Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Вайгт, Г. П. Джорджадзе, К. Форд, Интегрирование калиброванной $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -теории Весса–Зумино–Новикова–Виттена с помощью редукции и квантовых парафермионов, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 249–267

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:23:07

© 2001 г.

Г. Вайгт*, Г. Джорджадзе†, К. Форд*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ
КАЛИБРОВАННОЙ $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -ТЕОРИИ
ВЕССА–ЗУМИНО–НОВИКОВА–ВИТТЕНА
С ПОМОЩЬЮ РЕДУКЦИИ И
КВАНТОВЫХ ПАРАФЕРМИОНОВ

$SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -теория Весса–Зумино–Новикова–Виттена непосредственно проинтегрирована с использованием калибровочно-инвариантной редукции. Доказано, что сохраняющиеся парафермионы в этой теории являются токами косет-теории. Парафермионная алгебра, тензор энергии-импульса и “вспомогательные” парафермионы проквантованы самосогласованным образом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Калибровочные модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ) являются важным подклассом двумерных интегрируемых конформных теорий поля. Отметим, что между нильпотентной [1] и ненильпотентной [2] калибровками имеется существенное структурное различие. Хотя уравнения движения в обоих случаях имеют представление в виде линейных пар Лакса [3], только пары Лакса для нильпотентно калиброванных теорий (Тоды) были проинтегрированы непосредственно [4].

В данной статье мы изучаем ненильпотентно калиброванную теорию ВЗНВ. В отличие от случая Тоды, здесь нет систематического метода интегрирования. Однако вместо интегрирования пары Лакса мы калибровочно-инвариантным образом развиваем методы лагранжевой и гамильтоновой редукций и доказываем, что ненильпотентно калиброванную теорию ВЗНВ можно проинтегрировать непосредственно. Нами воспроизведено общее решение $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -теории, которое было несистематическим путем получено в [5], [6] с помощью решения неабелевой B_2 -теории Тоды [7], [8]. Хотя мы и ограничиваемся простейшим случаем $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$, мы полагаем, что данный подход можно обобщить для любой калиброванной теории ВЗНВ.

*DESY Zeuthen, Zeuthen, Germany. E-mail: ford@ifh.de, weigt@ifh.de

†Математический институт им. Размадзе, Тбилиси, Грузия. E-mail: jorj@rmi.acnet.ge

При построении калибровочно-инвариантной редукции также доказано, что сохраняющиеся парафермионы являются косет-токами, а редуцированный тензор энергии-импульса сохраняет простой сугаваровский вид в терминах этих косет-токов.

Теория $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ представляет не только математический интерес. Эта модель привлекла значительное внимание, когда выяснилось, что такие теории можно интерпретировать как связанные с черными дырами [9]. В начале 90-х годов исследования квантовой $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -теории ВЗНВ в сильной степени опирались на достаточно формальные действия с континуальными интегралами [9]–[11] или связанными с ними операторными тождествами [12]. Поскольку попытки континуального интегрирования по $U(1)$ -калибровочному полю дают неполное эффективное действие [3], [13], мы определим $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -теорию с помощью классического лагранжиана из работы [2]. Наша цель – выполнить точное каноническое квантование этой теории таким же способом, как это было сделано для теории Лиувилля [14], [15], где общее решение переформулируется как каноническое преобразование между взаимодействующими и свободными полями, а классическое конформное преобразование поднимается до операторного преобразования.

Мы берем парафермионную алгебру как исходную точку для квантования. Поступая так, мы вынуждены деформировать классическое свободно-полевое представление парафермионов. Подобные деформации были найдены ранее в основанных на операторных разложениях конструкциях Фейгина–Фукса токов Каца–Мули для ВЗНВ [16]–[20]. Кроме того, мы получаем квантовый аналог парафермионной алгебры. То, что тензор энергии-импульса имеет сугаваровский вид, подсказывает построение квантового тензора энергии-импульса с использованием только парафермионов. Нами найден “удлиняющий” член, который мог бы соответствовать непертурбативному дилатону на языке σ -модели. Наконец, мы указываем, что общее решение модели имеет парафермионную интерпретацию. Точнее говоря, общее решение содержит поля с нулевым конформным весом, связанные с альтернативным набором “вспомогательных” парафермионов, которые также претерпевают квантовую деформацию.

2. ЛАГРАНЖЕВА ПЕРЕФОРМУЛИРОВКА $SL(2, \mathbb{R})$ -ТЕОРИИ ВЗНВ

Модели ВЗНВ определяются действием [21]–[23]

$$S_{\text{ВЗНВ}}[g] = \frac{k}{8\pi} \int_M h^{\mu\nu} \text{tr}(g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g) \sqrt{-h} d\sigma d\tau + k I_{\text{ВЗ}}[g], \quad (1)$$

которое включает топологический член Весса–Зумино (ВЗ)

$$I_{\text{ВЗ}} = \frac{1}{12\pi} \int_B \text{tr}(g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg). \quad (2)$$

Здесь $h_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -)$ – метрика Минковского на мировой поверхности M , h – ее определитель, B – объем с границей $\partial B = M$, k – константа связи, $g(\tau, \sigma)$ – поле, принимающее значения в полупростой группе Ли G . Мы ограничимся случаем $G = SL(2, \mathbb{R})$.

Для упрощения $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -теории оказывается полезным переписать топологический член ВЗ (2) как интеграл от локального лагранжиана с глобальной $U(1)$ -симметрией. Проверим, что дифференцирование 2-формы (для более общего случая см. [24])

$$F = \frac{2}{1 + \langle agag^{-1} \rangle} L_a \wedge R_a \quad (3)$$

дает подынтегральное выражение в топологическом члене ВЗ (2):

$$dF = \frac{2}{3} \langle g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \rangle, \quad (4)$$

и по теореме Стокса член ВЗ редуцируется к двумерному интегралу от F по $M = \partial B$. Здесь a – фиксированный нормированный времениподобный элемент алгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, для которого $\langle aa \rangle = 1$, где $\langle \cdot \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(\cdot)$ обозначает нормированный след, а левые и правые 1-формы из (3) имеют вид

$$L_a = \langle a dg g^{-1} \rangle, \quad R_a = \langle ag^{-1} dg \rangle.$$

Введем базис в алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеются соотношения

$$t_m t_n = -\eta_{mn} I + \epsilon_{mn}^{\quad l} t_l,$$

где I – единичная матрица, $\eta_{mn} = \text{diag}(+, -, -)$ – трехмерная метрика Минковского, $\epsilon_{012} = 1$. Нормированные следы матриц t_n имеют вид

$$\langle t_m t_n \rangle = \eta_{mn}, \quad \langle t_l t_m t_n \rangle = \epsilon_{lmn}. \quad (5)$$

Этим базисом определяется изометрия между алгеброй $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ и трехмерным пространством Минковского.

Левые и правые 1-формы

$$L_n = \langle t_n dg g^{-1} \rangle, \quad R_n = \langle t_n g^{-1} dg \rangle \quad (6)$$

связаны равенством $L_m = \Lambda_m^{\quad n}(g) R_n$, где

$$\Lambda_m^{\quad n}(g) = \langle t_m g t^n g^{-1} \rangle \quad (7)$$

– матрица преобразования Лоренца. Поскольку из (6) следует, что $g^{-1} dg = t^n R_n$ и $dg g^{-1} = t^n L_n$, то, используя (5), можно записать правую часть (4) в терминах правых (или левых) 1-форм:

$$\frac{2}{3} \langle g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \rangle = 4R_0 \wedge R_1 \wedge R_2.$$

Более того, взятие дифференциалов от (6) и (7)

$$dL_n = \epsilon_n^{lm} L_l \wedge L_m, \quad d\Lambda_{mn} = 2\epsilon_n^{kl} \Lambda_{mk} R_l, \quad dR_n = -\epsilon_n^{lm} R_l \wedge R_m$$

приводит к тому же результату $4R_0 \wedge R_1 \wedge R_2$ для левой части (4). Тем самым проверено свойство (4). С помощью теоремы Стокса окончательно получаем альтернативную лагранжеву формулировку теории ВЗНВ,

$$S = \int_M dz d\bar{z} \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{ВЗ}}, \quad (8)$$

где кинетический член $\mathcal{L}_0$ остался неизменным,

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{\gamma^2} \langle g^{-1} \partial_z g g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \rangle,$$

тогда как член ВЗ принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{ВЗ}} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\langle a \partial_z g g^{-1} \rangle \langle a g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \rangle - \langle a \partial_{\bar{z}} g g^{-1} \rangle \langle a g^{-1} \partial_z g \rangle}{1 + \langle a g a g^{-1} \rangle}. \quad (9)$$

Здесь мы использовали координаты светового конуса $z = \sigma + \tau$, $\bar{z} = \tau - \sigma$ и новую константу связи $\gamma^2 = 2\pi/k$. Уравнения Эйлера–Лагранжа, получаемые из (8), (9), согласованным образом воспроизводят динамические уравнения теории ВЗНВ (1)

$$\partial_{\bar{z}}(\partial_z g g^{-1}) = 0, \quad \partial_z(g^{-1} \partial_{\bar{z}} g) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что времениподобность элемента a (условие $\langle aa \rangle = 1$) гарантирует регулярность (9).

3. КАЛИБРОВАННАЯ $\text{SL}(2, \mathbb{R})/\text{U}(1)$ -ТЕОРИЯ ВЗНВ

Лагранжиан (8), (9) инвариантен относительно глобальных преобразований

$$g \mapsto h_a(\varepsilon) g h_a(\varepsilon), \quad h_a(\varepsilon) = e^{\varepsilon a},$$

которые для времениподобных элементов a образуют $\text{U}(1)$ -подгруппу в $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

С помощью стандартной процедуры калибрования введем $U(1)$ -калибровочные поля A_z и $A_{\bar{z}}$ и получим новый лагранжиан

$$\mathcal{L}_G(g, A_z, A_{\bar{z}}, \partial_z g, \partial_{\bar{z}} g) = \mathcal{L}(g, \partial_z g - A_z(ag + ga), \partial_{\bar{z}} g - A_{\bar{z}}(ag + ga)), \quad (11)$$

который инвариантен относительно локальных преобразований

$$A_z \mapsto A_z + \partial_z \varepsilon, \quad A_{\bar{z}} \mapsto A_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \varepsilon, \quad g \mapsto h_a(\varepsilon)gh_a(\varepsilon), \quad \varepsilon = \varepsilon(z, \bar{z}).$$

Нединамические калибровочные поля легко исключить из (11) с помощью алгебраических уравнений движения для них:

$$A_z = \frac{\langle a \partial_z g g^{-1} \rangle}{1 + \langle a g a g^{-1} \rangle}, \quad A_{\bar{z}} = \frac{\langle a g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \rangle}{1 + \langle a g a g^{-1} \rangle}. \quad (12)$$

Таким образом получаем калибровочно-инвариантный лагранжиан, записанный в терминах только поля g :

$$\mathcal{L}_G| = -\frac{1}{\gamma^2} \left(\langle g^{-1} \partial_z g g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \rangle - \frac{\langle a \partial_z g g^{-1} \rangle \langle a g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \rangle + \langle a \partial_{\bar{z}} g g^{-1} \rangle \langle a g^{-1} \partial_z g \rangle}{1 + \langle a g a g^{-1} \rangle} \right). \quad (13)$$

Без потери общности можно положить $a = t_0$. Поскольку $\langle t_0 g t_0 g^{-1} \rangle = \Lambda_{00}$ строго положительно, знаменатель в (13) никогда не обращается в нуль. Для дальнейшего важно, что этот лагранжиан можно переписать полностью в терминах калибровочно-инвариантных переменных

$$v_1 = \langle t_1 g \rangle, \quad v_2 = \langle t_2 g \rangle.$$

Калибровочная инвариантность следует из соотношения $e^{\varepsilon t_0} t_n e^{\varepsilon t_0} = t_n$ при $n = 1, 2$. Вводя дополнительные переменные $v_0 = \langle t_0 g \rangle$ и $c = -\langle g \rangle$, параметризуем $g(z, \bar{z}) \in SL(2, \mathbb{R})$ как

$$g = cI + v^n t_n = \begin{pmatrix} c - v_2 & -v_1 - v_0 \\ -v_1 + v_0 & c + v_2 \end{pmatrix}, \quad c^2 + v^n v_n = 1. \quad (14)$$

Подставляя это в (13), найдем, что зависимость от калибровочно-преобразуемых полей v_0 и c исключается, а редуцированный лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L}_G| = \frac{\partial_z v_1 \partial_{\bar{z}} v_1 + \partial_z v_2 \partial_{\bar{z}} v_2}{\gamma^2 (1 + v_1^2 + v_2^2)}. \quad (15)$$

Этот лагранжиан обладает естественной комплексной структурой в координатах Крускала $u = v_1 + i v_2$, $\bar{u} = v_1 - i v_2$ [9]. Получающиеся уравнения движения

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} u = \bar{u} \frac{\partial_z u \partial_{\bar{z}} u}{1 + u \bar{u}} \quad (16)$$

в точности те же, что были выведены в [3], [5].

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОСРЕДСТВОМ ЛАГРАНЖЕВОЙ РЕДУКЦИИ

Уравнения движения ВЗНВ (10) имеют хорошо известное общее решение:

$$g(z, \bar{z}) = g_L(z)g_R(\bar{z}), \quad (17)$$

где $g_L(z)$ и $g_R(\bar{z})$ – произвольные киральные и антикиральные функции со значениями в группе $SL(2, \mathbb{R})$.

Пусть теперь $g(z, \bar{z})$ – решение вида (17), удовлетворяющее условиям

$$\langle t_0 \partial_z g_L(z) g_L^{-1}(z) \rangle = 0, \quad \langle t_0 g_R^{-1}(\bar{z}) \partial_{\bar{z}} g_R(\bar{z}) \rangle = 0. \quad (18)$$

В силу (12) набор функций $g(z, \bar{z})$, $A_z(z, \bar{z}) = A_{\bar{z}}(z, \bar{z}) = 0$ образует решение динамических уравнений, получаемых из (11). Поскольку лагранжианы (11) и (15) приводят к одним и тем же динамическим уравнениям (16) в терминах калибровочно-инвариантных полей v_1 и v_2 , решения уравнения (16) можно записать как

$$u(z, \bar{z}) = \langle (t_1 + it_2) g_L(z) g_R(\bar{z}) \rangle, \quad (19)$$

где поля g_L и g_R удовлетворяют равенствам (18). Из уравнений (12) и (16) следует, что обращается в нуль напряженность $F_{z\bar{z}} = \partial_z A_{\bar{z}} - \partial_{\bar{z}} A_z = 0$. В силу калибровочной инвариантности соотношение (19) описывает общее решение уравнения (16).

Будем искать эти решения в терминах величин, не подчиненных связям киральных и антикиральных полей. Для этого параметризуем g_L и g_R аналогично (14),

$$g_L(z) = c(z)I + v^n(z)t_n, \quad g_R(\bar{z}) = \bar{c}(\bar{z})I + \bar{v}^n(\bar{z})t_n, \quad (20)$$

и для удобства введем полярные координаты

$$\begin{aligned} c &= R \cos \beta, & v_0 &= R \sin \beta, \\ v_1 &= r \cos \alpha, & v_2 &= -r \sin \alpha \end{aligned} \quad (21)$$

для кирального поля и аналогично для антикирального поля. Условия (18) приводят к равенству $R^2 \beta' - r^2 \alpha' = 0$, и при $R^2 - r^2 = 1$ (что следует из (14)) мы получаем соотношения

$$R = \sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha' - \beta'}}, \quad r = \sqrt{\frac{\beta'}{\alpha' - \beta'}}, \quad (22)$$

где штрих обозначает дифференцирование. Подставляя (20) и (21) в (19), окончательно получаем общее решение уравнения (16):

$$u(z, \bar{z}) = R(z) \bar{r}(\bar{z}) e^{i\bar{\alpha}(\bar{z}) - i\beta(z)} + r(z) \bar{R}(\bar{z}) e^{-i\alpha(z) + i\bar{\beta}(\bar{z})}, \quad (23)$$

которое должным образом параметризовано двумя киральными и двумя антикиральными функциями $\alpha(z)$, $\beta(z)$, и $\bar{\alpha}(\bar{z})$, $\bar{\beta}(\bar{z})$.

Лагранжиан (15), отвечающий конформной теории поля, приводит к бесследовому тензору энергии-импульса $T_{z\bar{z}} = 0$ с киральной компонентой

$$T = T_{zz} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial_z \bar{u} \partial_z u}{1 + u\bar{u}} = \frac{1}{\gamma^2} \left(\alpha' \beta' + \frac{(\alpha'' \beta' - \beta'' \alpha')^2}{4\alpha' \beta' (\alpha' - \beta')^2} \right) \quad (24)$$

(и аналогично для антикиральной части $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$). Для свободных полей данный тензор энергии-импульса принимает вид $T(z) = \phi_1'^2(z) + \phi_2'^2(z)$. Это можно получить переходом к каноническим свободным полям ($k = 1, 2$)

$$\psi_k(\sigma, \tau) = \phi_k(z) + \bar{\phi}_k(\bar{z}), \quad (25)$$

где $\phi_k(z)$ и $\bar{\phi}_k(\bar{z})$ – киральная и антикиральная компоненты. Преобразование свободных полей, которое решает эту задачу, имеет вид

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha} &= e^{i\gamma\phi_2} \frac{2e^{\gamma\phi_1} - e^{-\gamma\phi_1} + 2ie^{\gamma\phi_1}\Phi}{\sqrt{(2e^{\gamma\phi_1} - e^{-\gamma\phi_1})^2 + 4e^{2\gamma\phi_1}\Phi^2}}, \\ e^{-i\beta} &= e^{i\gamma\phi_2} \frac{2e^{\gamma\phi_1} + e^{-\gamma\phi_1} - 2ie^{\gamma\phi_1}\Phi}{\sqrt{(2e^{\gamma\phi_1} + e^{-\gamma\phi_1})^2 + 4e^{2\gamma\phi_1}\Phi^2}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\Phi(z)$ определяется как интеграл от

$$\partial_z \Phi(z) = \gamma e^{-2\gamma\phi_1(z)} \partial_z \phi_2(z). \quad (27)$$

Общее решение (23) принимает вид канонического преобразования, отображающего $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -поля на свободные поля:

$$\begin{aligned} u &= e^{i\gamma(\phi_2 + \bar{\phi}_2)} \left(e^{\gamma(\phi_1 + \bar{\phi}_1)} (1 + \Phi \bar{\Phi}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} e^{-\gamma(\phi_1 + \bar{\phi}_1)} + \frac{i}{2} (\Phi e^{\gamma(\phi_1 - \bar{\phi}_1)} + \bar{\Phi} e^{-\gamma(\phi_1 - \bar{\phi}_1)}) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

В дальнейшем мы наложим условие периодичности в пространственном направлении:

$$u(\sigma + 2\pi, \tau) = u(\sigma, \tau), \quad \psi_k(\sigma + 2\pi, \tau) = \psi_k(\sigma, \tau).$$

В то время как поля ψ_k являются строго периодичными, их киральные и антикиральные компоненты имеют монодромию

$$\phi_k(z + 2\pi) = \phi_k(z) + \frac{p_k}{2}, \quad \bar{\phi}_k(\bar{z} - 2\pi) = \bar{\phi}_k(\bar{z}) - \frac{p_k}{2},$$

где p_k – нулевые моды импульсов. При этих граничных условиях интегрирование соотношения (27) дает

$$\Phi(z) = -\frac{\gamma}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\gamma p_1}{2}\right)} \int_0^{2\pi} dz' \partial_{z'} \phi_2(z') e^{-\frac{\gamma p_1 \epsilon 2\pi(z-z')}{2} - 2\gamma\phi_1(z')}. \quad (29)$$

Подстановка (29) в (28) в точности воспроизводит результат работы [6].

Мы продемонстрировали, что калибровочно-инвариантная лагранжева редукция действительно дает метод интегрирования, позволяющий непосредственно решить уравнения движения ненильпотентно калиброванной теории ВЗНВ.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОСРЕДСТВОМ ГАМИЛЬТОНОВОЙ РЕДУКЦИИ

Гамильтонова редукция теории ВЗНВ является альтернативным способом построения и интегрирования косет-моделей. Фазовое пространство системы (8) задается множеством функций $g(\sigma)$ и $R(\sigma)$ со значениями в группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ и алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, соответственно. Переформулированное действие ВЗНВ (8), (9) можно записать как $S = \int (\theta - H d\tau)$, где 1-форма θ и гамильтониан H имеют вид

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{2\pi} d\sigma \left(-\langle Rg^{-1}dg \rangle + \frac{\langle t_0 g^{-1}g' \rangle \langle t_0 dg g^{-1} \rangle - \langle t_0 g' g^{-1} \rangle \langle t_0 g^{-1}dg \rangle}{\gamma^2(1 + \langle t_0 g t_0 g^{-1} \rangle)} \right), \\ H &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\gamma^2 \langle RR \rangle + \frac{1}{\gamma^2} \langle g^{-1}g'g^{-1}g' \rangle \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь d обозначает внешний дифференциал, $g' = \partial_\sigma g$. Вариация $R(\sigma)$ приводит к гамильтонову уравнению

$$\gamma^2 R(\sigma) = g^{-1} \partial_\tau g.$$

Мы параметризуем функции $R(\sigma)$ и $g(\sigma)$ полями g_L и g_R , принимающими значения в группе $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} g(\sigma) &= g_L(\sigma)g_R(-\sigma), \\ R(\sigma) &= g_R^{-1}(-\sigma)g_L^{-1}(\sigma)g'_L(\sigma)g_R(-\sigma) + g_R^{-1}(-\sigma)g'_R(-\sigma). \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда гамильтониан в (30) разбивается на киральную и антикиральную части, $H = H_L + H_R$, где

$$H_L = -\frac{1}{\gamma^2} \int_0^{2\pi} d\sigma \langle g_L^{-1}g'_L g_L^{-1}g'_L \rangle$$

(и аналогично для H_R). Соответствующее разбиение (с точностью до граничных членов) имеет место и для симплектической формы $\omega = d\theta$. Используя (30) и (31), получаем

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{\gamma^2} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(\langle (g_L^{-1}dg_L)' \wedge (g_L^{-1}dg_L) \rangle - \langle (dg_R g_R^{-1})' \wedge (dg_R g_R^{-1}) \rangle \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\gamma^2} \left(\langle (g_L^{-1}dg_L) \wedge (dg_R g_R^{-1}) \rangle - \frac{\langle t_0 g^{-1}dg \rangle \langle t_0 dg g^{-1} \rangle}{1 + \langle t_0 g t_0 g^{-1} \rangle} \right) \Big|_0^{2\pi}. \end{aligned} \quad (32)$$

Последний член в этом уравнении обращается в нуль для периодических g ; в этом случае выражение (32) редуцируется к симплектической форме ВЗНВ из [25]. Тогда гамильтоновы уравнения разбиваются на $\dot{g}_L = g'_L$ и $\dot{g}_R = -g'_R$, откуда получается общее решение (17). Поэтому мы используем одно и то же обозначение для полей g_L и g_R в гамильтоновом и лагранжевом подходах.

Процедура калибрования, приводящая к косет-модели (15), эквивалентна гамильтоновой редукции с теми же связями (18). Для параметризации (20), (21) редуцированный киральный гамильтонианиан и 2-форма принимают вид

$$H_L| = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{2\pi} d\sigma (f'^2 + \alpha' \beta'), \quad \omega_L| = \frac{1}{\gamma^2} \int_0^{2\pi} d\sigma (df' \wedge df + d\beta' \wedge d\alpha), \quad (33)$$

где $\text{th}^2 f = \beta'/\alpha'$ и мы опустили граничные члены в ω_L . Заметим, что подынтегральное выражение в H_L является просто тензором энергии-импульса (24).

Канонический вид (33) в терминах свободных полей можно получить переходом к каноническим свободным полям ϕ_1 и ϕ_2 , снова воспользовавшись преобразованием свободных полей (26), что дает

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\gamma^2} (f'^2 + \alpha' \beta') = \phi_1'^2 + \phi_2'^2, \\ \frac{1}{\gamma^2} (df' \wedge df + d\beta' \wedge d\alpha) &= d\phi_1' \wedge d\phi_1 + d\phi_2' \wedge d\phi_2 + \text{граничные члены}. \end{aligned} \quad (34)$$

Преобразование свободных полей (26) было получено как решение этих уравнений.

Приведенные результаты показывают, что гамильтонова редукция, как и лагранжева редукция, является удобным подходом к интегрированию ненильпотентно калиброванной $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -теории ВЗНВ. По нашему мнению, эти методы должны обобщаться на другие калибровочные теории ВЗНВ.

6. ПАРАФЕРМИОННЫЕ $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ -КОСЕТ-ТОКИ

Хорошо известно, что киральные токи ВЗНВ

$$\gamma^2 J_k(z) = \langle t_k \partial_z g(z, \bar{z}) g^{-1}(z, \bar{z}) \rangle = \langle t_k \partial_z g_L(z) g_L^{-1}(z) \rangle \quad (35)$$

удовлетворяют линейной алгебре Каца–Мули

$$\{J_k(z), J_l(z')\} = \epsilon_{kl}^m J_m(z) \delta(z - z') + \frac{1}{2\gamma^2} \eta_{kl} \delta'(z - z').$$

Исследуем, как редукция сказывается на этих свойствах. Киральные токи

$$\gamma^2 V_{\pm}(z) = \langle (t_1 \pm it_2) \partial_z g_L(z) g_L^{-1}(z) \rangle$$

представляют особый интерес. Учитывая параметризации (20) и (21), связи (22) и преобразование свободных полей (26), путем непосредственного вычисления получаем

$$V_{\pm}(z) = \frac{1}{\gamma} (\partial_z \phi_1(z) \pm i \partial_z \phi_2(z)) e^{\pm 2i\gamma \phi_2(z)}. \quad (36)$$

Примечательно, что эти поля являются результатом свободно-полевого преобразования сохраняющихся парафермионов из [2], [5], которые с помощью редукции получают теперь интерпретацию в терминах косетных токов.

Сугаваровский тензор энергии-импульса в теории ВЗНВ

$$T(z) = -\gamma^2 J^k(z) J_k(z)$$

сохраняет свой простой вид в терминах парафермионных косет-токов [2], [5] и после редукции:

$$T(z) = \gamma^2 V_+(z) V_-(z). \quad (37)$$

Свободно-полевая параметризация парафермионов (36), очевидно, приводит к свободно-полевному тензору энергии-импульса (34). Но в отличие от ВЗНВ-токов Када–Муди (35), косет-токи удовлетворяют нелинейной нелокальной алгебре скобок Пуассона, которую можно получить или используя метод скобок Дирака, или непосредственно из представления в терминах свободных полей. Результаты для скобок Пуассона зависят от выбранных граничных условий. Здесь мы имеем дело с периодическими граничными условиями, заданными в разделе 3. Для киральных и антикиральных компонент $\phi_k(z)$ и $\bar{\phi}_k(\bar{z})$ канонического свободного поля $\psi_k(\sigma, \tau)$ (25) мы выбираем обычные разложения по модам

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &= \frac{1}{2} q_k + \frac{1}{4\pi} p_k z + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{a_n^{(k)}}{n} e^{-inz}, \\ \bar{\phi}_k(\bar{z}) &= \frac{1}{2} q_k + \frac{1}{4\pi} p_k \bar{z} + \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{a}_n^{(k)}}{n} e^{-in\bar{z}}, \end{aligned} \quad (38)$$

причем выполнена каноническая алгебра мод

$$\begin{aligned} \{q_k, p_l\} &= \delta_{k,l}, \quad i\{a_n^{(k)}, a_m^{(l)}\} = m\delta_{k,l}\delta_{m+n,0}, \\ \{q_k, a_m^{(l)}\} &= 0, \quad \{p_k, a_m^{(l)}\} = 0. \end{aligned}$$

Вместо $V_{\pm}(z)$ мы рассмотрим периодические парафермионы [6]

$$W_{\pm}(z) = \frac{1}{\gamma} (\partial_z \phi_1(z) \pm i \partial_z \phi_2(z)) e^{\pm 2i\gamma \varphi_2(z)}, \quad (39)$$

где φ_2 есть поле ϕ_2 с изъятой нулевой модой p_2 и с добавленной целой нулевой модой q_2 свободного поля (25), т.е. $\varphi_2(z) = q_2/2 + \phi_2(z)|_{p_2=0}$. Эти периодические косет-токи удовлетворяют алгебре

$$\begin{aligned} \{W_{\pm}(z), W_{\pm}(z')\} &= \gamma^2 W_{\pm}(z) W_{\pm}(z') h(z - z'), \\ \{W_{\pm}(z), W_{\mp}(z')\} &= -\gamma^2 W_{\pm}(z) W_{\mp}(z') h(z - z') + \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \left(\partial_z + \frac{i\gamma p_2}{2\pi} \right) \delta_{2\pi}(z - z'), \\ \{p_2, W_{\pm}(z')\} &= \mp 2i\gamma W_{\pm}(z'), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$h(z) = \left(\epsilon_{2\pi}(z) - \frac{z}{\pi} \right)$$

– периодическая функция с “зазубренным” профилем, а $\epsilon_{2\pi}(z)$ – “ступенчатая” функция¹⁾. Заметим, что нулевая мода импульса p_2 входит в периодическую парафермионную алгебру.

Тензор энергии-импульса (37), выраженный теперь через $W_{\pm}$, приводит к алгебре Вирасоро

$$\{T(z), T(z')\} = -\partial_{z'} T(z') \delta_{2\pi}(z - z') + 2T(z') \partial_z \delta_{2\pi}(z - z'),$$

что определяет его конформный вес ∂a . Для парафермионов $W_{\pm}(z)$ имеем

$$\begin{aligned} \{T(z), W_{\pm}(z')\} &= -\partial_{z'} W_{\pm}(z') \delta_{2\pi}(z - z') + W_{\pm}(z') \partial_z \delta_{2\pi}(z - z') \mp \\ &\mp \frac{i\gamma p_2}{2\pi} W_{\pm}(z') \delta_{2\pi}(z - z'), \end{aligned}$$

откуда следует конформный вес парафермионов $один$. Приведем еще полезную формулу, порождающую тензор энергии-импульса $T(z)$ через скобку Пуассона:

$$\begin{aligned} \{D_z W_+(z), W_-(z')\} &= \gamma^2 D_z W_+(z) W_-(z') h(z - z') - \\ &- 2T(z) \delta_{2\pi}(z - z') + \frac{1}{\gamma^2} D_z^2 \delta_{2\pi}(z - z'), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$D_z = \partial_z + \frac{i\gamma p_2}{2\pi}.$$

Уравнение (41) оказывается важным в квантовой механике, поскольку операторное произведение $W_+(z)W_-(z)$ плохо определено и не может использоваться для определения оператора $T(z)$.

7. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ПАРАФЕРМИОНОВ

В данном разделе, вместо того чтобы анализировать операторные разложения, мы явно определяем квантовый аналог парафермионной алгебры (40). Квантование теории определяется заменой скобок Пуассона канонических свободных полей на коммутаторы $i\hbar\{, \} \rightarrow [,]$, причем нелинейные по свободным полям выражения являются нормально упорядоченными. Однако вычисления с нормально упорядоченными операторами обычно приводит к аномальным вкладам. Можно избежать появления этих аномалий посредством квантово-механической деформации составных операторов данной теории. Поэтому определим нормально упорядоченные парафермионные операторы, соответствующие (39), как

$$W_{\pm}(z) = \frac{1}{\gamma} : \left(\eta \partial_z \phi_1(z) \pm i \partial_z \phi_2(z) \right) e^{\pm 2i\gamma \varphi_2(z)} :, \quad (42)$$

¹⁾ Функция $\epsilon_{2\pi}(\sigma) = 2n + 1$ при $2n\pi < \sigma < (2n+2)\pi$, что совпадает с $\text{sgn}(\sigma)$ при $-2\pi < \sigma < 2\pi$.

где η является параметром деформации с классическим пределом $\eta = 1$.

Сначала найдем квантовый аналог скобок Пуассона (40) начиная с простейшего примера $\{W_+(z), W_+(z')\} = \gamma^2 W_+(z) W_+(z') h(z - z')$. В приложении явно выведено соотношение

$$\begin{aligned} \frac{W_+(z)W_+(z')}{e^{i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_+(z')W_+(z)}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = \\ = \frac{i\hbar}{2\gamma^2} \left(\eta^2 - 1 + \frac{\gamma^2 \hbar}{\pi} \right) : e^{2i\gamma\varphi_2(z)} e^{2i\gamma\varphi_2(z')} : \partial_z \delta_{2\pi}(z - z'), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$h^\pm(z) = \frac{1}{2}h(z) \mp \frac{i}{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{z}{2} \right) \quad (44)$$

— соответственно положительно- и отрицательно-частотные части $h(z)$. Правая часть (43) пропорциональна оператору $: e^{2i\gamma\varphi_2(z)} e^{2i\gamma\varphi_2(z')} :$, который, очевидно, нельзя переписать биллокально в терминах парафермионов, что необходимо для получения замкнутой операторной алгебры. Однако можно полностью устранить мешающий член, налагая ограничение

$$\eta^2 - 1 + \frac{\gamma^2 \hbar}{\pi} = 0 \quad \text{или} \quad \eta = \pm \sqrt{1 - \frac{\hbar\gamma^2}{\pi}}. \quad (45)$$

Классический предел $\eta = 1$ соответствует положительному квадратному корню. При таком выборе имеем

$$\frac{W_+(z)W_+(z')}{e^{i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_+(z')W_+(z)}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = 0. \quad (46)$$

Квантовые соотношения, соответствующие остальным скобкам Пуассона в (40), имеют вид (см. приложение)

$$\begin{aligned} \frac{W_-(z)W_-(z')}{e^{i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_-(z')W_-(z)}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = 0, \\ \frac{W_+(z)W_-(z')}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_-(z')W_+(z)}{e^{i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = \frac{i\hbar}{\gamma^2} \left(\partial_z + \frac{i\gamma p_2}{2\pi} \right) \delta_{2\pi}(z - z'), \\ [p_2, W_\pm(z)] = \pm 2\hbar\gamma W_\pm(z). \end{aligned} \quad (47)$$

Как и при выводе (46), необходимо наложить ограничение (45) для исключения аномальных вкладов.

Чтобы проверить, что эти операторные соотношения соответствуют классическим скобкам Пуассона, разложим точные формулы по степеням $\hbar$. Например, из (46) получаем

$$[W_+(z), W_+(z')] - i\hbar\gamma^2 W_+(z)W_+(z')h(z - z') + O(\hbar^2) = 0,$$

где мы воспользовались соотношением $h(z) = h^+(z) + h^-(z)$, которое непосредственно следует из (44).

8. ОПЕРАТОР ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Как уже упоминалось, для того чтобы породить квантовый тензор энергии-импульса, следует рассмотреть квантовый аналог равенства (41). Из вычислений, приведенных в конце приложения, следует, что

$$\begin{aligned} \frac{D_z W_+(z) W_-(z')}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_-(z') D_z W_+(z)}{e^{i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} &= \frac{i\hbar}{\gamma^2} \left(1 + \frac{\hbar\gamma^2}{2\pi}\right) D_z^2 \delta_{2\pi}(z-z') - \\ &- 2i\hbar\eta^2 \left(:(\partial_z \phi_1)^2(z'): + :(\partial_z \phi_2)^2(z'): + \frac{\hbar\gamma}{2\pi\eta} \partial_z^2 \phi_1(z') + \frac{\hbar\gamma^2}{(4\pi\eta)^2}\right) \delta_{2\pi}(z-z'). \end{aligned} \quad (48)$$

Второе слагаемое в правой части соответствует члену $-2T(z')\delta_{2\pi}(z-z')$ в классической скобке Пуассона (41), и это позволяет предположить, что оператор

$$T(z) = :(\partial_z \phi_1)^2(z): + :(\partial_z \phi_2)^2(z): + \frac{\hbar\gamma}{2\pi\eta} \partial_z^2 \phi_1(z) + \frac{\hbar\gamma^2}{(4\pi\eta)^2}$$

является тензором энергии-импульса в терминах свободных полей нашей модели с дополнительным “удлинением”. В σ -модельной интерпретации это “удлинение” могло бы соответствовать непертурбативному дилатону [9]–[12].

Заметим, что тензор энергии-импульса подчиняется алгебре Вирасоро

$$\begin{aligned} [T(z), T(z')] &= -i\hbar \partial_{z'} T(z') \delta_{2\pi}(z-z') + 2i\hbar T(z') \partial_z \delta_{2\pi}(z-z') - \\ &- \frac{i\hbar c}{24\pi} (\partial_z^3 + 2\partial_z) \delta_{2\pi}(z-z') \end{aligned}$$

с центральным зарядом

$$c = \hbar \left(2 + \frac{3\gamma^2}{\pi\eta^2}\right),$$

что согласуется с результатами [9], [26].

На классическом уровне парафермионы являются примарными полями веса один. На квантово-механическом уровне коммутатор имеет вид

$$\begin{aligned} [T(z), W_+(z')] &= i\hbar \left(1 + \frac{\hbar\gamma^2}{2\pi}\right) W_+(z') \partial_z \delta_{2\pi}(z-z') - \\ &- i\hbar \partial_{z'} W_+(z') \delta_{2\pi}(z-z') + \frac{\hbar\gamma}{2\pi} :p_2 W_+(z'): \delta_{2\pi}(z-z'), \end{aligned}$$

откуда видно, что квантовые парафермионы имеют сдвинутый конформный вес $1 + \hbar\gamma^2/(2\pi)$.

9. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПАРАФЕРМИОНЫ

Для квантования канонического преобразования (28) требуются операторы, соответствующие экспонентам в (28), а также нелокальным полям $\Phi(z)$ и $\bar{\Phi}(\bar{z})$. Однако оказывается, что поля

$$A(z) = -\frac{1}{2}e^{-2\gamma\phi_1(z)} - i\Phi(z), \quad \bar{A}(\bar{z}) = -\frac{1}{2}e^{-2\gamma\phi_1(\bar{z})} - i\bar{\Phi}(\bar{z})$$

легче поддаются квантовому рассмотрению. Поле $A(z)$ является одним из киральных полей, которое параметризует общее решение из [5]. Производная $A(z)$ имеет структуру, подобную структуре производной парафермионов, поэтому назовем поле $A'(z)$ вспомогательным парафермионом и обозначим $\tilde{V}_-$,

$$\tilde{V}_-(z) = \gamma(\partial_z\phi_1(z) - i\partial_z\phi_2(z))e^{-2\gamma\phi_1(z)}.$$

Это выражение удовлетворяет замкнутой киральной алгебре, если заменить $\phi_1(z)$ на $q_1/2 + \phi_1(z)$. Несколько искусственное удвоение нулевой моды q_1 является артефактом нашего строгого разделения киральных и антикиральных объектов, а каждый член в общем решении является произведением киральной и антикиральной компонент. Согласно процедуре, предложенной в разделе 7, квантовый вспомогательный парафермион равен

$$\tilde{V}_-(z) = \gamma:(\eta\partial_z\phi_1(z) - i\partial_z\phi_2(z))e^{-2\gamma\eta^{-1}(\frac{q_1}{2} + \phi_1(z))}:$$

Он коммутирует с $V_-(z')$, однако в отличие от $V_-(z)$ сохраняет свой классический конформный вес равным *единице*. Поэтому поле $A(z)$ имеет нулевой конформный вес, и можно предположить, что оно играет роль экранирующего заряда.

Подводя итог, отметим, что для непротиворечивого квантования достаточно только одного фиксированного параметра деформации. Конечно, наше квантование теории $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ все еще неполно. В частности, предстоит проквантовать метрику черной дыры, что могло бы дать ответ на вопрос, делает ли непертурбативный дилатон эту метрику динамической.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Тождества для нормально упорядоченных операторов

Данное приложение посвящено приведенным в основном тексте тождествам, содержащим нормально упорядоченные операторы. Для получения нормального упорядочения разложим определенные в (38) киральные свободные поля $\phi_i(z)$:

$$\phi_i(z) = \frac{1}{2}q_i + \frac{1}{4\pi}p_i z + \phi_i^+(z) + \phi_i^-(z), \quad (49)$$

где

$$\phi_i^\pm(z) = \pm \frac{i}{\sqrt{4\pi}} \sum_{n>0} \frac{a_{\pm n}^{(i)}}{n} e^{\mp i n z}.$$

Мы интерпретируем $\phi_i^-(z)$ и $\phi_i^+(z)$ как операторы рождения и уничтожения. Мы не будем здесь рассматривать эквивалентные антикиральные конструкции.

Используя алгебру коммутаторов

$$[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{i,j}, \quad [a_m^{(i)}, a_n^{(j)}] = m\hbar\delta_{i,j}\delta_{m+n,0}, \quad i, j = 1, 2,$$

получаем

$$[\phi_i^\pm(z), \phi_j^\pm(z')] = 0, \quad [\phi_i^\pm(z), \phi_j^\mp(z')] = -\frac{i}{4}\delta_{ij}h^\pm(z-z'),$$

где

$$h^\pm(z) = \epsilon^\pm(z) - \frac{z}{2\pi}.$$

Здесь $\epsilon^\pm(z)$ обозначают положительно- и отрицательно-частотные части “ступенчатой” функции $\epsilon_{2\pi}(z)$ (см. сноску 1). Они имеют представления в виде рядов Фурье

$$\epsilon^+(z) = \frac{z}{2\pi} + \frac{i}{\pi} \sum_{n>0} \frac{e^{-n(z-i\varepsilon)}}{n}, \quad \epsilon^-(z) = \frac{z}{2\pi} + \frac{i}{\pi} \sum_{n<0} \frac{e^{-n(z+i\varepsilon)}}{n}.$$

Заметим, что для сходимости сюда включен множитель $\varepsilon > 0$. Функции $\epsilon^\pm(z)$ обладают свойствами $(\epsilon^+)^*(z) = \epsilon^-(z)$ и $\epsilon^+(-z) = -\epsilon^-(z)$, и в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ они на малых расстояниях имеют свободно-полевою сингулярность

$$\epsilon^\pm(z) = \frac{1}{2}\epsilon_{2\pi}(z) \mp \frac{i}{2\pi} \ln \left[4 \sin^2 \left(\frac{z}{2} \right) \right].$$

Введем также “расщепленные” дельта-функции $\delta^+(z) = (1/2) \partial_z \epsilon^+(z)$ (см. [27]):

$$\delta^+(z) = \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n>0} e^{-n(z-i\varepsilon)} = -\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - e^{-i(z-i\varepsilon)}},$$

и аналогично $\delta^-(z) = (1/2) \partial_z \epsilon^-(z)$. Введенные функции $\delta^\pm$ обладают свойствами $(\delta^+)^*(z) = \delta^-(z)$, $\delta^+(-z) = \delta^-(z)$; при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\delta^\pm(z)$ суммируются в периодическую дельта-функцию $\delta_{2\pi}(z)$.

Получим теперь приведенные в основном тексте тождества для нормально упорядоченных операторов. Как обычно, нормальное упорядочение передвигает операторы рождения и уничтожения соответственно влево и вправо, при этом подразумевается эрмитово нормальное упорядочение нулевых мод: $e^{2q} f(p) = e^q f(p) e^q$. Используя определения

$$e_\pm(z) := e^{i\gamma q_2} e^{2i\gamma \phi_2^\pm(z)}, \quad \nu(z) := \frac{1}{\gamma} (\eta \partial_z \phi_1(z) + i \partial_z \phi_2(z)),$$

можно записать периодический парафермионный оператор $W_+(z)$, заданный равенством (42), как

$$W_+(z) = e_-(z) \nu(z) e_+(z).$$

Начнем с квантового аналога скобки Пуассона $\{W_+(z), W_+(z')\}$. С наивной точки зрения, чтобы вычислить операторное произведение $W_+(z)W_+(z')$, следовало бы рассмотреть коммутатор $[W_+(z), W_+(z')]$. Используя тождество $e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]}$, которое выполнено, если $[A, B]$ коммутирует с A и B , получим $e_+(z)e_-(z') = e_-(z')e_+(z) \times e^{i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}$, и поэтому

$$e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')} W_+(z)W_+(z') = e_-(z)\nu(z)e_-(z')e_+(z)\nu(z')e_+(z'). \quad (50)$$

Но этот оператор все еще не является правильным образом нормально упорядоченным. Разложим $\nu(z)$ аналогично (49):

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \nu^+(z) + \nu^-(z) + \frac{\eta p_1 + ip_2}{4\pi\gamma}, \\ \nu^\pm(z) &= \frac{1}{\gamma}(\eta\partial_z\phi_1^\pm(z) + i\partial_z\phi_2^\pm(z)). \end{aligned}$$

Соотношение (50) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')} W_+(z)W_+(z') &= :W_+(z)W_+(z'): + \\ &+ e_-(z)e_-(z')[\nu^+(z), \nu^-(z')]e_+(z)e_+(z') + \\ &+ e_-(z)[\nu(z), e_-(z')]\nu(z')e_+(z)e_+(z') + \\ &+ e_-(z)e_-(z')\nu(z)[e_+(z), \nu(z')]e_+(z') + \\ &+ e_-(z)[\nu(z), e_-(z')][e_+(z), \nu(z')]e_+(z'). \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} [\nu(z), e_\mp(z')] &= i\hbar e_\mp(z')\delta^\pm(z-z'), \\ [\nu^+(z), \nu^-(z')] &= \frac{i\hbar}{2\gamma^2}(\eta^2 - 1)\partial_z\delta^+(z-z'), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{W_+(z)W_+(z')}{e^{i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} &= :W_+(z)W_+(z'): + i\hbar : (e^{2i\gamma\varphi_2(z)}W_+(z') - W_+(z)e^{2i\gamma\varphi_2(z')}) : \delta^+(z-z') + \\ &+ : e^{2i\gamma\varphi_2(z)}e^{2i\gamma\varphi_2(z')} : \left(\frac{i\hbar}{2\gamma^2}(\eta^2 - 1)\partial_z\delta^+(z-z') + \hbar^2(\delta^+(z-z'))^2 \right). \quad (51) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тождеством

$$[\delta^+(z)]^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} + \frac{i}{2\pi}\partial_z\delta^+(z), \quad (52)$$

которое верно даже при конечном ε . Используя (52), можно записать правую часть (50) в виде выражения, линейного по $\delta^+(z - z')$ и ее производной. Напомним, что эта обобщенная функция принимает вид $\delta^-(z - z')$ при перестановке z и z' . Таким образом, вычитая из (51) уравнение, получаемое перестановкой z и z' в (51), находим

$$\begin{aligned} \frac{W_+(z)W_+(z')}{e^{i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_+(z')W_+(z)}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = \\ = i\hbar : (e^{2i\gamma\varphi_2(z)}W_+(z') - W_+(z)e^{2i\gamma\varphi_2(z')}) : \delta_{2\pi}(z - z') + \\ + \frac{i\hbar}{2\gamma^2} \left(\eta^2 - 1 + \frac{\hbar\gamma^2}{\pi} \right) : e^{2i\gamma\varphi_2(z)}e^{2i\gamma\varphi_2(z')} : \partial_z \delta_{2\pi}(z - z'). \end{aligned}$$

Первый член в правой части равен нулю, поскольку множитель перед $\delta_{2\pi}(z - z')$ стремится к нулю при $z \rightarrow z'$, откуда немедленно следует (43).

Поскольку все остальные приведенные в тексте результаты можно вывести с использованием тех же приемов, дальнейшие выкладки описаны лишь в общих чертах. Вычисляя операторные произведения $W_+(z)W_-(z')$ и $W_-(z')W_+(z)$, мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{W_+(z)W_-(z')}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_-(z')W_+(z)}{e^{i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = \\ = i\hbar : (\nu(z) - \nu^*(z')) e^{2i\gamma\varphi_2(z)} e^{-2i\gamma\varphi_2(z')} : \delta_{2\pi}(z - z') + \\ + \frac{i\hbar}{2\gamma^2} \left(\eta^2 + 1 + \frac{\hbar\gamma^2}{\pi} \right) : e^{2i\gamma\varphi_2(z)} e^{-2i\gamma\varphi_2(z')} : \partial_z \delta_{2\pi}(z - z'). \quad (53) \end{aligned}$$

Используя тождество для периодических $f(z)$: $f(z)\delta_{2\pi}(z - z') = f(z')\delta_{2\pi}(z - z')$, и производные от этого тождества, запишем

$$\begin{aligned} \frac{W_+(z)W_-(z')}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_-(z')W_+(z)}{e^{i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = -\frac{\hbar p_2}{2\pi\gamma} \delta_{2\pi}(z - z') + \\ + \frac{\hbar}{\gamma} \left(\eta^2 - 1 + \frac{\hbar\gamma^2}{\pi} \right) \partial_z \varphi_2(z') \delta_{2\pi}(z - z') + \frac{i\hbar}{2\gamma^2} \left(\eta^2 + 1 + \frac{\hbar\gamma^2}{\pi} \right) \partial_z \delta_{2\pi}(z - z') \end{aligned}$$

и получим (47) после наложения ограничений (45).

В заключение подготовим базу для вывода оператора энергии-импульса. Чтобы доказать (48), сначала установим, что

$$\frac{D_z W_+(z)W_-(z')}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} - \frac{W_-(z')D_z W_+(z)}{e^{i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} = -2i\hbar\gamma^2 A(z, z') + \frac{i\hbar}{\gamma^2} D_z^2 \delta_{2\pi}(z - z'), \quad (54)$$

где

$$A(z, z') = \frac{W_+(z)W_-(z')}{e^{-i\hbar\gamma^2 h^+(z-z')}} \delta^+(z - z') + \frac{W_-(z')W_+(z)}{e^{i\hbar\gamma^2 h^-(z-z')}} \delta^-(z - z').$$

При вычислении $A(z, z')$ встречаются те же операторные произведения, что и при получении (53). Результат можно записать как

$$\begin{aligned} A(z, z') = & \left(:W_+(z)W_-(z'): + \frac{\hbar}{16\pi^2} \right) \delta_{2\pi}(z - z') - \\ & - \frac{\hbar}{2\pi} :e^{2i\gamma\varphi_2(z)}e^{-2i\gamma\varphi_2(z')}(\nu(z) - \nu^*(z')): \partial_z \delta_{2\pi}(z - z') - \\ & - \frac{\hbar}{8\pi\gamma^2} \left(\eta^2 + 1 + \frac{\hbar\gamma^2}{\pi} \right) :e^{2i\gamma\varphi_2(z)}e^{-2i\gamma\varphi_2(z')}: \partial_z^2 \delta_{2\pi}(z - z'). \end{aligned} \quad (55)$$

Теперь снова используем тождество (52) и его производную

$$\delta^+(z) \partial_z \delta^+(z) = \frac{1}{4\pi} i \partial_z^2 \delta^+(z).$$

С учетом ограничений (45) и с помощью стандартных свойств дельта-функции редуцируем уравнение (55) к виду

$$\begin{aligned} A(z, z') = & \left[\frac{\eta^2}{\gamma^2} (:(\partial_z \phi_1)^2(z'): + :(\partial_z \phi_2)^2(z')): + \right. \\ & \left. + \frac{\hbar\eta}{2\pi\gamma} \partial_z^2 \phi_1(z') + \frac{\hbar}{16\pi^2} - \frac{\hbar}{4\pi\gamma^2} \left(\partial_z + \frac{i\gamma p_2}{2\pi} \right)^2 \right] \delta_{2\pi}(z - z'). \end{aligned}$$

Подстановка этого уравнения в (54) дает (48).

Благодарности. Один из авторов (Г. В.) выражает благодарность Й. Шниттгеру за обсуждения квантовых аспектов проблемы. Авторы выражают благодарность К. И. Библу за чтение рукописи работы. Один из авторов (Г. Дж.) выражает признательность DESY Zeuthen за гостеприимство.

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке (Г. Дж.) DFG, GSRT и РФФИ (грант № 99-01-00151).

Список литературы

- [1] *P. Forgacs, A. Wipf, J. Balog, L. Feher, L. O'Raifeartaigh.* Phys. Lett. B. 1989. V. 227. P. 214.
- [2] *K. Bardakci, M. Crescimanno, E. Rabinovici.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 344. P. 344.
- [3] *U. Müller, G. Weigt.* Commun. Math. Phys. 1999. V. 205. P. 421.
- [4] *A. N. Leznov, M. V. Saveliev.* Acta Appl. Math. 1989. V. 16. P. 1.
- [5] *U. Müller, G. Weigt.* Phys. Lett. B. 1997. V. 400. P. 21.
- [6] *U. Müller, G. Weigt.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 568. P. 457.
- [7] *J.-L. Gervais, M. V. Saveliev.* Phys. Lett. B. 1992. V. 286. P. 271.
- [8] *A. Bilal.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 422. P. 258.
- [9] *E. Witten.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 314.
- [10] *I. Bars, K. Sfetsos.* Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 844.
- [11] *A. A. Tseytlin.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 399. P. 601.

- [12] *R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 269.
- [13] *T. H. Buscher.* Phys. Lett. B. 1988. V. 201. P. 466.
- [14] *E. Braaten, T. Curtright, C. Thorn.* Ann. Phys. 1983. V. 147. P. 365.
- [15] *H. J. Otto, G. Weigt.* Z. Phys. C. 1986. V. 31. P. 219.
- [16] *А. Б. Замолодчиков, В. А. Фатеев.* ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 380.
- [17] *A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Morozov.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 328. P. 664.
- [18] *T. Jayaraman, K. S. Narain, M. H. Sarmadi.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 343. P. 418.
- [19] *D. Nemeschansky.* Phys. Lett. B. 1989. V. 224. P. 121.
- [20] *I. Bakas, E. Kiritsis.* Int. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. P. 55.
- [21] *J. Wess, B. Zumino.* Phys. Lett. B. 1971. V. 37. P. 95.
- [22] *С. П. Новиков.* УМН. 1982. Т. 37. С. 3.
- [23] *E. Witten.* Commun. Math. Phys. 1984. V. 92. P. 455.
- [24] *C. Ford, G. Jorjadze, G. Weigt.* Turk. J. Phys. 2000. V. 24. P. 311.
- [25] *M. F. Chu, P. Goddard, I. Halliday, D. Olive, A. Schwimmer.* Phys. Lett. B. 1991. V. 266. P. 71.
- [26] *J. Lykken.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 313. P. 473.
- [27] *C. Ford, L. O'Raiartaigh.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 460. P. 203.

Поступила в редакцию 13.XI.2000 г.