $2[N/2]$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем выражения для некоторых геометрических величин в N -мерном пространстве с метрикой (4).

Символы Кристоффеля, отличные от 0:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a} \equiv c, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^0 = c\delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{П.1})$$

Компоненты тензора $R_{ijkl} = g_{im}(\partial_l \Gamma_{jk}^m - \partial_k \Gamma_{jl}^m + \Gamma_{nl}^m \Gamma_{jk}^n - \Gamma_{nk}^m \Gamma_{jl}^n)$:

$$R_{0\alpha 0\beta} = -a^2 c' \delta_{\alpha\beta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\nu} = a^2 c^2 (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma}). \quad (\text{П.2})$$

Компоненты тензора Риччи, отличные от нуля, и скалярная кривизна:

$$R_{00} = (N-1)c', \quad R_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} [c' + (N-2)c^2], \quad (\text{П.3})$$

$$R = a^{-2}(N-1)[2c' + (N-2)c^2]. \quad (\text{П.4})$$

Компоненты тензора Эйнштейна $G_{ik} = R_{ik} - Rg_{ik}/2$:

$$G_{00} = -(N-1)(N-2)\frac{c^2}{2}, \quad G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(N-2)\left[c' + (N-3)\frac{c^2}{2}\right]. \quad (\text{П.5})$$

Используя (П.1)–(П.4), получим для квадратичных по кривизне выражений и вторых производных

$$R_{lm}R^{lm} = a^{-4}(N-1)[Nc'^2 + 2(N-2)c'c^2 + (N-2)^2c^4], \quad (\text{П.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla^l \nabla_l R &= a^{-4}2(N-1)[c^{(3)} + 2(N-4)c''c + (N-4)c'^2 + \\ &+ (N^2 - 11N + 22)c'c^2 - (N-2)(N-4)c^4], \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

$$\begin{aligned} \nabla^l \nabla_l R_{00} &= a^{-2}(N-1)[c^{(3)} + (N-6)c''c - 2c'^2 - \\ &- 4(N-3)c'c^2 + 2(N-2)c^4], \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

$$\begin{aligned} \nabla^l \nabla_l R_{\alpha\beta} &= -\delta_{\alpha\beta}a^{-2}[c^{(3)} + (3N-10)c''c + 2(N-3)c'^2 + \\ &+ 2(N^2 - 9N + 16)c'c^2 - 2(N-2)(N-3)c^4], \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

$$R^{lm}R_{l0m0} = a^{-2}(N-1)[c'^2 + (N-2)c'c^2], \quad (\text{П.10})$$

$$R^{lm}R_{l\alpha m\beta} = -\delta_{\alpha\beta}a^{-2}[(N-1)c'^2 + (N-2)c'c^2 + (N-2)^2c^4], \quad (\text{П.11})$$

$$R_{0lmp}R_0^{lmp} = a^{-2}2(N-1)c'^2, \quad (\text{П.12})$$

$$R_{\alpha lmp}R_\beta^{lmp} = -\delta_{\alpha\beta}a^{-2}2[c'^2 + (N-2)c^4], \quad (\text{П.13})$$

$$R_{lm pq}R^{lmpq} = a^{-4}2(N-1)[2c'^2 + (N-2)c^4]. \quad (\text{П.14})$$

Для компонент вариационных производных (47), (50) получим, используя (П.6)–(П.11),

$${}^{(1)}H_{00} = \frac{(N-1)^2}{a^2} \left[2c'^2 - 4c''c - 4(N-4)c'c^2 - \frac{c^4}{2}(N-2)(N-10) \right], \quad (\text{П.15})$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}H_{\alpha\beta} = & \delta_{\alpha\beta}a^{-2}(N-1) \left[4c^{(3)} + 4(2N-9)c''c + 2(3N-11)c'^2 + \right. \\ & \left. + 6(N^2 - 10N + 20)c'c^2 + \frac{1}{2}(N-2)(N^2 - 15N + 50)c^4 \right], \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

$$A_{00} = a^{-2}8^{-1}(N-1)(N-2)^2(N-4)c^4, \quad (\text{П.17})$$

$$A_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}a^{-2}8^{-1}(N-2)^2(N-4)[4c'c^2 + (N-5)c^4]. \quad (\text{П.18})$$

Из (47), (48), (50) могут быть получены следующие выражения для следов:

$${}^{(1)}H_i^i = -\frac{1}{2}(N-4)R^2 - 2(N-1)\nabla^i\nabla_i R, \quad (\text{П.19})$$

$$A_i^i = \frac{N-4}{2} \left[\frac{N}{4(N-1)}R^2 - R^{lm}R_{lm} \right]. \quad (\text{П.20})$$

Благодарности. Автор благодарит проф. А. А. Гриба и участников семинара лаборатории теоретической физики им. А. А. Фридмана за обсуждение работы.

Список литературы

- [1] А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988.
- [2] Н. Биррелл, П. Девис. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. М.: Мир, 1984.
- [3] Ю. С. Владимиров. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. М.: Изд-во МГУ, 1987.
- [4] Ю. В. Павлов. ТМФ. 2001. Т. 126. № 1. С. 115.
- [5] Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский. ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 2161.
- [6] С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, В. А. Шелюто. ТМФ. 1985. Т. 63. № 1. С. 64.
- [7] N. A. Chernikov, E. A. Tagirov. Ann. Inst. H. Poincaré. A. 1968. V. 9. P. 109.
- [8] M. Bordag, J. Lindig, V. M. Mostepanenko. Class. Quantum Grav. 1998. V. 15. P. 581.
- [9] G. 'tHooft, M. Veltman. Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189.
- [10] Б. С. Девитт. Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
- [11] В. Л. Гинзбург, Д. А. Киржицы, А. А. Любушин. ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 451.
- [12] В. А. Бейлин, Г. М. Верешков, Ю. С. Гришкан и др. ЖЭТФ. 1980. Т. 78. С. 2081.

Поступила в редакцию 13.XII.2000 г.